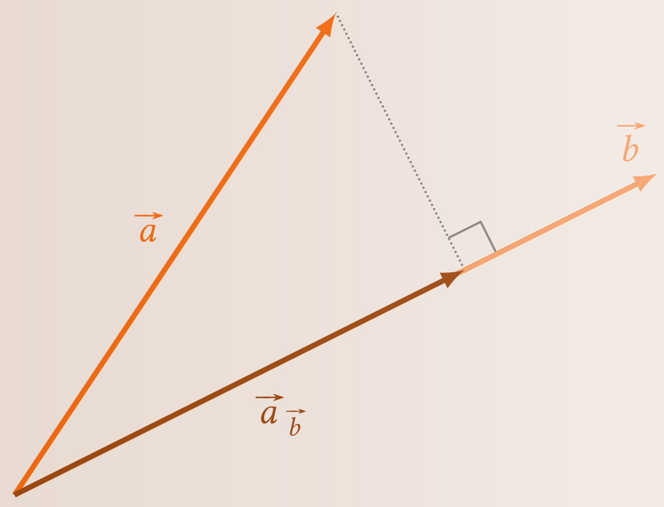
Mike Vandal Auerbach

# Geometri i planen




www.mathematicus.dk

**Geometri i planen**
1. udgave, 2018

Disse noter dækker kernestoffet i plangeometri på stx A- og B-niveau efter gymnasiereformen 2017.

Al geometrien tager udgangspunkt i vektorer i planen; således indføres f.eks. de trigonometriske funktioner uden henvisning til enhedscirklen, men udelukkende ud fra vinkler i forbindelse med vektorer.

Disse noter er skrevet til matematikundervisning på stx og må frit anvendes til ikke-kommercielle formål.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

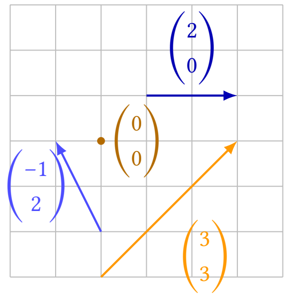
Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

# Indhold

# 1 Vektorer i planen

Hvis man kigger på et sted i et 2-dimensionalt koordinatsystem, kan man udtrykke stedets placering som et punkt $(x; y)$, hvor $x$-koordinaten angiver stedets placering højre/venstre, mens $y$-koordinaten angiver placeringen op/ned.

Men hvis man bevæger sig i et koordinatsystem, kan man også angive bevægelsen ved et koordinatsæt, som viser hvor mange enheder, man har bevæget sig højre/venstre, og hvor mange enheder, man har bevæget sig op/ned. En sådan »rutebeskrivelse« kalder man en *vektor*, og den vises ofte med en pil i et koordinatsystem. Et par eksempler på vektorer kan ses på figur 1.1.




**Figur 1.1:** Eksempler på vektorer i planen.

Bemærk, at koordinatsættet for en vektor skrives lodret. Det gør man for at den ikke skal forveksles med et punkt. Vektoren

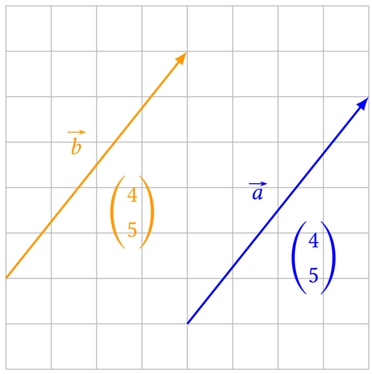
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

beskriver altså følgende bevægelse i et koordinatsystem: 1 enhed mod venstre og 2 enheder opad. Symbolet for en vektor er et bogstav med en pil over, f.eks. $\vec{a}$. Pilen over $a$'et viser, at der er tale om en vektor. Man har altså følgende definition på en vektor:

**Definition 1.1**

En *vektor* i planen er en matematisk størrelse, der angiver en bevægelse i planen vha. to koordinater:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} .$$




**Figur 1.2:** To repræsentanter for den samme vektor.

Det er her vigtigt at pointere, at en vektor kun er fastlagt af sine koordinater, og ikke ligger et bestemt sted. Enhver pil med samme retning er derfor en *repræsentant* for den samme vektor. For vektorerne på figur 1.2 gælder derfor, at

$$\vec{a} = \vec{b} ,$$

fordi de to pile har de samme koordinater (nemlig 4 mod højre, 5 op). De repræsenterer altså den samme vektor.

Til enhver vektor hører i øvrigt en såkaldt *modsat* vektor, som er den vektor, der peger i den modsatte retning. Den er defineret på følgende måde:

**Definition 1.2**

Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, definerer man den modsatte vektor til $\vec{a}$ som

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix} .$$

**Eksempel 1.3** Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, så er den modsatte vektor givet ved

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -(-3) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Her kan man se, at $\vec{a}$ betegner en bevægelse på 3 til venstre og 1 op, mens den modsatte vektor $-\vec{a}$ betegner en bevægelse på 3 til højre og 1 ned.

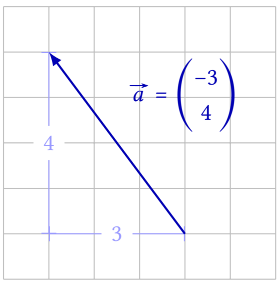
I stedet for at tale om vektorens koordinater, kan man også tale om, at vektoren har en *længde* og en *retning*. Længden af vektoren svarer til længden af en pil, der repræsenterer vektoren. Denne længde kan findes vha. Pythagoras' sætning. Ser man på figur 1.3, ser man, at pilen, der repræsenterer vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} ,$$

er hypotenuse i en retvinklet trekant, hvor kateterne er hhv. 3 og 4. Vektorens længde $|\vec{a}|$ kan altså beregnes ved at bruge Pythagoras' sætning på vektorens koordinater

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 .$$

Der gælder derfor følgende sætning:




**Figur 1.3:** Længden af en vektor kan findes vha. Pythagoras' sætning.

**Sætning 1.4**

Hvis vektoren $\vec{a}$ har koordinaterne $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, så er vektorens længde

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} .$$

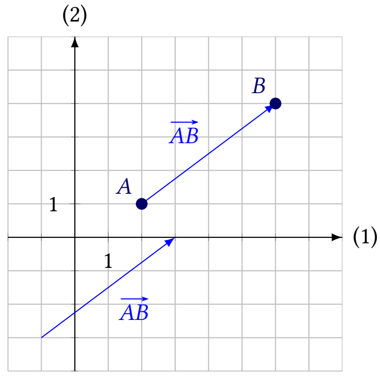
En speciel vektor er i øvrigt den vektor, der har koordinaterne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Det er den eneste vektor, der har længden 0, den kaldes derfor *nulvektoren*, $\vec{0}$:

**Definition 1.5**

Den vektor, hvis længde er 0, kaldes *nulvektoren*, $\vec{0}$.

Da denne vektors længde er 0, har den ingen retning. Man kalder den derfor for en *uegentlig vektor*.

Har man to punkter i planen, fastlægger disse en vektor. På figur 1.4 ses to repræsentater for vektoren $\overrightarrow{AB}$. Pilen fra $A$ til $B$ fastlægger vektoren $\overrightarrow{AB}$; men fordi alle pile med samme længde og retning er repræsentanter for den samme vektor, kan man altså lige så godt tegne vektoren et andet sted – som det også er gjort på figuren. Man har følgende definition:

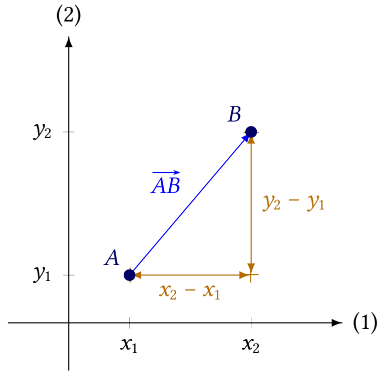



**Figur 1.4:** To repræsentanter for vektoren $\overrightarrow{AB}$.

**Definition 1.6**

Hvis $A$ og $B$ er to punkter i planen, så er vektoren $\overrightarrow{AB}$ den vektor, der kan repræsenteres ved en pil *fra $A$ til $B$*.

Koordinaterne for vektoren $\overrightarrow{AB}$ kan man finde ved at undersøge, hvor meget $x$-koordinaterne ændrer sig, når man flytter sig fra $A$ til $B$. Hvis de to punkters koordinater er $A(x_1; y_1)$ og $B(x_2; y_2)$, så må $x$-koordinaten vokse med $x_2 - x_1$ og $y$-koordinaten vokse med $y_2 - y_1$ (se figur 1.5). Man har derfor følgende sætning:



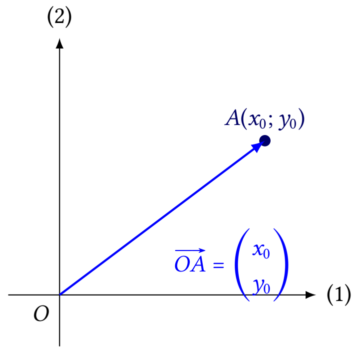

**Figur 1.5:** Sådan beregnes koordinaterne for vektoren $\overrightarrow{AB}$.

**Sætning 1.7**

Vektoren $\overrightarrow{AB}$ mellem punkterne $A(x_1; y_1)$ og $B(x_2; y_2)$ har koordinaterne

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Hvis man har ét punkt i et koordinatsystem, kan man herudfra definere en vektor, der har samme koordinater som punktet, dette er en såkaldt *stedvektor*, der går fra origo (dvs. $(0; 0)$) til punktet (se figur 1.6).




**Figur 1.6:** Vektoren $\overrightarrow{OA}$ har samme koordinater som punktet $A$.

**Definition 1.8**

Hvis $A(x_0; y_0)$ er et punkt i et koordinatsystem, defineres *stedvektoren* til punktet som

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{OA}$ er vektoren fra $O(0; 0)$ til $A(x_0; y_0)$.

## 1.1 Addition og subtraktion

I dette afsnit beskrives, hvordan man regner med vektorer. Vektorer kan lægges sammen og trækkes fra hinanden. Disse operationer er ganske enkelt defineret ved, at man regner på koordinaterne hver for sig.

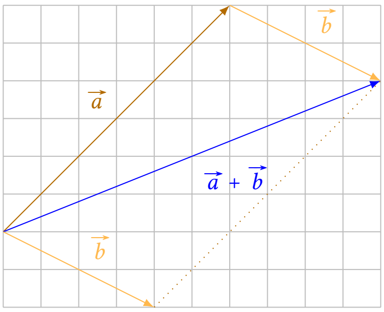
**Definition 1.9**

Hvis der er givet to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} ,$$

så definerer man

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix} .$$



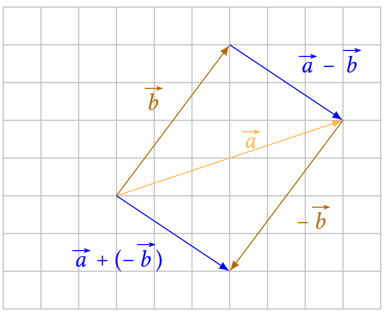

**Figur 1.7:** Addition af vektorer.

Ved at analysere figur 1.7 kan man forholdsvist let argumentere for følgende sætning:

**Sætning 1.10**

Summen $\vec{a} + \vec{b}$ af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er den vektor, man får ved at tegne en pil fra $\vec{a}$'s begyndelsespunkt til $\vec{b}$'s slutpunkt, når vektor $\vec{b}$ lægges i forlængelse af vektor $\vec{a}$.

Man kan også finde $\vec{a} + \vec{b}$ som diagonalen i det parallelogram, der udspændes af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, når de har samme begyndelsespunkt. (Parallelogrammet kaldes også »kræfternes parallelogram«.)




**Figur 1.8:** Subtraktion af vektorer.

Man kan også fortolke subtraktion af vektorer geometrisk. Ser man på udregningen

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) ,$$

fremgår det, at man kan trække en vektor fra en anden ved at lægge den modsatte vektor til. Dvs. vi har følgende sætning (se også figur 1.8):

**Sætning 1.11**

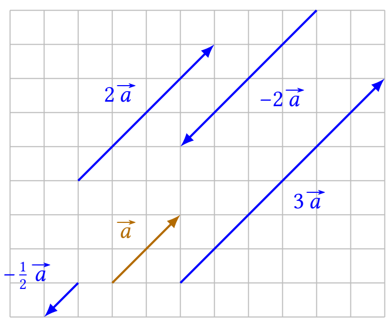
Differensen $\vec{a} - \vec{b}$ af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er den vektor, man får ved at tegne en pil fra $\vec{b}$'s slutpunkt til $\vec{a}$'s slutpunkt, når $\vec{a}$ og $\vec{b}$ tegnes med samme begyndelsespunkt.

Man kan også gange en vektor med et tal. Dette defineres på følgende måde:

**Definition 1.12**

Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ være en vektor, og lad $t$ være et tal. Så er

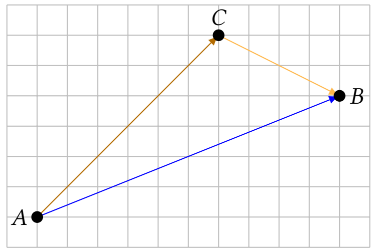
$$t \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} t \cdot a_x \\ t \cdot a_y \end{pmatrix} .$$




**Figur 1.9:** Multiplikation af en vektor med et tal.

Fra denne defininition følger det, at når man ganger en vektor med $t$, bliver den $t$ gange så lang – og hvis $t < 0$, så skifter vektoren retning. Dette er illustreret på figur 1.9.

For vektorer mellem punkter gælder specielt følgende vigtige sætning, som er illustreret på figur 1.10.




**Figur 1.10:** Indskudssætningen: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

**Sætning 1.13: Indskudssætningen**

Hvis $A$, $B$ og $C$ er tre punkter i planen, så er

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \,.$$

**Bevis**
Lad de tre punkter have koordinaterne $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ og $C(x_3; y_3)$. Så er

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} &= \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ y_2 - y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 - x_3 + x_3 - x_1 \\ y_2 - y_3 + y_3 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \,.\end{aligned}$$

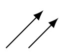
Idet der altså gælder, at $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$, er sætningen bevist. ∎

## 1.2 Vektorer og vinkler

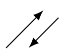
Selvom vektorer ikke ligger et bestemt sted, men betegner en bevægelse, kan man alligevel sammenligne dem geometrisk. Idet vektorer angiver en retning, kan man nemlig tale om, hvilken vinkel de danner med hinanden, og om de er parallelle eller ortogonale. Den følgende definition omhandler de forskellige tilfælde:

**Definition 1.14**

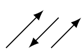
To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kaldes



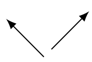
*Ensrettede*
hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ peger i samme parallelle retning.



*Modsat rettede*
hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ peger i modsatte parallelle retninger.



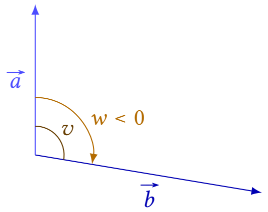
*Parallelle*, $\vec{a} \parallel \vec{b}$
hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er enten ensrettede eller modsat rettede.



*Ortogonale*, $\vec{a} \perp \vec{b}$
hvis $\vec{a}$ står vinkelret på $\vec{b}$.

Da nulvektoren ikke er en egentlig vektor er denne hverken parallel med eller vinkelret på nogen anden vektor.

Ovenstående definition handler indirekte om vinkler mellem vektorer. Skal man måle vinklen mellem vektorer direkte, kan den måles på forskellig vis. Enten kan man måle den mindst mulige vinkel. Eller man kan måle vinklen ved at gå i en bestemt retning fra den ene vektor til den anden.




**Figur 1.11:** Vinklen $v$ er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og $w$ er vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$.

**Definition 1.15: Vinkler mellem vektorer**

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er to vektorer, definerer man

1. vinklen *mellem* vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, som er den mindste vinkel, der udspændes mellem vektorerne, og
2. vinklen *fra* $\vec{a}$ *til* $\vec{b}$, som er den vinkel med *fortegn*, man får ved at bevæge sig fra vektor $\vec{a}$ til vektor $\vec{b}$.[1]

Vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ betegnes også med $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Forskellen på de to vinkler kan ses på figur 1.11.

[1]Positiv omløbsretning er *mod uret*, så hvis man bevæger sig med uret, er vinklen negativ.

Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er altså en vinkel mellem 0° og 180°, mens vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ er en vinkel mellem −180° og 180°.

I næste kapitel bliver sammenhængen mellem koordinater og vinkler gennemgået i større detalje.

## 1.3 Øvelser

**Øvelse 1.1**
Bestem den modsatte vektor til de følgende vektorer:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

**Øvelse 1.2**
Bestem længden af vektorerne i øvelse 1.1.

**Øvelse 1.3**
Punkterne $A$, $B$, $C$ og $D$ er givet ved koordinaterne $A(2;1)$, $B(3;5)$, $C(-4;0)$ og $D(2;9)$ . Bestem koordinaterne til de følgende vektorer:

a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{DC}$ d) $\overrightarrow{AD}$

e) $\overrightarrow{CA}$ f) $\overrightarrow{BD}$

**Øvelse 1.4**
Der er givet de tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Beregn vektorerne

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $2 \cdot \vec{a}$

c) $\vec{b} - \vec{c}$ d) $\vec{c} + 3 \cdot \vec{a}$

e) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ f) $4 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{c} - 5 \cdot \vec{b}$

**Øvelse 1.5**
Reducér så meget som muligt:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{DA}$

c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$

# Vinkler i planen

# 2

I dette kapitel gennemgås sammenhængen mellem vektorkoordinater og vinkler. For at kunne beskrive sammenhængen er det praktisk først at introducere såkaldte *enhedsvektorer*.

## 2.1 Enhedsvektorer

Hvis man skal undersøge vinkler i planen, ser man kun på retningen af vektorerne. Man kan derfor i første omgang nøjes med at se på *enhedsvektorer*, dvs. vektorer med længde 1:

**Definition 2.1**

En *enhedsvektor* er en vektor $\vec{e}$ med længden 1.

Hvis $\vec{a}$ er en vektor, er vektoren $\vec{e}_{\vec{a}}$ en enhedsvektor i samme retning som $\vec{a}$, dvs.

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\,.$$

I de sædvanlige koordinatsystem i planen er to retninger specielle, nemlig de retninger, der er givet ved $x$- og $y$-aksen. Man definerer derfor to specielle enhedsvektorer, der hører til disse retninger:

**Definition 2.2**

I det sædvanlige koordinatsystem i planen er $\vec{e}_x$ en enhedsvektor i $x$-aksens retning, og $\vec{e}_y$ en enhedsvektor i $y$-aksens retning, dvs.

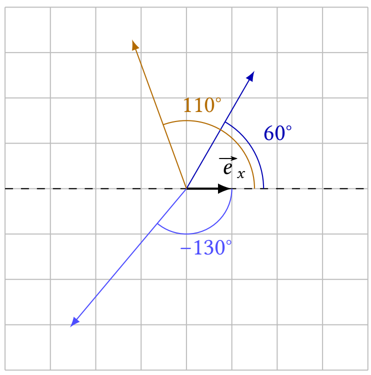
$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,.$$

Da alle enhedsvektorer har den samme længde, er den eneste forskel på dem, hvilken retning de peger i. Denne retning kan beskrives vha. en vinkel. Man kan derfor definere en vektors *retningsvinkel* på følgende måde:

**Definition 2.3**

Retningsvinklen for vektoren $\vec{a}$ er vinklen fra $\vec{e}_x$ til $\vec{a}$.

På figur 2.1 ses 3 forskellige vektorer og deres retningsvinkler. Husk, at vinkler mod uret regnes positive, og vinkler med uret regnes negative.




**Figur 2.1:** Vektoren $\vec{e}_x$ og retningsvinklerne for forskellige vektorer.

## 2.2 Cosinus, sinus og tangens

Enhedsvektorer kan sammen med retningsvinkler bruges til at definere de såkaldte *trigonometriske* funktioner *cosinus* og *sinus*. De to funktioner omregner en retningsvinkel til $x$- og $y$-koordinaterne for den tilsvarende enhedsvektor.

**Definition 2.4**

Lad enhedsvektoren $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$ have retningsvinklen $v$. Så defineres de tre trigonometriske funktioner cos, sin og tan som

1. $\cos(v) = e_x$ ,
2. $\sin(v) = e_y$ , og
3. $\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$ .

Bemærk, at $\tan(v)$ er udefineret, når $\cos(v) = 0$, dvs. hvis $v = \pm 90°$.

De tre funktioner er indbygget i de fleste lommeregnere og alle CAS-værktøjer.

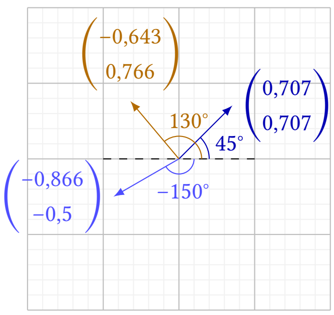
Bemærk, at da $\cos(v)$ og $\sin(v)$ er hhv. $x$- og $y$-koordinater til en enhedsvektor, så vil $\cos(v)$ og $\sin(v)$ kun kunne give værdier mellem $-1$ og $1$, altså

$$-1 \le \cos(v) \le 1 \qquad \text{og} \qquad -1 \le \sin(v) \le 1 \ .$$

**Eksempel 2.5** Den enhedsvektor $\vec{e}_{130°}$, der har retningsvinklen $v = 130°$ har koordinaterne

$$\vec{e}_{130°} = \begin{pmatrix} \cos(130°) \\ \sin(130°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}643 \\ 0{,}766 \end{pmatrix} .$$

Denne vektor og to andre enhedsvektorer kan ses på figur 2.2.




**Figur 2.2:** Nogle enhedsvektorer og deres koordinater.

Ved at analysere symmetri i planen, kan man bevise følgende sætning:

**Sætning 2.6**

Der gælder

1. $\cos(-v) = \cos(v)$
2. $\sin(-v) = -\sin(v)$
3. $\cos(180° - v) = -\cos(v)$
4. $\sin(180° - v) = \sin(v)$
5. $\cos(90° - v) = \sin(v)$
6. $\sin(90° - v) = \cos(v)$

Idet længden af en enhedsvektor er 1, kan man også udlede følgende sætning:

**Sætning 2.7: Grundrelationen mellem cosinus og sinus**

Der gælder

$$\cos(v)^2 + \sin(v)^2 = 1 \ .$$

Enhver vektor kan beskrives vha. dens længde og dens retningsvinkel, og de to funktioner cos og sin kan bruges til at omregne dette til koordinater.

**Eksempel 2.8** Vektoren $\vec{a}$ har længden $|\vec{a}| = 4$ og retningsvinkel $v = 35°$. Vektorens koordinater kan da findes vha. følgende beregning:[1]

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{e}_{\vec{a}} = 4 \cdot \begin{pmatrix} \cos(35°) \\ \sin(35°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0{,}819 \\ 4 \cdot 0{,}574 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}28 \\ 2{,}29 \end{pmatrix} .$$

[1]Husk, at $\vec{e}_{\vec{a}}$ er en enhedsvektor i $\vec{a}$'s retning (se definition 2.4).

## 2.3 Inverse trigonometriske funktioner

I eksempel 2.8 blev en vektors koordinater beregnet ud fra retningsvinklen og længden. Det ville være praktisk, hvis man også kunne regne den anden vej – altså finde længden og retningsvinklen ud fra koordinaterne.

Længden af en vektor kan beregnes vha. formlen i sætning 1.4, men hvad med vinklen? Hvis man har en enhedsvektor $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$, gælder der at,

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} ,$$

dvs.

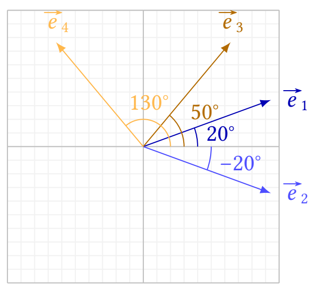
$$\cos(v) = e_x \qquad \text{og} \qquad \sin(v) = e_y ,$$

For at finde retningsvinklen $v$ har man altså brug for at kunne løse sådanne ligninger. Dvs. man har brug for funktioner, der virker modsat cos og sin.

At det ikke er helt trivielt at konstruere disse funktioner ses af følgende eksempel:

**Eksempel 2.9** Lad $\vec{e}_1$ være enhedsvektoren med retningsvinkel 20°, og $\vec{e}_2$ være enhedsvektoren med retningsvinkel −20°. Da har de to vektorer koordinaterne

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos(20°) \\ \sin(20°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}940 \\ 0{,}342 \end{pmatrix}$$
$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos(-20°) \\ \sin(-20°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}940 \\ -0{,}342 \end{pmatrix} .$$




**Figur 2.3:** Enhedsvektorer med samme $x$- eller $y$-koordinat.

De to vektorer $\vec{e}_1$ og $\vec{e}_2$ har altså forskellige retningsvinkler, men samme $x$-koordinat.

Hvis $\vec{e}_3$ og $\vec{e}_4$ er enhedsvektorerne med retningsvinklerne 50° og 130° er deres koordinater

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \cos(50°) \\ \sin(50°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}643 \\ 0{,}766 \end{pmatrix}$$
$$\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} \cos(130°) \\ \sin(130°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}643 \\ 0{,}766 \end{pmatrix} .$$

Her er der altså tale om enhedsvektorer med forskellige retningsvinkler, men samme $y$-koordinat.

De fire vektorer kan ses på figur 2.3.

De såkaldte *inverse* trigonometriske funktioner kan derfor kun give én af to mulige retningsvinkler, hvis man kender enten $x$- eller $y$-koordinaten. Funktionerne defineres på følgende måde:[2]

[2]De to funktioner kaldes undertiden også arccos og arcsin. »arc« står for *arcus*, som betyder »bue« på latin. arcsin er altså den bue (vinkel), hvis sinus har en bestemt værdi.

I computerprogrammer/CAS-værktøjer kaldes de to funktioner i øvrigt ofte asin og acos.

**Definition 2.10**

Funktionen $\cos^{-1}$ kaldes *invers cosinus*. $\cos^{-1}(t)$ er den vinkel $v$ i intervallet mellem $0°$ og $180°$, der løser ligningen $\cos(v) = t$ .

Funktionen $\sin^{-1}$ kaldes *invers sinus*. $\sin^{-1}(t)$ er den vinkel $v$ i intervallet mellem $-90°$ og $90°$, der løser ligningen $\sin(v) = t$ .

**Eksempel 2.11** Hvis man vil løse ligningen

$$\cos(v) = 0{,}5 \ ,$$

beregner man vha. en lommeregner, at

$$v = \cos^{-1}(0{,}5) = 60° \ .$$

$v = 60°$ er altså en løsning til ligningen.

Hvis man løser en ligning med cosinus eller sinus på denne måde, skal man være opmærksom på, at man ikke finder alle løsninger.

Af eksempel 2.9 følger, at $-60°$ faktisk også er en løsning til ligningen $\cos(v) = 0{,}5$, dvs. i virkeligheden burde ligningen være løst på denne måde:

$$\cos(v) = 0{,}5 \quad\Longleftrightarrow\quad v = \pm\cos^{-1}(0{,}5) \quad\Longleftrightarrow\quad v = \pm 60° \ .$$

(Her angiver tegnet $\pm$, at der er to løsninger: én med $+$ og én med $-$.)

Nu er det muligt at udlede en formel til at finde retningsvinklen for en vektor ud fra koordinaterne:

**Sætning 2.12**

Lad vektoren $\vec{a}$ være givet ved koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \ .$$

Vektorens retningsvinkel er da

$$v = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}\right) & \text{hvis } a_y \geq 0 \\ -\cos^{-1}\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}\right) & \text{hvis } a_y < 0 \end{cases} \ .$$

**Bevis**
Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, vil en enhedsvektor i $\vec{a}$'s retning være givet ved

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_x}{|\vec{a}|} \\ \frac{a_y}{|\vec{a}|} \end{pmatrix} .$$

Enhedsvektoren har også koordinaterne $\vec{e}_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$, hvor $v$ er retningsvinklen for $\vec{a}$. Dvs.

$$\cos(v) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \qquad \Longleftrightarrow \qquad v = \pm\cos^{-1}\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}\right) .$$

Hvis vektoren $\vec{a}$ har en positiv $y$-koordinat ($a_y \geq 0$), så vil retningsvinklen være positiv, dvs. løsningen med + er den korrekte. Den anden løsning er korrekt, hvis $a_y < 0$. Hermed er sætningen bevist. ■

**Eksempel 2.13** I dette eksempel bestemmes længden og retningsvinklen for de to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} .$$

Længden af vektor $\vec{a}$ er

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 ,$$

og retningsvinklen er

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 53{,}13^\circ .$$

Længden af vektor $\vec{b}$ er

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + (-7)^2} = \sqrt{53} = 7{,}28 ,$$

og retningsvinklen er

$$w = -\cos^{-1}\left(\frac{2}{7{,}28}\right) = -74{,}05^\circ .$$

Bemærk, at retningsvinklen for $\vec{b}$ er negativ, fordi vektor $\vec{b}$ har en negativ andenkoordinat.

## 2.4 Øvelser

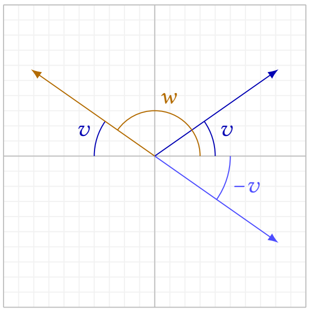
**Øvelse 2.1**
Bestem koordinaterne til enhedsvektorerne med retningsvinkel

a) $15°$ b) $60°$

c) $-30°$ d) $145°$

og tegn vektorerne i et koordinatsystem.

**Øvelse 2.2**
Billedet herunder viser 3 enhedsvektorer med retningsvinklerne $v$, $-v$ og $w = 180° - v$.




a) Brug billedet til at argumentere for sætning 2.6.

**Øvelse 2.3**
Bestem koordinaterne til vektoren $\vec{a}$ med retningsvinkel $v$, når

a) $|\vec{a}| = 4$ og $v = 36°$

b) $|\vec{a}| = 5{,}3$ og $v = 100°$

c) $|\vec{a}| = 12$ og $v = -120°$

**Øvelse 2.4**
Der er givet de tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tegn de følgende vektorer i et koordinatsystem, og beregn derefter deres længde og retningsvinkel.

a) $\vec{a}$ b) $\vec{b}$

c) $\vec{c}$ d) $\vec{a} + \vec{b}$

e) $\vec{b} - \vec{c}$ f) $2 \cdot \vec{a} - 5 \cdot \vec{b}$

g) $\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$

# 3 Skalarprodukt og determinant

Indtil videre er der kun set på addition og subtraktion, når man regner med vektorer. Der findes dog også andre regneoperationer, nemlig skalarproduktet og determinanten, som gennemgås i dette kapitel.

## 3.1 Skalarprodukt

Det er ikke muligt at gange to vektorer med hinanden og få en ny vektor; men der findes en form for multiplikation, som kaldes *skalarproduktet*,[1] hvor resultatet er en skalar, dvs. et tal.

[1] Det kaldes også somme tider »prikproduktet«, fordi symbolet er en prik.

**Definition 3.1: Skalarprodukt**

Hvis de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} ,$$

så er *skalarproduktet* af de to vektorer tallet

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y \ .$$

**Eksempel 3.2** Hvis

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} ,$$

så er

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 3 \cdot 8 + 2 \cdot (-5) = 24 + (-10) = 14 \ .$$

Bemærk i øvrigt, at når man regner med almindelige variable, er det normalt at udelade gangetegnet og skrive f.eks. $ab$ i stedet for $a \cdot b$; men for vektorer *skal* man *altid* skrive symbolet.

Der gælder følgende regneregler for skalarproduktet:

**Sætning 3.3**

Hvis $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er vektorer, gælder der

1. $\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2$ . (længde og skalarprodukt)
2. $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ . (den *kommutative* lov)
3. $\vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$ . (den *distributive* lov)
4. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$ .
5. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2 \cdot \vec{a} \bullet \vec{b}$ .
6. $\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2 \cdot \vec{a} \bullet \vec{b}$ .
7. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2$ .

**Bevis**

Alle regnereglerne kan bevises ved regning med koordinater. Her bevises 1, 3 og 5; resten overlades til læseren.

Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, så er

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = a_x a_x + a_y a_y = a_x^2 + a_y^2 = \left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\right)^2 = |\vec{a}|^2 \ .$$

Hermed er 1 bevist.

Hvis de tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ har koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} ,$$

så er

$$\begin{aligned} \vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x + c_x \\ b_y + c_y \end{pmatrix} \\ &= a_x(b_x + c_x) + a_y(b_y + c_y) \\ &= a_x b_x + a_x c_x + a_y b_y + a_y c_y \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_x c_x + a_y c_y \\ &= \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c} , \end{aligned}$$

hvilket beviser 3.

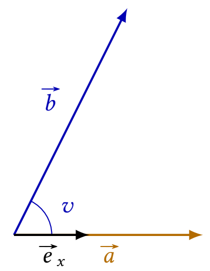
For de to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ gælder

$$\begin{aligned} \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} + \vec{b}\right) &= \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix} \\ &= (a_x + b_x)(a_x + b_x) + (a_y + b_y)(a_y + b_y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_x^2 + b_x^2 + 2a_x b_x + a_y^2 + b_y^2 + 2a_y b_y \\
&= (a_x^2 + a_y^2) + (b_x^2 + b_y^2) + 2(a_x b_x + a_y b_y) \\
&= |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2 \cdot \vec{a} \bullet \vec{b} \ ,
\end{aligned}
$$

hvorved også 5 er bevist. ■

Skalarproduktet viser sig at være en praktisk størrelse, fordi det kan fortælle noget om, hvordan vektorer ligger i forhold til hinanden. På figur 3.1 ses to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, hvor $\vec{a}$ er parallel med $\vec{e}_x$, og vektoren $\vec{b}$ har retningsvinklen $v$. Man kan derfor skrive de to vektorers koordinater som




**Figur 3.1:** Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

$$
\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v) \\ \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(v) \end{pmatrix} .
$$

Skalarproduktet mellem disse to vektorer bliver så

$$
\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v) + 0 \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(v) = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos(v) \ ,
$$

hvor $v$ er vinklen mellem vektorerne.

Det viser sig, at denne formel gælder generelt, og ikke kun, hvis vektorerne er placeret som på figur 3.1. Man har altså følgende sætning:

**Sætning 3.4**

Hvis $v = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, så er

$$
\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos(v) \ .
$$

Hvis man skriver lidt om på formlen i denne sætning, får man

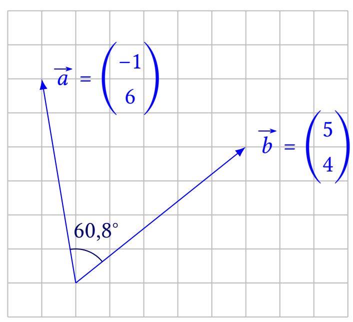
$$
\cos(v) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \left|\vec{b}\right|} \ ,
$$

som kan bruges direkte til at bestemme vinklen mellem to vektorer.

Det er i øvrigt her værd at bemærke, at sætning 3.4 også gælder, hvis man indsætter vinklen med fortegn, idet $\cos(-v) = \cos(v)$.

**Eksempel 3.5** Her beregnes vinklen mellem de to vektorer

$$
\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} .
$$




**Figur 3.2:** Vinklen mellem vektor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 60,8°.

Først beregnes de to vektorers længder:

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{(-1)^2 + 6^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37} \\
\left|\vec{b}\right| &= \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} \ .
\end{aligned}
$$

Disse kan nu indsættes i formlen

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{37}\sqrt{41}} = \frac{-1 \cdot 5 + 6 \cdot 4}{\sqrt{37 \cdot 41}} = \frac{19}{\sqrt{1517}} ,$$

og man finder vinklen $v$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{19}{\sqrt{1517}}\right) = 60{,}8^\circ .$$

Altså er vinklen mellem de to vektorer $60{,}8^\circ$ (se figur 3.2).

Vinklen mellem to vektorer ligger mellem $0^\circ$ og $180^\circ$. Hvis der for en vinkel $v$ gælder, at $0^\circ \le v < 90^\circ$, er $\cos(v) > 0$. Hvis $90^\circ < v \le 180^\circ$, er $\cos(v) < 0$. Specielt for $v = 90^\circ$ gælder $\cos(v) = 0$. Sætning 3.4 fører derfor til følgende:

**Sætning 3.6**

Lad $v$ være vinklen mellem de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Der gælder da

1. Hvis $\vec{a} \bullet \vec{b} > 0$, så er $0^\circ \le v < 90^\circ$.
2. Hvis $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$, så er $v = 90^\circ$, dvs. $\vec{a} \perp \vec{b}$.
3. Hvis $\vec{a} \bullet \vec{b} < 0$, så er $90^\circ < v \le 180^\circ$.

Denne sætning giver en nem test for, om to vektorer er ortogonale. Man skal blot beregne deres skalarprodukt. Hvis det giver 0, så er vektorerne ortogonale. Ellers er de ikke.

**Eksempel 3.7** For de to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ er

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) = 0 .$$

Da $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ er disse to vektorer ortogonale.

**Eksempel 3.8** Der er givet to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} ,$$

hvor $t$ er et tal. Hvis de to vektorer er ortogonale, hvad er så tallet $t$?

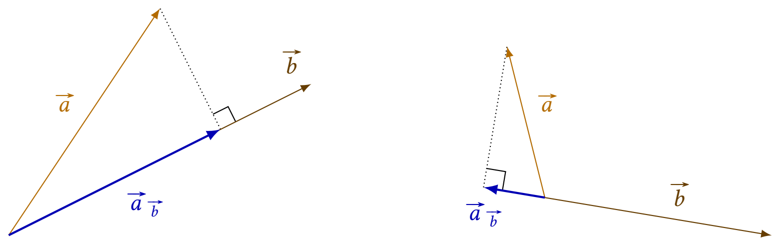
Her beregnes først

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + t \cdot 4 = 6 + 4t .$$

Idet de to vektorer er ortogonale, er $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$, dvs.

$$6 + 4t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4t = -6 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} .$$

Hvis de to vektorer er ortogonale, har man altså, at $t = -\frac{3}{2}$.




(a) Spids vinkel. (b) Stump vinkel.

**Figur 3.3:** Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$, når vinklen mellem de to vektorer er hhv. spids og stump.

## 3.2 Vektorprojektion

At *projicere* vektor $\vec{a}$ på $\vec{b}$ gøres ved at nedfælde vektor $\vec{a}$ vinkelret på vektor $\vec{b}$. Det illustreres lettest ved at lade de to vektorer have samme begyndelsespunkt. På figur 3.3 ses, hvordan vektor $\vec{a}_{\vec{b}}$, der er projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$, ligger, når vinklen mellem de to vektorer er spids, og når den er stump.

Som man kan se på figuren er $\vec{a}_{\vec{b}} \parallel \vec{b}$, og de to vektorer er ensrettede, hvis vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er spids, og modsat rettede, hvis den er stump. Koordinaterne til $\vec{a}_{\vec{b}}$ kan bestemmes vha. følgende sætning:

**Sætning 3.9**

For projektionen $\vec{a}_{\vec{b}}$ af vektor $\vec{a}$ på $\vec{b}$, gælder at

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b} \,,$$

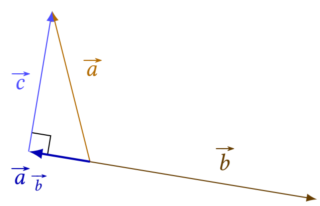
og

$$\left|\vec{a}_{\vec{b}}\right| = \frac{\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|} \,.$$

**Bevis**

På figur 3.4 ses det stumpvinklede tilfælde. Der er tillige indtegnet en vektor $\vec{c}$, som opfylder

$$\vec{a}_{\vec{b}} + \vec{c} = \vec{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{c} = \vec{a} - \vec{a}_{\vec{b}} \,.$$




**Figur 3.4:** Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$, når vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er stump.

Idet $\vec{a}_{\vec{b}} \parallel \vec{b}$, findes der et tal $t$, så

$$\vec{a}_{\vec{b}} = t\,\vec{b} \,,$$

dvs.

$$\vec{c} = \vec{a} - t\,\vec{b} \,.$$

Tager man skalarproduktet med $\vec{b}$ på begge sider af denne ligning, får man

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = (\vec{a} - t\,\vec{b}) \cdot \vec{b} \,.$$

Men $\vec{c} \bullet \vec{b} = 0$, da disse to vektorer står vinkelret på hinanden, så ligningen kan omskrives til

$$
\begin{aligned}
0 &= (\vec{a} - t\,\vec{b}) \bullet \vec{b} && \Leftrightarrow \\
0 &= \vec{a} \bullet \vec{b} - t\,\vec{b} \bullet \vec{b} && \Leftrightarrow \\
0 &= \vec{a} \bullet \vec{b} - t\left|\vec{b}\right|^2 && \Leftrightarrow \\
t &= \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} .
\end{aligned}
$$

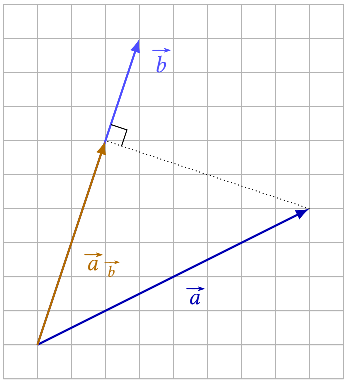
Da $\vec{a}_{\vec{b}} = t\,\vec{b}$, får man altså

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b} .$$

Den anden del af sætningen omhandler længden af projektionsvektoren. Men da man kender en formel for vektoren, tager man blot længden af denne og får

$$\left|\vec{a}_{\vec{b}}\right| = \left|\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b}\right| = \frac{\left|\vec{a} \bullet \vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|^2} \left|\vec{b}\right| = \frac{\left|\vec{a} \bullet \vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|} ,$$

og sætningen er dermed vist. ■




**Figur 3.5:** Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

**Eksempel 3.10** Hvis

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} ,$$

så er $\vec{a}$'s projektion på $\vec{b}$

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + 9^2}^2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{8 \cdot 3 + 4 \cdot 9}{9 + 81} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{60}{90} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Vektorerne kan ses på figur 3.5.

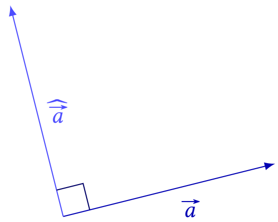
## 3.3 Determinant

Vha. skalarproduktet kan man afgøre, om to vektorer er ortogonale. Der findes en anden størrelse, *determinanten*, som kan bruges til at afgøre om vektorer er parallelle. Før determinanten kan defineres, skal man dog lige have defineret følgende:

**Definition 3.11**

For en vektor $\vec{a}$ defineres *tværvektoren* $\hat{\vec{a}}$ som den vektor, man får ved at dreje $\vec{a}$ 90° i positiv omløbsretning (dvs. mod uret).

Et eksempel på en tværvektor kan ses på figur 3.6.




**Figur 3.6:** Tværvektoren $\widehat{\vec{a}}$ til $\vec{a}$.

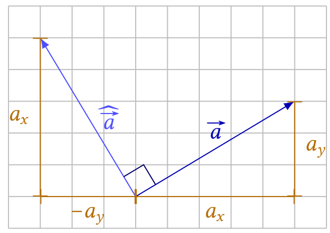
En tværvektors koordinater er givet ud fra den oprindelige vektors koordinater:

**Sætning 3.12**

Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, så er $\widehat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ .

**Bevis (skitse)**
På figur 3.7 er de to vektorer $\vec{a}$ og $\widehat{\vec{a}}$ indtegnet i et koordinatsystem. Som det ses af figuren er

$$\widehat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} . \qquad \blacksquare$$




**Figur 3.7:** Koordinaterne til $\widehat{\vec{a}}$ kan findes ud fra koordinaterne til $\vec{a}$.

For tværvektorer gælder følgende sætning, som kan bevises ved regning med koordinater:

**Sætning 3.13**

For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder

1. $\widehat{\widehat{\vec{a}}} = -\vec{a}$ , og
2. $\widehat{\vec{a} + \vec{b}} = \widehat{\vec{a}} + \widehat{\vec{b}}$ .

Determinanten af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er defineret ud fra tværvektoren til $\vec{a}$ og skalarproduktet. Man har følgende:

**Definition 3.14**

For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ definerer man *determinanten*,

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \widehat{\vec{a}} \cdot \vec{b} .$$

Hvis de to vektorer har koordinaterne $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ skriver man også

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x .$$

Notationen $\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$ er opfundet for gøre beregningen af determinanten mere overskuelig. Den skal forstås på den måde, at man først beregner produktet af diagonalen fra øverste venstre hjørne til nederste højre, og derefter fratrækker produktet af diagonalen fra nederste venstre hjørne til øverste højre:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x \ .$$

**Eksempel 3.15** Determinanten af de to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-4) = 3 - (-8) = 11 \ .$$

Når man tager determinanten af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er rækkefølgen ikke ligegyldig. Følgende sætning angiver en række regneregler for determinanten:

**Sætning 3.16**

For vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ gælder der

1. $\det\left(\vec{b}, \vec{a}\right) = -\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ ,
2. $\det\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) = \det\left(\vec{a}, \vec{c}\right) + \det\left(\vec{b}, \vec{c}\right)$ ,
3. $\det\left(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right) = \det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \det\left(\vec{a}, \vec{c}\right)$ .

**Bevis**
Den første del kan bevises ved regning med koordinater. Hvis

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} ,$$

så er

$$\begin{aligned} \det\left(\vec{b}, \vec{a}\right) &= \begin{vmatrix} b_x & a_x \\ b_y & a_y \end{vmatrix} = b_x a_y - b_y a_x \\ &= a_y b_x - a_x b_y = -(a_x b_y - a_y b_x) = -\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \ . \end{aligned}$$

For $\det\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right)$ gælder der ifølge sætning 3.3 og 3.13 samt definition 3.14, at

$$\begin{aligned} \det\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) &= \widehat{(\vec{a} + \vec{b})} \bullet \vec{c} \\ &= \left(\widehat{\vec{a}} + \widehat{\vec{b}}\right) \bullet \vec{c} = \widehat{\vec{a}} \bullet \vec{c} + \widehat{\vec{b}} \bullet \vec{c} \\ &= \det\left(\vec{a}, \vec{c}\right) + \det\left(\vec{b}, \vec{c}\right) \ . \end{aligned}$$

Den sidste del af beviset overlades som en øvelse til læseren. ∎

Hvis $\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$ er $\hat{\vec{a}} \bullet \vec{b} = 0$. Ifølge sætning 3.6 betyder det, at $\hat{\vec{a}}$ og $\vec{b}$ er ortogonale. Hvis $\hat{\vec{a}}$ og $\vec{b}$ er ortogonale, må $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være parallelle. Der gælder derfor følgende sætning:

**Sætning 3.17**

For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder der

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}\ .$$

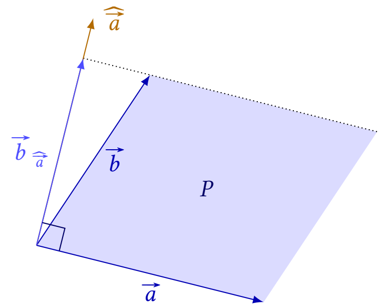
Man kan altså ved at beregne determinanten afgøre, om to vektorer er parallelle.

Det viser sig, at determinanten har en geometrisk fortolkning. Størrelsen af determinanten er nemlig lig arealet af det parallelogram, der udspændes af de to vektorer. Der gælder altså:

**Sætning 3.18**

Det parallelogram, der udspændes af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har arealet

$$P = \left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right|\ .$$




**Figur 3.8:** Parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

**Bevis**
På figur 3.8 ses parallelogrammet udspændt af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Parallelogrammets grundlinje udgøres af vektor $\vec{a}$, dvs. dens længde er $|\vec{a}|$.

På figuren er også indtegnet $\hat{\vec{a}}$ samt projektionen $\vec{b}_{\hat{\vec{a}}}$ af $\vec{b}$ på denne vektor. Vektoren $\vec{b}_{\hat{\vec{a}}}$ står vinkelret på $\vec{a}$, og dens længde svarer til afstanden mellem to parallelle sider i parallelogrammet. Arealet $P$ må derfor have størrelsen

$$P = \left|\vec{b}_{\hat{\vec{a}}}\right| |\vec{a}|\ .$$

Vha. sætning 3.9 kan dette omskrives til

$$P = \frac{\left|\vec{b} \cdot \hat{\vec{a}}\right|}{\left|\hat{\vec{a}}\right|} |\vec{a}|\ .$$

Men da $\left|\hat{\vec{a}}\right| = |\vec{a}|$ er dette det samme som

$$P = \frac{\left|\vec{b} \cdot \hat{\vec{a}}\right|}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = \left|b \cdot \hat{\vec{a}}\right| = \left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right|\ . \qquad \blacksquare$$

**Eksempel 3.19** Her beregnes arealet af parallelogrammet udspændt af vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ifølge sætning 3.18 er arealet

$$\left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{matrix}\right\| = |3 \cdot 1 - 2 \cdot 5| = |-7| = 7 \ .$$

Arealet af parallelogrammet er altså 7.

**Eksempel 3.20** De to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \ ,$$

udspænder et parallelogram med areal 10. Hvad er tallet $t$?

Anvender man sætning 3.18 kan man opstille et udtryk for arealet:

$$\left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} 2 & 1 \\ t & 4 \end{matrix}\right\| = |2 \cdot 4 - t \cdot 1| = |8 - t| \ .$$

Da man ved, at arealet er 10, får man derfor ligningen

$$|8 - t| = 10 \ .$$

Idet der er tale om en ligning med numerisk værdi, er der i virkeligheden to ligninger. Hvis $8 - t$ giver 10, er ligningen opfyldt; men det er den også, hvis $8 - t$ giver $-10$, dvs.

$$\begin{aligned} 8 - t = 10 \quad &\lor \quad 8 - t = -10 \qquad \Leftrightarrow \\ t = -2 \quad &\lor \quad t = 18 \ . \end{aligned}$$

Altså er arealet af parallelogrammet 10, hvis $t = -2$ eller $t = 18$.

Ind til videre er det kun den numeriske værdi af determinanten, der har fået en geometrisk fortolkning. Det viser sig dog, at man kan angive en formel, der knytter værdien af determinanten (med fortegn) til geometrien af vektorerne.

**Sætning 3.21**

Hvis der er givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og $v$ er vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$, så er

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin(v) \ .$$

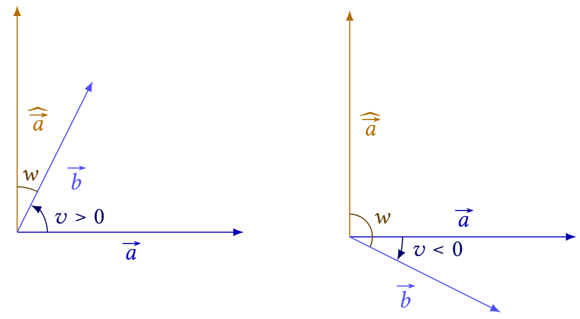
**Bevis**
Hvis $v$ er vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$, så kan vinklen $w$ mellem $\widehat{\vec{a}}$ og $\vec{b}$ beregnes som

$$w = 90^\circ - v \ .$$

Sammenhængen mellem $v$ og $w$ kan findes ved at analysere placeringen af $\vec{a}$, $\widehat{\vec{a}}$ og $\vec{b}$, se figur 3.9.

Iflg. sætning 2.6 er så

$$\cos(w) = \cos(90^\circ - v) = \sin(v) \ .$$




(a) $w = 90^\circ - v$ (b) $w = 90^\circ - v$

**Figur 3.9:** Placeringen af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i forhold til hinanden, afgør hvordan man skal beregne $w$, som er vinklen mellem $\widehat{\vec{a}}$ og $\vec{b}$ – men i alle tilfælde finder man $w = v - 90^\circ$.

Det betyder, at[2]

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{\vec{a}} \cdot \vec{b} = \left|\widehat{\vec{a}}\right| \left|\vec{b}\right| \cos(w) = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin(v) \,.$$

Hermed er sætningen bevist. ∎

[2] I beregningen udnyttes, at $\left|\widehat{\vec{a}}\right| = |\vec{a}|$, da en tværvektor har samme længde som den oprindelige vektor.

## 3.4 Øvelser

**Øvelse 3.1**
Beregn

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

**Øvelse 3.2**
Der er givet de tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestem vinklen mellem vektorerne

a) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ b) $\vec{a}$ og $\vec{c}$

c) $\vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{c}$ d) $\vec{b} - \vec{c}$ og $\vec{a} + \vec{b}$

e) $\vec{a}$ og $\vec{b} - \vec{a}$ f) $\vec{c}$ og $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

**Øvelse 3.3**
Afgør om de følgende vektorer er ortogonale.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

**Øvelse 3.4**
Der er givet de tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestem tallet $t$, så

a) $\vec{a}$ og $\vec{c}$ er ortogonale

b) $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er ortogonale

c) $\vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{c}$ er ortogonale

d) $\vec{c}$ og $\vec{a} - \vec{c}$ er ortogonale

**Øvelse 3.5**
To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestem

a) $\vec{a}_{\vec{b}}$ b) $\vec{b}_{\vec{a}}$ c) $\vec{a}_{\vec{a}+\vec{b}}$

**Øvelse 3.6**
Der er givet de tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem længden af $\vec{a}$'s projektion på $\vec{b}$.

b) Bestem $t$, så $\vec{c}_{\vec{a}} = \vec{a}$.

c) Bestem $t$, så længden af $\vec{c}$'s projektion på $\vec{b}$ er 2.

**Øvelse 3.7**
Bestem tværvektoren til $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, og tegn $\vec{a}$ og $\hat{\vec{a}}$ i et koordinatsystem.

**Øvelse 3.8**
Beregn følgende determinanter:

a) $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 5 & -9 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$

**Øvelse 3.9**
Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestem $t$, så

a) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle

b) $\vec{a} + \vec{b}$ og $\hat{\vec{b}}$ er parallelle

**Øvelse 3.10**
De tre punkter $P$,$Q$ og $R$ er givet ved koordinaterne

$$P(3;2)\,, \quad Q(8,-1) \quad \text{og} \quad R(4;0)\,.$$

Bestem arealet af det parallelogram, der er udspændt af vektorerne

a) $\overrightarrow{PQ}$ og $\overrightarrow{PR}$

b) $\overrightarrow{PR}$ og $\widehat{\overrightarrow{QR}}$

c) $2 \cdot \overrightarrow{PR}$ og $\widehat{\overrightarrow{RQ}}$

d) $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QP}$ og $3 \cdot \overrightarrow{PQ}$

# 4 Trekanter

En trekant kan beskrives ud fra de tre punkter, der udgør hjørnerne i trekanten. Trekanten $ABC$ er således den trekant, der har hjørner i de tre punkter $A$, $B$ og $C$. Den side i trekanten, der går fra punkt $A$ til $B$, kan så kaldes $AB$. Længden af siden $AB$ betegnes med $|AB|$.

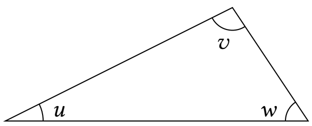
Det er her værd at bemærke, at $|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, altså at længden af siden $AB$ er det samme som længden af vektoren fra $A$ til $B$. Hvis man kender koordinaterne for de tre punkter $A$, $B$ og $C$, kan man altså beregne sidernes længder.

I en trekant er der tre vinkler. Størrelsen af disse kan også beregnes ud fra vektorer. Først vil vi dog se på nogle – forhåbentligt velkendte – egenskaber ved trekanter.

**Sætning 4.1**

Summen af vinklerne i en trekant er 180°:

$$u + v + w = 180^\circ\ .$$




Fra hvert hjørne i en trekant kan man tegne følgende tre linjer:

**Medianen** som er en linje fra en vinkelspids til *midten* af den modstående side.

**Vinkelhalveringslinjen** som går fra en vinkelspids til den modstående side, sådan at den *halverer vinklen*.

**Højden** der går fra en vinkelspids *vinkelret* på den modstående side. Hvis trekanten er stumpvinklet,[1] kan højden ligge uden for trekanten.

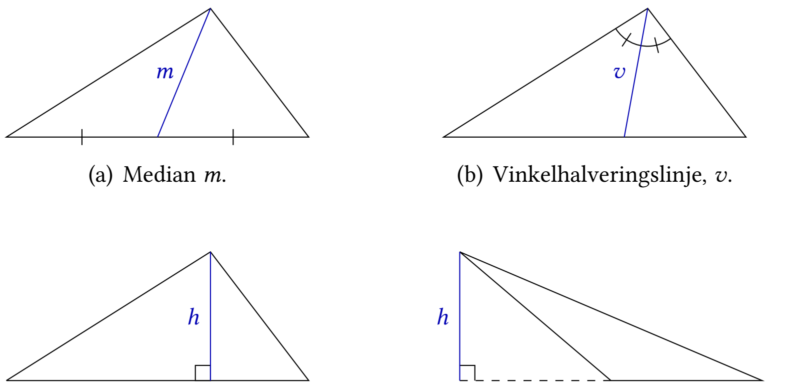
[1] En trekant kaldes *stumpvinklet*, hvis en af vinklerne er stump, dvs. større end 90°.

Disse tre typer af linjer er illustreret på figur 4.1.

En højde står som sagt vinkelret på den modstående side. Den side, som højden står vinkelret på, kalder man *grundlinjen*,[2] og den kan bruges sammen med højden til at beregne en trekants areal.

[2] Da en trekant har tre højder, så er der derfor heller ikke én grundlinje. Hvilken side, man vælger at kalde grundlinje, afhænger af, hvilken højde man vælger at se på.

Der gælder følgende meget kendte sætning om sammenhængen mellem en trekants areal, dens højde og grundlinje:




(a) Median $m$. (b) Vinkelhalveringslinje, $v$.

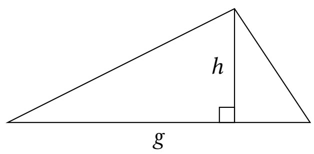
(c) Højde, $h$. (d) Højde, der falder uden for trekanten.

**Figur 4.1:** Hvert hjørne i en trekant har tilknyttet en median, en vinkelhalveringslinje og en højde. Bemærk, at en højde kan ligge uden for trekanten.

**Sætning 4.2**

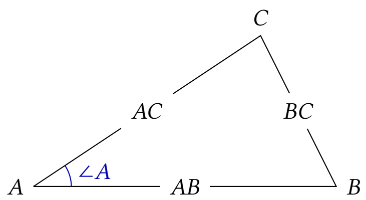
Arealet $T$ af en trekant er det halve af en af højderne ganget med den længden af den tilhørende grundlinje:

$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g \ .$$




## 4.1 Notation

Når man skal tale om siderne og vinklerne i en trekant, er det vigtigt, at man har en notation, som entydigt forklarer, hvad man taler om.



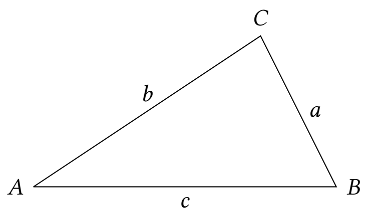

**Figur 4.2:** Sider og vinkler i $\triangle ABC$.

Man følger den konvention, der er illustreret på figur 4.2: Den vinkel, der ligger ved punktet $A$ kaldes $\angle A$ osv., og siderne benævnes ved de punkter, de går mellem.

Nogle gange benævner man også sidernes længder ud fra det punkt, de ligger *overfor*. Længden af siden over for punkt $A$ benævnes så med $a$ osv., sådan at

$$a = |BC| \ , \quad b = |AC| \ , \quad c = |AB| \ .$$

Dette ses på figur 4.3.

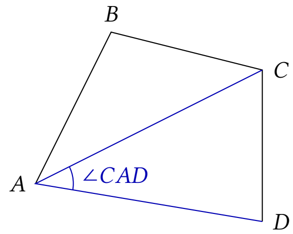



**Figur 4.3:** $\triangle ABC$, hvor siderne benævnes $a$, $b$ og $c$.

Notationen, hvor man bruger små bogstaver som navne til sidelængderne, duer i princippet kun, hvis man har én trekant at kigge på. Hvis man har en mere kompliceret figur med flere punkter end tre, kan der nemlig være flere sider, der kan siges at ligge over for et bestemt punkt – notationen med små bogstaver bliver da ikke længere entydig. I den situation vil det være fornuftigst skrive sidelængderne som $|AB|$, $|BC|$ osv.

Hvis man har en figur med mere end tre punkter, kan der også nogle gange opstå en situation, hvor det ikke er entydigt at benævne en vinkel med ét bogstav, f.eks. $\angle A$. I disse situationer benævner man i stedet en vinkel vha.

3 bogstaver. $\angle CAD$ er f.eks. den vinkel, man får tegnet op, når man tegner fra punkt $C$ til punkt $A$ til punkt $D$ (se figur 4.4).




**Figur 4.4:** $\angle A$ kan være 3 forskellige vinkler på denne figur; derfor kalder man den markerede vinkel $\angle CAD$.

## 4.2 Ensvinklede trekanter

To trekanter, hvor vinklerne er parvis lige store, kaldes *ensvinklede*, dvs.

**Definition 4.3**

Hvis der for to trekanter $ABC$ og $A'B'C'$ gælder, at

$$\angle A' = \angle A, \quad \angle B' = \angle B \quad \text{og} \quad \angle C' = \angle C\,,$$

så kaldes de to trekanter *ensvinklede*.

Hvis to trekanter er ensvinklede, vil den ene være en forstørret eller formindsket kopi af den anden. Der gælder følgende sætning.

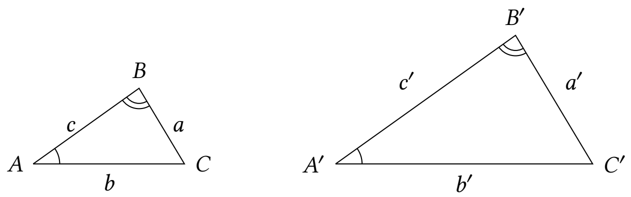
**Sætning 4.4**

Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle A'B'C'$ er ensvinklede med

$$\angle A' = \angle A, \quad \angle B' = \angle B \quad \text{og} \quad \angle C' = \angle C\,,$$

så er forholdet mellem længderne af de ensliggende[3] sider ens, dvs.

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}\,.$$



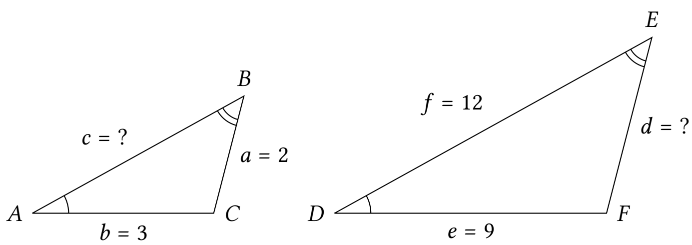

[3]To sider er *ensliggende*, når de ligger mellem to ens vinkler.

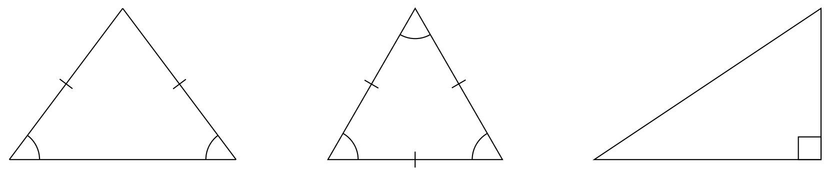
**Eksempel 4.5** Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er ensvinklede, sådan at

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \text{og} \angle C = \angle F\,,$$

og man tillige ved, at $a = 2$, $b = 3$, $e = 9$ og $f = 12$, så kan man beregne de resterende sidelængder.

Først tegner man en skitse (den behøver ikke være målfast), for at få et overblik:





(a) En ligebenet trekant (b) En ligesidet trekant. (c) En retvinklet trekant.

**Figur 4.5:** I en ligebenet trekant er to af siderne lige lange, i en ligesidet er alle sider lige lange, og i en retvinklet trekant er den ene vinkel ret.

Herefter ser man på forholdet mellem de ensliggende siders længder. I dette tilfælde er

$$\frac{d}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f}{c} \; .$$

Indsætter man de kendte værdier, får man

$$\frac{d}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{c} \; .$$

Dvs.

$$\frac{d}{2} = \frac{9}{3} \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{9}{3} \cdot 2 = 6 \; ,$$

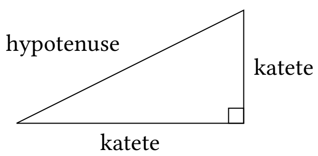
og

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{12} = \frac{3}{9} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{3}{9} \cdot 12 = 4 \; .$$

Nu kender man altså alle sidelængderne i de to trekanter.

## 4.3 Retvinklede trekanter

Der findes tre typer af trekanter, som det er vigtigt at kende navnene på. Det er *ligebenede* trekanter, *ligesidede* trekanter og *retvinklede* trekanter. Disse er illustreret på figur 4.5.




**Figur 4.6:** Siderne i en retvinklet trekant.

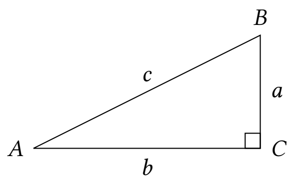
I en retvinklet trekant har siderne også specielle navne. Den side, der ligger over for den rette vinkel kaldes *hypotenusen*, mens de to andre sider kaldes *kateter* (se figur 4.6).

For retvinklede trekanter gælder der følgende sætning.

**Sætning 4.6: Pythagoras' sætning**

I en retvinklet trekant $ABC$, hvor $\angle C$ er den rette vinkel, gælder der, at

$$a^2 + b^2 = c^2 \; .$$




Hvis man i stedet for at referere til en konkret trekant $ABC$ bruger de navne, siderne i en retvinklet trekant har, kan Pythagoras' sætning også udtrykkes på følgende måde:

**Sætning 4.7: Pythagoras' sætning**

I en retvinklet trekant er summen af kvadraterne på kateterne lig kvadratet på hypotenusen,[4] dvs.

$$(\text{første katete})^2 + (\text{anden katete})^2 = (\text{hypotenusen})^2 \ .$$

[4] *Kvadratet på …* betyder »opløftet i 2. potens«. *Kvadratet på a* betyder f.eks. $a^2$.

**Eksempel 4.8** Hvis man om en retvinklet trekant ved, at den ene katete har længden 5, og hypotenusen har længden 13, kan man beregne længden af den sidste katete vha. Pythagoras' sætning.

Længden af den sidste katete, kan man kalde $x$. Sætter man de oplyste værdier ind i Pythagoras' sætning, får man ligningen

$$5^2 + x^2 = 13^2 \ .$$

Dvs.

$$x^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \ .$$

Længden af den sidste katete er så

$$x = \sqrt{144} = 12 \ .$$

Tegner man en vilkårlig trekant, kan man se hypotenusen som en vektor $\vec{c}$. Dette kan sammenlignes med den samme retvinklede trekant, hvor sidelængderne kaldes $a$, $b$ og $c$ (se figur 4.7). Denne sammenligning giver de to ligninger

$$a = c \cdot \sin(\angle A) \quad \text{og} \quad b = c \cdot \cos(\angle A) \ .$$

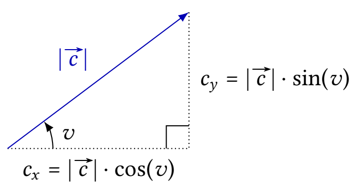
Disse kan omskrives til

$$\sin(A) = \frac{a}{c} \quad \text{og} \quad \cos(A) = \frac{b}{c} \ .$$

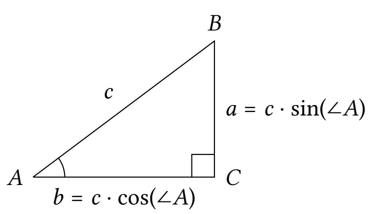
Ud fra dette kan man også finde en formel for $\tan(A)$, idet

$$\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{a}{c} \Big/ \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \ .$$

Alt dette kan opsummeres i følgende sætning:




(a) Vektor $\vec{c}$ som hypotenuse.




(b) Sidelængder $a$, $b$ og $c$.

**Figur 4.7:** En vektor kan afbildes som hypotenusen i en retvinklet trekant. Heraf kan man udlede en sammenhæng mellem sidernes længder og hhv. cos og sin til vektorens retningsvinkel.

**Sætning 4.9**

I en retvinklet trekant $ABC$, hvor $C$ er den rette vinkel er

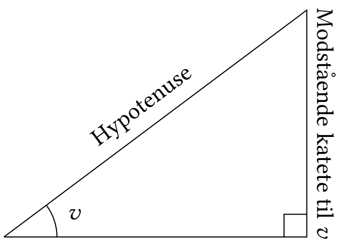
$$\sin(A) = \frac{a}{c}\ , \quad \cos(A) = \frac{b}{c} \quad \text{og} \quad \tan(A) = \frac{a}{b}\ .$$

Nu er det jo ikke alle trekanter, der hedder $ABC$. Sætning 4.9 skrives derfor også nogle gange op på følgende måde:

**Sætning 4.10**

I en retvinklet trekant, hvor $v$ er én af de spidse vinkler, er

$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}\ ,$$
$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}\ ,$$
$$\tan(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}\ .$$

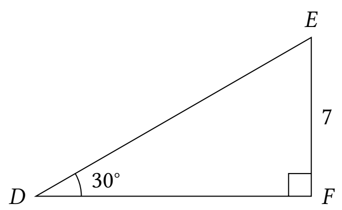



**Figur 4.8:** Sidernes navne i forhold til den spidse vinkel $v$.

Betegnelserne »modstående« og »hosliggende« katete henviser til, om kateten ligger over for (modstående) eller op til (hosliggende) vinklen. Se også figur 4.8.

Vha. formlerne i sætning 4.10 er det muligt at beregne alle sider og vinkler i en retvinklet trekant, hvis blot man kender mindst én side og enten en af de spidse vinkler eller en side mere.

**Eksempel 4.11** I en retvinklet trekant $DEF$ er $\angle D = 30^\circ$ og $|EF| = 7$. En skitse af trekanten ser således ud:




Siden $EF$ er den modstående katete til $\angle D$, og $DE$ er hypotenusen, så ifølge sætning 4.10 er

$$\sin(30^\circ) = \frac{7}{|DE|}\ .$$

Denne ligning løses, og man får

$$|DE| = \frac{7}{\sin(30^\circ)} = 14\ .$$

Den sidste side kan nu bestemmes vha. Pythagoras' sætning, og den sidste vinkel bestemmes ud fra, at vinkelsummen i en trekant er 180°.

**Eksempel 4.12** Hvis man skal bestemme længden af kateten $DF$ i trekanten fra eksempel 4.11, kan dette gøres ved at benytte tangens.

Siden $DF$ er den hosliggende katete til $\angle D$, og $EF$ er den modstående, får man ifølge sætning 4.10, at

$$\tan(30^\circ) = \frac{7}{|DF|} \ .$$

Løser man denne ligning, får man

$$|DF| = \frac{7}{\tan(30^\circ)} = 12{,}1 \ .$$

## 4.4 Arealet af en trekant

I dette afsnit og det næste anvendes vektorgeometri til at udlede nogle sætninger om trekanter. Først ses på, hvordan determinanten af to vektorer kan bruges til at bestemme en trekants areal.

Hvis en trekant har hjørner i punkterne $A$, $B$ og $C$, vil dens areal være halvdelen af arealet af det parallelogram, der er udspændt af vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Man kan derfor ud fra sætning 3.18 komme frem til følgende sætning, der omhandler arealet af trekanter:

**Sætning 4.13**

Trekanten med hjørner i punkterne $A$, $B$ og $C$ har arealet

$$T = \tfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| \ .$$

**Eksempel 4.14** En trekant har hjørner i punkterne $A(-1;3)$, $B(0;5)$ og $C(7;2)$. Arealet af denne trekant kan bestemmes vha. sætning 4.13.

Først beregnes koordinaterne til vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Man får

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7-(-1) \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \ .$$

Arealet af trekant $ABC$ kan nu beregnes:

$$T = \tfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 8 \\ 2 & -1 \end{matrix}\right\| = \tfrac{1}{2}\left|1\cdot(-1) - 2\cdot 8\right| = \tfrac{1}{2}|-17| = \tfrac{17}{2} \ .$$

Arealet af trekant $ABC$ er altså $\frac{17}{2}$.

Sætning 4.13 giver i kombination med sætning 3.21, at arealet af en trekant $ABC$ er

$$T = \tfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right||\sin(v)| \ , \tag{4.1}$$

hvor $v$ er vinklen fra $\overrightarrow{AB}$ til $\overrightarrow{AC}$. Hvis trekantens sidelængder kaldes, $a$, $b$ og $c$, kan (4.1) omskrives til følgende sætning:

**Sætning 4.15**

Arealet af trekanten $ABC$ er givet ved

$$T = \tfrac{1}{2} b\, c \sin(\angle A)\ .$$

Formlen i sætning 4.15 siger, at en trekants areal kan beregnes ud fra to sider og den mellemliggende vinkel. Formlen kan derfor skrives på 3 forskellige måder, afhængig af hvilken vinkel, man tager udgangspunkt i:

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} b\, c \sin(\angle A) \\ T &= \tfrac{1}{2} a\, c \sin(\angle B) \\ T &= \tfrac{1}{2} a\, b \sin(\angle C) \end{aligned}$$

## 4.5 Sinusrelationerne

Vha. sætning 4.15 kan man udlede følgende sætning.

**Sætning 4.16: Sinusrelationerne**

I en trekant $ABC$ gælder der

$$\frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle C)}{c}\ ,$$

og

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}\ .$$

**Bevis**

Som nævnt ovenfor kan formlen i sætning 4.15 skrives som tre formler for arealet af den samme trekant. Der må derfor gælde, at

$$\tfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\angle A) = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\angle B) = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\angle C)\ .$$

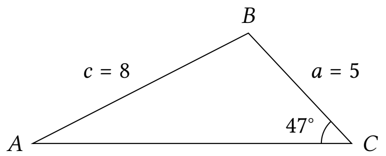
I denne dobbeltligning kan man dividere med $\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c$ på alle »sider«, og man får så

$$\frac{\tfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\angle A)}{\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\angle B)}{\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\angle C)}{\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c}\ .$$

Nu forkorter man så meget som muligt, og tilbage står der

$$\frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle C)}{c}\ ,$$

hvorved sætningen er bevist. ■




**Figur 4.9:** En trekant med to kendte sider, og én kendt vinkel.

Sinusrelationerne siger, at forholdet mellem sinus til en vinkel og længden af den side, der ligger over for vinklen er konstant i en given trekant. Hvis man kender en vinkel og en længden af siden overfor i en trekant, og man kender en vinkel eller en sidelængde mere, er det derfor muligt at beregne resten af siderlængderne og vinklerne i trekanten.

**Eksempel 4.17** I $\triangle ABC$ er $\angle C = 47°$, $a = 5$ og $c = 8$. En skitse af trekanten kan ses på figur 4.9.

Iflg. sinusrelationerne (sætning 4.16) er

$$\frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle C)}{c} \ ,$$

dvs.

$$\frac{\sin(\angle A)}{5} = \frac{\sin(47°)}{8} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(\angle A) = \frac{\sin(47°)}{8} \cdot 5 = 0{,}4571 \ .$$

Derfor er

$$\angle A = \sin^{-1}(0{,}4571) = 27{,}2° \ .$$

Vinklen $\angle B$ kan nu bestemmes ud fra, at vinkelsummen er 180°, og den sidste side kan så også bestemmes vha. sinusrelationerne (se evt. næste eksempel).

**Eksempel 4.18** I $\triangle ABC$ er $\angle A = 62°$, $\angle B = 34°$ og $b = 7$. En skitse kan ses på figur 4.10.

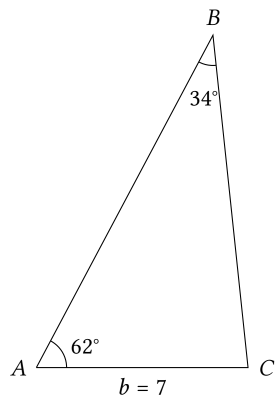
Ifølge sinusrelationerne er

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} \ ,$$

dvs.

$$\frac{a}{\sin(62°)} = \frac{7}{\sin(34°)} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = \frac{7}{\sin(34°)} \cdot \sin(62°) = 11{,}1 \ .$$

Den sidste vinkel kan beregnes ud fra, at vinkelsummen er 180°, og den sidste side, kan bestemmes på samme måde som siden $a$.




**Figur 4.10:** En trekant med to kendte vinkler og én kendt side.

## Sinusfælden

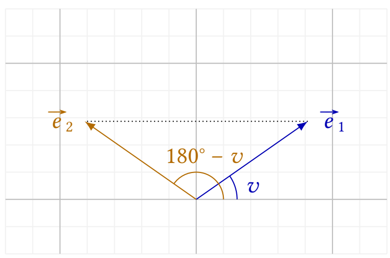
Det viser sig, at man skal være en smule påpasselig, når man bestemmer vinkler vha. sinusrelationerne. Funktionen $\sin^{-1}$, som man bruger til at isolere vinkler med, giver nemlig altid et resultat mellem −90° og 90°; men i en trekant kan en vinkel være op til 180° – og det viser sig, at for en given sinus-værdi, findes der to vinkler, der kan give denne værdi.

Figur 4.11 viser enhedsvektoren $\vec{e}_1$ med retningsvinkel $v$ og enhedsvektoren $\vec{e}_2$ med retningsvinkel $180° - v$. Figuren viser, at de to enhedsvektorer har samme andenkoordinat, dvs.

$$\sin(180° - v) = \sin(v) \ .$$

Ud fra dette kan man argumentere for, at når man har ligningen $\sin(v) = y$, så kan der være to løsninger. De to løsninger er

$$v = \sin^{-1}(y) \qquad \text{og} \qquad v = 180° - \sin^{-1}(y) \ .$$




**Figur 4.11:** To vinkler med samme sinus.

**Eksempel 4.19** I trekant $ABC$ er $\angle A = 56°$, $a = 7$ og $b = 8$. Vha. sinusrelationerne kan man beregne $\angle B$, idet

$$\frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle A)}{a} \ .$$

Dette giver ligningen

$$\frac{\sin(\angle B)}{8} = \frac{\sin(56°)}{7} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(\angle B) = \frac{\sin(56°)}{7} \cdot 8 = 0{,}9475 \ .$$

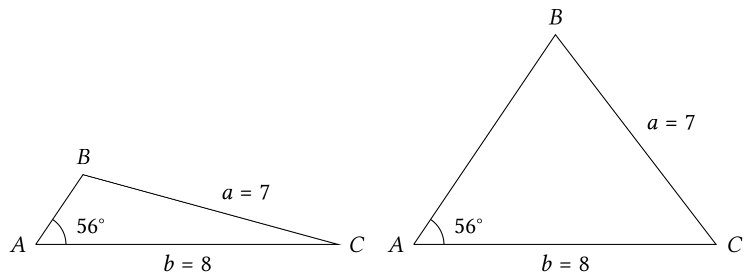
Denne ligning har to løsninger, den ene er[5]

$$\angle B = \sin^{-1}(0{,}9475) = 71{,}3° \ ,$$

og den anden er

$$\angle B = 180° - \sin^{-1}(0{,}9475) = 108{,}7° \ .$$

Trekant $ABC$ kan altså se ud på to forskellige måder:




Hvis man bliver bedt om at bestemme de resterende sider og vinkler i $\triangle ABC$ bliver man altså nødt til at regne på to forskellige trekanter. Der findes derfor ikke én men to løsninger, og den ene er ikke mere rigtig end den anden.

Selvom ligningen $\sin(v) = y$ altid har to løsninger, er det ikke sikkert at begge løsninger giver mening. Dette ses i næste eksempel.

**Eksempel 4.20** Her ses på trekanten $ABC$, hvor $\angle A = 45°$, $a = 15$ og $b = 12$. Sinusrelationerne giver

$$\frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle A)}{a} \ ,$$

hvorfra man får ligningen

$$\frac{\sin(\angle B)}{12} = \frac{\sin(45°)}{15} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(\angle B) = \frac{\sin(45°)}{15} \cdot 12 = 0{,}5657 \ .$$

Denne ligning har to løsninger,

$$\angle B = \sin^{-1}(0{,}5657) = 34{,}4°$$

og

$$\angle B = 180° - \sin^{-1}(0{,}5657) = 145{,}6° \ .$$

[5] Der findes to løsninger til en ligning som $\sin(\angle B) = 0{,}9475$, netop fordi $\sin(71{,}3°) = \sin(108{,}7°)$, så begge disse vinkler løser ligningen.

Den sidste løsning ($\angle B = 145{,}6^\circ$) er godt nok en løsning til ligningen $\sin(\angle B) = 0{,}5657$, men det er ikke en løsning, der giver mening. Vinkelsummen i en trekant er nemlig $180^\circ$, og der er i forvejen en vinkel på $45^\circ$. Så kan der ikke også være en vinkel på $145{,}6^\circ$ i trekanten, og denne løsning kasseres derfor.

Altså er der kun én mulig størrelse vinklen kan have, nemlig $\angle B = 34{,}4^\circ$.

## 4.6 Cosinusrelationerne

Sinusrelationerne kan bruges i de tilfælde, hvor man kender en vinkel og en side, der ligger over for hinanden. Gør man ikke det, kan man kun beregne yderligere sidelængder og vinkler ved at benytte *cosinusrelationerne*.

**Sætning 4.21: Cosinusrelationerne**

I en trekant $ABC$ gælder der, at

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\angle A) & \cos(\angle A) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\angle B) & \cos(\angle B) &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\angle C) & \cos(\angle C) &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \,. \end{aligned}$$

Formlerne på højre side i sætning 4.21 er blot en omskrivning af formlerne på venstre side.

Hvis man ser nærmere på formlerne på venstre side, bemærker man, at alle tre formler gør det muligt at beregne en sidelængde, hvis man kender vinklen overfor og længden af de to andre sider. Indholdet i alle tre formler er altså på sin vis det samme, så det er kun nødvendigt at bevise den ene af dem.

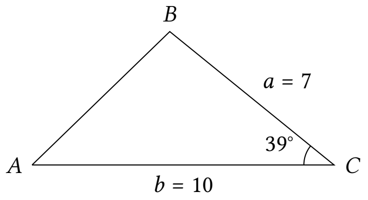
**Bevis**
Trekanten $ABC$ er udspændt af vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Der gælder tillige (pga. indskudssætningen), at

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \,.$$

Idet $a^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$, kan man finde et udtryk for $a^2$ ved at regne på vektoren $\overrightarrow{BC}$. Hvis man anvender regnereglerne fra sætning 3.3 og sætning 3.4 får man

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right|^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} \\ &= \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - 2 \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos(\angle A) \\ &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\angle A) \,, \end{aligned}$$

hvorved sætningen er bevist. ■




**Figur 4.12:** Trekant, hvor man kender to sider og en mellemliggende vinkel.

Cosinusrelationerne kan bruges til at beregne en længde af en side, hvis man kender de to andre sidelængder i en trekant, samt vinklen overfor. Dette svarer til formlerne på venstre side i sætning 4.21.

Alternativt kan man bruge cosinusrelationerne til at beregne en vinkel, hvis man kender længden af alle tre sider i en trekant – dette svarer til formlerne på højre side i sætningen.

**Eksempel 4.22** I trekant $ABC$ er $\angle C = 39°$, $a = 7$ og $b = 10$. En skitse af trekanten kan ses på figur 4.12.

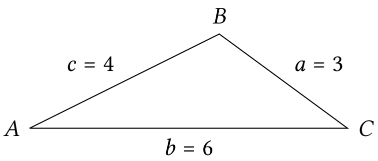
Sidelængden $c$ kan beregnes vha. en cosinusrelation. Iflg. sætning 4.21 er

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\angle C) = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos(39°) = 40{,}20 \ ,$$

hvilket betyder, at

$$c = \sqrt{40{,}20} = 6{,}3 \ .$$

Da man nu kender længden af alle siderne, kan én af de sidste to vinkler også bestemmes vha. en cosinusrelation (se næste eksempel). Alternativt kan man bestemme en af de sidste to vinkler vha. sinusrelationerne.




**Figur 4.13:** Trekant, hvor man kender alle sider.

**Eksempel 4.23** I dette eksempel ses på en trekant $ABC$, hvor $a = 3$, $b = 6$ og $c = 4$ (se figur 4.13). Iflg. cosinusrelationerne kan $\angle A$ beregnes ud fra formlen

$$\cos(\angle A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6^2 + 4^2 - 3^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = 0{,}8958 \ .$$

Heraf får man

$$\angle A = \cos^{-1}(0{,}8958) = 26{,}4° \ .$$

De resterende vinkler kan beregnes på samme måde.

## 4.7 Øvelser

**Øvelse 4.1**
Bestem arealet af trekanten $PQR$, når $|PQ| = 6$ og $h_R = 3$.

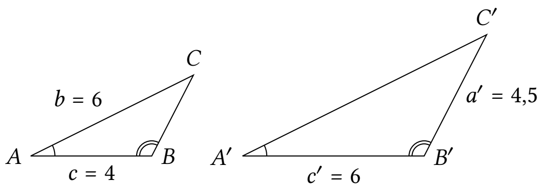
**Øvelse 4.2**
Arealet af trekant $ABC$ er 28, og $h_C = 7$.

a) Beregn $|AB|$.

**Øvelse 4.3**
Arealet af trekant $ABC$ er 12, og $|BC| = 6$.

a) Bestem højden $h_A$.

**Øvelse 4.4**
De to trekanter på figuren er ensvinklede.

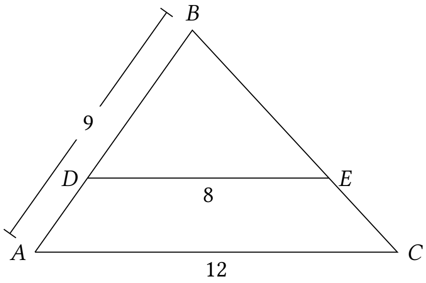



a) Bestem sidelængderne $a$ og $b'$.

**Øvelse 4.5**
De to trekanter $ABC$ og $DEF$ er ensvinklede, således at $\angle A = \angle D$ og $\angle B = \angle E$. Der gælder yderligere, at $a = 5$, $b = 7$, $e = 15$ og $f = 18$.

a) Bestem de manglende sidelængder.

**Øvelse 4.6**
På figuren nedenfor er $AC$ og $DE$ parallelle. Nogle af målene er angivet på figuren.




a) Bestem $|AD|$.

**Øvelse 4.7**
Trekant $ABC$ er retvinklet, og $\angle C$ er den rette vinkel.

a) Bestem $c$, når $a = 3$ og $b = 4$.

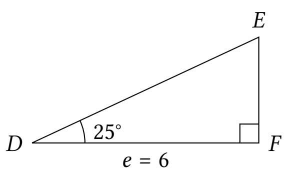
b) Bestem $a$, når $b = 5$ og $c = 13$.

**Øvelse 4.8**
Trekant $BLT$ er retvinklet, og $\angle L$ er den rette vinkel.

a) Opskriv Pythagoras' sætning for denne trekant.

b) Bestem $b$, når $l = 4{,}3$ og $t = 2{,}9$.

**Øvelse 4.9**
Den retvinklede trekant $DEF$ er afbildet nedenfor. Nogle af trekantens mål kan ses på figuren.

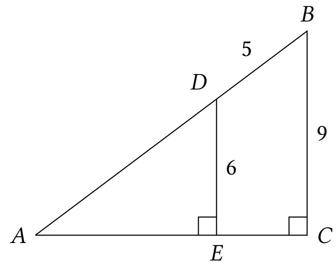



a) Bestem den manglende vinkel og de manglende sidelængder i trekant $DEF$.

b) Bestem trekantens areal.

**Øvelse 4.10**
Bestem de manglende vinkler samt længden af den sidste katete i en retvinklet trekant, hvor længden af den ene katete er 3 og længden af hypotenusen er 7.

**Øvelse 4.11**
På figuren nedenfor er $|DE| = 6$, $|BC| = 9$ og $|BD| = 5$.

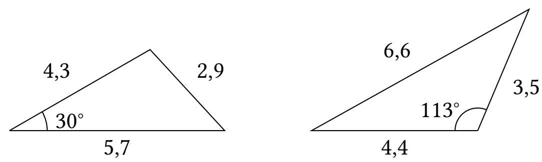



a) Bestem $|AD|$ og $|AE|$.

b) Bestem $\angle A$ og $\angle B$.

**Øvelse 4.12**
Bestem arealet af trekant $ABC$, når $a = 3$, $b = 5$ og $\angle C = 72°$.

**Øvelse 4.13**
Bestem arealerne af trekanterne herunder.




**Øvelse 4.14**
I trekant $ABC$ er $\angle A = 26°$, $\angle B = 95°$ og $|BC| = 4{,}0$.

a) Bestem de manglende sider og den manglende vinkel i trekanten.

b) Bestem arealet af trekanten.

**Øvelse 4.15**
Bestem de manglende størrelser i trekant $ABC$ i de fire tilfælde herunder. Husk i hvert tilfælde at overveje, om der er mere end én løsning.

a) $\angle A = 34°$, $a = 10$, $b = 5$.

b) $\angle B = 69°$, $\angle C = 71°$, $a = 4{,}7$.

c) $\angle B = 106°$, $b = 5$, $c = 6{,}2$.

d) $\angle A = 62°$, $\angle B = 79°$, $c = 8{,}3$.

**Øvelse 4.16**
I trekant $ABC$ er $\angle A = 32°$, $c = 4{,}7$ og medianen fra $B$ har længden $m_B = 6{,}1$.

a) Bestem $b$.

b) Bestem trekantens areal.

**Øvelse 4.17**
Bestem de manglende vinkler og sider i trekant $ABC$ i de fire tilfælde herunder.

a) $a = 5$, $b = 7$, $\angle C = 49°$.

b) $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$.

c) $b = 4$, $c = 7$, $\angle A = 112°$.

d) $a = 9$, $b = 5$, $c = 7$.

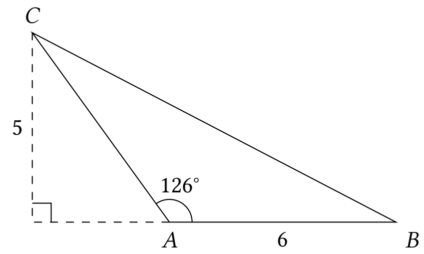
**Øvelse 4.18**
Trekant $ABC$ har hjørner i punkterne $A(-2; 3)$, $B(0; 7)$ og $C(4; 1)$.

a) Bestem sidelængderne og vinklerne i trekanten.

b) Bestem trekantens areal.

c) Bestem højden $h_C$ fra $C$ på siden $AB$.

**Øvelse 4.19**
I trekant $ABC$ er $\angle A = 126°$, $|AB| = 6$ og højden fra $C$ er $h_C = 5$.




a) Bestem trekantens areal.

b) Bestem længden af $AC$.

c) Bestem $|BC|$ samt $\angle B$ og $\angle C$.

# 5 Linjer

I dette kapitel ses på linjer i planen. Vha. punkter og vektorer kan man udlede ligninger for de punkter, der ligger på en linje. Det er nyttigt at kunne tale om *afstanden* mellem to punkter i et koordinatsystem. Der gælder følgende sætning:

**Sætning 5.1**

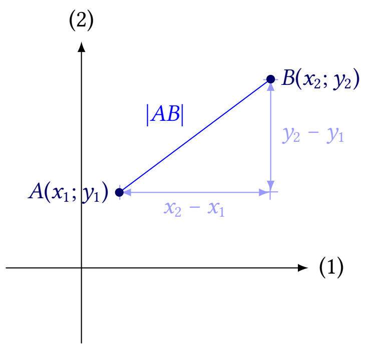
Afstanden mellem punkterne $A(x_1; y_1)$ og $B(x_2; y_2)$ er

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

**Bevis**
Afstanden fra $A$ til $B$ er lig med længden af vektoren $\overrightarrow{AB}$, dvs.

$$|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ . \qquad \blacksquare$$

Sætningen kan også bevises ved at betragte linjen $AB$ som hypotenusen i en retvinklet trekant, og derefter anvende Pythagoras' sætning. Se figur 5.1.




**Figur 5.1:** Afstanden mellem to punkter kan findes vha. Pythagoras' sætning.

## 5.1 Linjens parameterfremstilling

En linje i et koordinatsystem kan beskrives ud fra et punkt på linjen og den retning, linjen har i koordinatsystemet. Når man skal beskrive en linjes retning, kan dette gøres vha. en vektor.

**Definition 5.2**

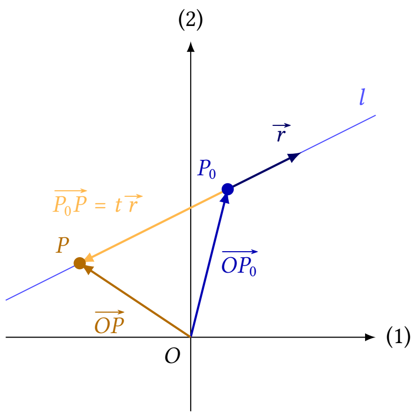
En vektor $\vec{r}$, der er parallel med en linje $l$, kaldes en *retningsvektor* for $l$.

En vektor $\vec{n}$, der står vinkelret på en linje $l$, kaldes en *normalvektor* for $l$.

Det er her vigtigt at bemærke, at en linje ikke har én retningsvektor, men uendeligt mange. Hvis $\vec{r}$ er en retningsvektor, så vil enhver vektor, der er parallel med $\vec{r}$, nemlig også være en retningsvektor. Det samme gælder for en normalvektor.

Når man skal beskrive linjen er det ligeledes ligegyldigt, hvilket punkt man starter med. En linje indeholder uendeligt mange punkter, og ethvert af disse koblet med en retningsvektor kan bruges til at beskrive linjen.

Har man et punkt og en retningsvektor for en linje, kan linjen beskrives ved en såkaldt *parameterfremstilling*, som er en ligning, der fortæller, hvordan ethvert punkt på linjen kan beregnes ud fra et startpunkt og en retningsvektor.




**Figur 5.2:** Ud fra denne figur kan man udlede en sammenhæng mellem et tilfældigt punkt $P$ på linjen, det kendte punkt $P_0$ og retningsvektoren $\vec{r}$.

På figur 5.2 ses en linje $l$, et punkt $P_0(x_0; y_0)$ på linjen og en retningsvektor $\vec{r}$ for linjen. På figuren er der også indtegnet et tilfældigt punkt $P(x; y)$ på linjen. Ifølge indskudssætningen (sætning 1.13) gælder der

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}\ .$$

Dette kan også ses på figuren.

Men vektoren $\overrightarrow{P_0P}$ er parallel med $\vec{r}$, dvs. der findes et tal $t$, så $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{r}$. Altså får man ligningen

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{r}\ .$$

$\overrightarrow{OP}$ og $\overrightarrow{OP_0}$ er stedvektorerne til de to punkter $P(x; y)$ og $P_0(x_0; y_0)$, så det er vektorer, der har samme koordinater som de to punkter. Dvs. man kan sætte dette ind i ligningen og få

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\vec{r}\ . \tag{5.1}$$

Ethvert punkt $P(x; y)$ på linjen kan findes ud fra denne ligning for en eller anden værdi af $t$. Lader man nu $t$ gennemløbe alle de reelle tal, får man alle punkterne på linjen. En ligning af typen (5.1), hvor $t \in \mathbb{R}$, kaldes en *parameterfremstilling* for linjen $l$. Tallet $t$, der gennemløber de reelle tal, kaldes *parameteren*. Der gælder altså

**Sætning 5.3**

En *parameterfremstilling* for en linje i planen er givet ved

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}\ , \quad t \in \mathbb{R}\ ,$$

hvor $(x_0; y_0)$ er et punkt på linjen, og $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$ er en retningsvektor for linjen.

**Eksempel 5.4** Hvis en linje $l$ går gennem punktet $(3; 2)$ og har en retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, så er dens parameterfremstilling

$$l\ :\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}\ , \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

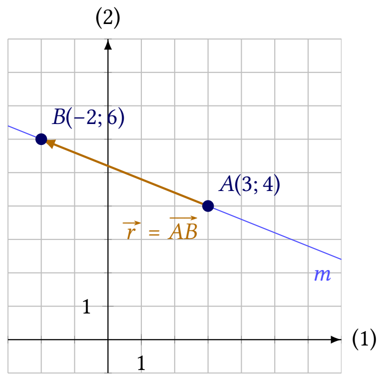
**Eksempel 5.5** Her findes en parameterfremstilling for den linje $m$, der går gennem de to punkter $A(3;4)$ og $B(-2;6)$.

For at kunne opskrive en parameterfremstilling, skal man bruge en retningsvektor. Da både $A$ og $B$ ligger på linjen, kan $\overrightarrow{AB}$ bruges som retningsvektor.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Man skal tillige bruge et punkt, linjen går igennem. Her er det oplagt at vælge enten $A$ eller $B$. Bruger man $A$ bliver parameterfremstillingen

$$m : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad t \in \mathbb{R} .$$




**Figur 5.3:** Punkterne $A$ og $B$ samt linjen $m$.

Punkterne $A$ og $B$, linjen $m$ og retningsvektoren $\overrightarrow{AB}$ kan ses på figur 5.3.

Idet $m$ går igennem uendeligt mange punkter og har uendeligt mange retningsvektorer (alle vektorer, der er parallelle med $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$), er f.eks.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

også parameterfremstillinger for $m$.

En parameterfremstilling er i virkeligheden en vektor-ligning, hvor koordinaterne til retningsvektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ er funktioner af parameteren $t$. Det betyder, at man ud fra parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

kan finde de to *koordinatfunktioner* $x(t)$ og $y(t)$ givet ved

$$x(t) = x_0 + r_x t \qquad \text{og} \qquad y(t) = y_0 + r_y t .$$

De to funktioner viser, hvordan punktets $x$- og $y$-koordinat ændrer sig som funktion af parameteren $t$.

Parameteren $t$ i en parameterfremstilling fortolkes derfor ofte som en tid. Dvs. efterhånden som tiden $t$ går, bevæger punktet $(x(t); y(t))$ sig langs den kurve, som parameterfremstillingen angiver.[1]

Hvis to linjer ikke er parallelle, har de et skæringspunkt. Koordinatfunktionerne kan her bruges til at bestemme skæringspunktet mellem to linjer.

**Eksempel 5.6** To linjer er givet ved parameterfremstillingerne[2]

$$l : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} , \quad t \in \mathbb{R}$$

[1]Det er ikke kun linjer, der har parameterfremstillinger. Der kan stilles parameterfremstillinger op for uendeligt mange forskellige kurver i et koordinatsystem, f.eks. cirkler eller parabler.

[2]Når man opstiller flere parameterfremstillinger, er det vigtigt at parametrene kaldes noget forskelligt, da det ikke drejer sig om den samme variabel.

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}$$

For linjen $l$ er koordinatfunktionerne derfor

$$x_l = 3 + t \cdot (-1) \qquad \text{og} \qquad y_l = -3 + t \cdot 6,$$

og for $m$ får man

$$x_m = -4 + s \cdot (5) \qquad \text{og} \qquad y_m = 1 + s \cdot 8\ .$$

For at finde skæringspunktet skal man finde den værdi af $t$ og den værdi af $s$, der giver samme punkt, når man sætter dem ind i ligningerne. Dvs. de værdier for $t$ og $s$, hvor $x_l = x_m$ og $y_l = y_m$. Det giver to ligninger med to ubekendte:

$$\begin{aligned} 3 - t &= -4 + 5s \\ -3 + 6t &= 1 + 8s\ . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Disse to ligninger kan løses vha. lige store koefficienters metode. Forlænger man den øverste ligning med 6, får man

$$\begin{aligned} 18 - 6t &= -24 + 30s \\ -3 + 6t &= 1 + 8s\ . \end{aligned}$$

Lægger man disse to ligninger sammen, forsvinder parameteren $t$; man får nemlig

$$15 = -23 + 38s \qquad \Longleftrightarrow \qquad s = 1\ .$$

Da man nu kender parameteren $s$, kan skæringspunktet beregnes ud fra parameterfremstillingen for $m$. Sætter man $s = 1$ i parameterfremstillingen får man

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}\ .$$

Altså skærer de to linjer hinanden i $(1; 9)$.

Hvis man vil bekræfte denne beregning, kan man beregne værdien af parameteren $t$, f.eks. vha. ligningen (5.2). Sætter man $s = 1$ ind i denne ligning, får man

$$3 - t = -4 + 5 \cdot 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = 2\ .$$

Når man sætter $t = 2$ ind i parameterfremstillingen for $l$, får man

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix},$$

hvilket blot bekræfter, at de to linjer skærer hinanden i $(1; 9)$.

## 5.2 Linjens ligning

Som bekendt kan linjer også beskrives ved ligninger. En parameterfremstilling for en linje kan derfor altid omskrives til en ligning for linjen. Antag f.eks., at en given linje $l$ har parameterfremstillingen

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\vec{r}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Så kan parameterfremstillingen omskrives til

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = t\vec{r}\,. \tag{5.3}$$

Tværvektoren $\hat{\vec{r}}$ til retningsvektoren $\vec{r}$ står vinkelret på linjen. Den er derfor en normalvektor for linjen. Koordinaterne til denne normalvektor kan findes ud fra $\vec{r}$'s koordinater. Nedenfor kaldes koordinaterne blot $a$ og $b$, dvs. $\hat{\vec{r}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Hvis man tager skalarproduktet med denne vektor på begge sider af ligningen (5.3) får man

$$\hat{\vec{r}} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \hat{\vec{r}} \cdot t\vec{r}\,,$$

men fordi $\hat{\vec{r}} \perp \vec{r}$, giver højre side 0, dvs. man får

$$\begin{aligned} \hat{\vec{r}} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0\,. & \end{aligned}$$

Der gælder altså følgende sætning:

**Sætning 5.7**

En linje, som går gennem punktet $(x_0; y_0)$ og har normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, kan beskrives ved ligningen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0\,,$$

der også kan skrives

$$ax + by + c = 0\,,$$

hvor $c = -ax_0 - by_0$.

**Eksempel 5.8** Linjen gennem (3; 1), som har normalvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ har ligningen

$$5(x - 3) + (-2)(y - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
5x - 15 - 2y + 2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\
5x - 2y - 13 = 0 \; .
\end{aligned}
$$

**Eksempel 5.9** Linjen med parameterfremstillingen

$$
l : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \; , \quad t \in \mathbb{R}
$$

kan omskrives til en ligning ved først at finde en normalvektor. Her tages tværvektoren til linjens retningsvektor, dvs.

$$
\vec{n} = \widehat{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -(-3) \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \; .
$$

Linjen går gennem punktet $(-1; 5)$. Linjens ligning er derfor

$$
l : \quad 3(x - (-1)) + 4(y - 5) = 0 \; ,
$$

som kan reduceres til

$$
l : \quad 3x + 4y - 17 = 0 \; .
$$

Det er vigtigt at bemærke, at tallet $a$, som optræder i ligningen $ax + by + c = 0$, *ikke er en hældningskoefficient*. Hvis $b \neq 0$ kan linjen dog omskrives

$$
ax + by + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \; .
$$

dvs. linjens hældningskoefficient er $-\frac{a}{b}$. Hvis $b = 0$ kan denne omskrivning ikke lade sig gøre, fordi man som bekendt ikke kan dividere med 0. Er $b = 0$ har linjens ligning formen

$$
ax + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{c}{a} \; ,
$$

dvs. linjen er parallel med andenaksen (altså »lodret«).

Formen $ax + by + c = 0$ kan altså beskrive *enhver* linje i et koordinatsystem, også de lodrette – hvilket man ikke kan med en ligning på formen $y = \alpha x + \beta$,[3]

Ud fra ovenstående argument, får man sætningen

**Sætning 5.10**

Hvis en linje er givet ved ligningen

$$
ax + by + c = 0 \; ,
$$

hvor $b \neq 0$, kan den omskrives til

$$
y = \alpha x + \beta \; ,
$$

hvor $\alpha = -\frac{a}{b}$ er hældningskoefficienten, og $\beta = -\frac{c}{b}$ er skæringen med andenaksen.

Hvis $b = 0$ er linjen parallel med andenaksen og kan ikke omskrives til denne form.

[3] Linjens hældningskoefficient og skæring med andenaksen kaldes her $\alpha$ og $\beta$, for at de ikke skal forveksles med konstanterne $a$ og $b$ i ligningen $ax + bx + c = 0$.

Vha. en omskrivning mellem de to former for linjens ligning, kan man komme frem til følgende sætning om ortogonale linjer:

**Sætning 5.11**

De to linjer $l$ og $m$ med ligningerne

$$\begin{aligned} l : \quad & y = \alpha_1 x + \beta_1 \\ m : \quad & y = \alpha_2 x + \beta_2 \end{aligned}$$

er ortogonale, netop når $\alpha_1\alpha_2 = -1$.

**Bevis**
De to ligninger omskrives til formen $ax + by + c = 0$:

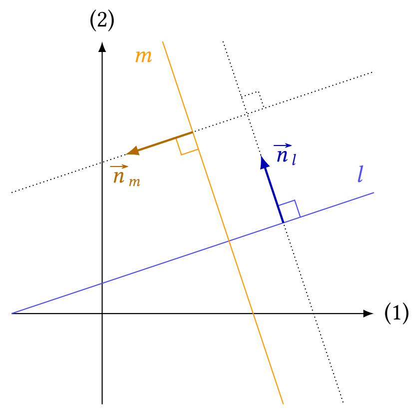
$$\begin{aligned} l : \quad & \alpha_1 x - y + \beta_1 = 0 \\ m : \quad & \alpha_2 x - y + \beta_2 = 0 \ . \end{aligned}$$

Det ses nu, at normalvektorerne for de to linjer er

$$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{n}_m = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -1 \end{pmatrix} \ .$$

Hvis de to linjer er ortogonale, så er deres normalvektorer også ortogonale (se figur 5.4), dvs.

$$\begin{aligned} \vec{n}_l \bullet \vec{n}_m = 0 \quad & \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad & \Leftrightarrow \\ \alpha_1\alpha_2 + (-1)\cdot(-1) = 0 \quad & \Leftrightarrow \\ \alpha_1\alpha_2 + 1 = 0 \quad & \Leftrightarrow \\ \alpha_1\alpha_2 = -1 \ . & \end{aligned}$$




**Figur 5.4:** Hvis to linjer er ortogonale, så er deres normalvektorer også ortogonale.

Hvis man omvendt ved, at $\alpha_1\alpha_2 = -1$, kan man udføre ovenstående omskrivning baglæns og nå frem til, at normalvektorerne er ortogonale, og så er linjerne det også. ■

**Eksempel 5.12** Her bestemmes den linje $m$ gennem (8; 1), der står vinkelret på linjen

$$l : \quad y = -4x + 3 \ .$$

Hvis de to linjer er ortogonale, så er produktet af deres hældningskoefficienter $-1$. Kaldes hældningskoefficienten for $m$ for $\alpha$, så gælder der altså

$$\alpha \cdot (-4) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{4} \ .$$

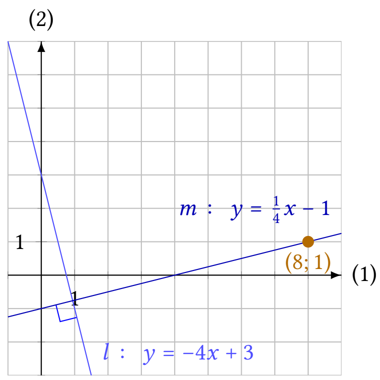
Da linjen $m$ går gennem punktet (8; 1) har linjen derfor ligningen

$$y = \tfrac{1}{4}(x - 8) + 1 \ ,$$

som reduceres til

$$m : \quad y = \tfrac{1}{4}x - 1 \ .$$

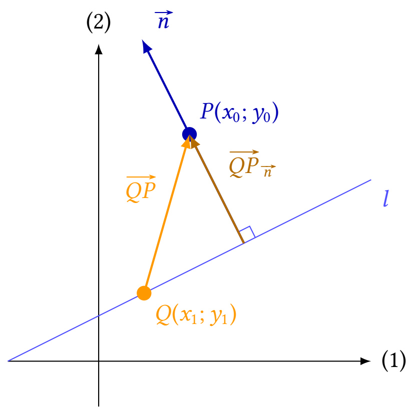
De to linjer og punktet kan ses på figur 5.5.




**Figur 5.5:** De to linjer $l$ og $m$ er ortogonale.

## 5.3 Afstanden fra et punkt til en linje

Hvis man har en linje i planen og et punkt, der ikke ligger på linjen, kan det være nyttigt at beregne, hvor langt punktet ligger fra linjen. Afstanden måles her altid som den *korteste* afstand fra punktet til linjen. Der gælder da følgende sætning:




**Figur 5.6:** Afstanden fra punktet til linjen kan findes som længden af vektoren $\overrightarrow{QP}_{\vec{n}}$.

**Sætning 5.13**

Afstanden fra punktet $P(x_0; y_0)$ til linjen $l\ :\ \ ax + by + c = 0$ er

$$\operatorname{dist}(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ .$$

**Bevis**

På figur 5.6 ses linjen $l$ og punktet $P$. Samtidig er der indtegnet en normalvektor $\vec{n}$ og et tilfældigt punkt $Q(x_1; y_1)$ på linjen.

Hvis man projicerer vektoren $\overrightarrow{QP}$ på normalvektoren $\vec{n}$, får man en vektor $\overrightarrow{QP}_{\vec{n}}$, hvis længde er den søgte afstand. Vha. sætning 3.9, kan man nu beregne længden af denne vektor. Man får

$$\operatorname{dist}(P, l) = \left|\overrightarrow{QP}_{\vec{n}}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|}\ . \tag{5.4}$$

Fordi linjen har ligningen $ax + by + c = 0$, og punkterne har koordinaterne $P(x_0; y_0)$ og $Q(x_1; y_1)$ har man

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix}\ .$$

Indsætter man det i ligningen (5.4), får man

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(P, l) &= \frac{\left|\begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|} \\ &= \frac{|(x_0 - x_1)a + (y_0 - y_1)b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 - ax_1 - by_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ . \end{aligned}$$

Punktet $Q(x_1; y_1)$ ligger på linjen, dvs. der gælder

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = -ax_1 - by_1\ ,$$

og derfor bliver afstanden

$$\operatorname{dist}(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ . \qquad \blacksquare$$

**Eksempel 5.14** Afstanden fra punktet $P(3;1)$ til linjen

$$l: \quad 5x + 12y - 6 = 0$$

kan findes vha. sætning 5.13. Koordinaterne $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ og konstanterne $a = 5$, $b = 12$ og $c = -6$ sættes ind i formlen:

$$\operatorname{dist}(P, l) = \frac{|5 \cdot 3 + 12 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|21|}{\sqrt{169}} = \frac{21}{13} .$$

**Eksempel 5.15** De to linjer

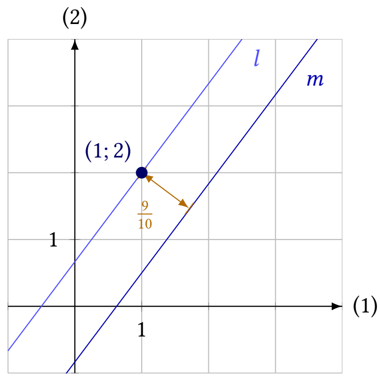
$$\begin{aligned} l: &\quad 4x - 3y + 2 = 0 \\ m: &\quad 8x - 6y - 5 = 0 \end{aligned}$$

er parallelle. Det kan man se, fordi de to normalvektorer

$$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{n}_m = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} ,$$

er parallelle ($\vec{n}_m = 2\vec{n}_l$). De to linjer ligger altså med en fast afstand fra hinanden.

Denne afstand kan også bestemmes vha. sætning 5.13. Det kan gøres ved at finde et punkt på den ene linje og bestemme afstanden fra dette punkt til den anden linje (se figur 5.7).




**Figur 5.7:** Afstanden fra $l$ til $m$ er lig afstanden fra et punkt på $l$ til $m$.

Hvis man sætter $x = 1$, får man for linjen $l$, at

$$4 \cdot 1 - 3y + 2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = 2 .$$

Linjen $l$ går derfor gennem punktet $(1;2)$. Dette punkt anvendes i formlen sammen med konstanterne fra ligningen $m$, og man får så

$$\operatorname{dist}\big((1;2), m\big) = \frac{|8 \cdot 1 - 6 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10} .$$

Afstanden mellem de to linjer er altså $\frac{9}{10}$.

## 5.4 Øvelser

**Øvelse 5.1**
Bestem afstanden mellem

a) $A(8;3)$ og $B(2;9)$,
b) $P(-4;0)$ og $Q(5;-7)$.

**Øvelse 5.2**
Opstil en parameterfremstilling for den linje, der har retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og går gennem punktet $P(9;2)$.

**Øvelse 5.3**
Opstil en parameterfremstilling for den linje, der går gennem punkterne

a) $A(-5;3)$ og $B(1;9)$,

b) $P(4;7)$ og $Q(5;-3)$.

**Øvelse 5.4**
Opstil en parameterfremstilling for den linje, der går gennem $P(7;2)$ og har $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ som normalvektor.

**Øvelse 5.5**
To linjer $l$ og $m$ er givet ved parameterfremstillingerne

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

og

$$m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

a) Bestem skæringspunktet mellem de to linjer.

**Øvelse 5.6**
Linjen $l$ er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestem en parameterfremstilling for linjen $m$, der går gennem $P(11;5)$ og står vinkelret på $l$.

b) Bestem skæringspunktet mellem $l$ og $m$.

**Øvelse 5.7**
Bestem en ligning for linjen gennem $P(8;2)$ med normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$.

**Øvelse 5.8**
Linjen $l$ er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestem en ligning for linjen $m$, der går gennem $P(7;0)$ og står vinkelret på $l$.

b) Bestem skæringspunktet mellem $l$ og $m$.

**Øvelse 5.9**
Omskriv følgende linjers ligninger til formen $y = \alpha x + \beta$, hvis det er muligt.

a) $3x - 6y + 12 = 0$

b) $-2x + y - 3 = 0$

c) $4x - 20 = 0$

d) $5x - 3y + 9 = 0$.

**Øvelse 5.10**
Linjen $m$ står vinkelret på linjen $l$, der er givet ved ligningen

$$l: \quad y = 4x - 5.$$

a) Bestem hældningskoeffienten for $m$.

Linjen $m$ går gennem punktet $(0;15)$.

b) Bestem en ligning for $m$.

c) Bestem skæringspunktet mellem $m$ og $l$.

**Øvelse 5.11**
Bestem afstanden fra punktet $P$ til linjen $l$, når

a) $P(4;5)$ og $l: \ 3x - 4y + 2 = 0$

b) $P(-1;0)$ og $l: \ 13x + 5y - 24 = 0$

c) $P(9;2)$ og $l: \ 5x - 2y = 6$

# 6 Cirkler

En cirkel beskrives nedenfor som alle de punkter, der ligger på cirkelperiferien. Fælles for alle disse punkter er, at de har samme afstand (radius) til ét bestemt punkt (centrum). Dette kan man bruge til at opstille en ligning for cirklen:

**Sætning 6.1**

Cirklen med centrum i $C(x_0; y_0)$ og radius $r$ har ligningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \ .$$

**Bevis**

Cirklen består af alle de punkter $P(x; y)$, som har afstanden $r$ til centrum, dvs. $|CP| = r$. Men ifølge sætning 5.1 er

$$|CP| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \ ,$$

dvs.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= r \qquad \Longleftrightarrow \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2 \ . \end{aligned}$$ ■

**Eksempel 6.2** Cirklen med radius $r = 5$ og centrum i $C(4; -1)$ har ligningen

$$\begin{aligned} (x - 4)^2 + (y - (-1))^2 &= 5^2 \qquad \Longleftrightarrow \\ (x - 4)^2 + (y + 1)^2 &= 25 \ . \end{aligned}$$

Ligningen kan reduceres yderligere ved at gange parenteserne ud. Man får så

$$\begin{aligned} x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + y^2 + 1^2 + 2 \cdot y \cdot 1 &= 25 \qquad \Longleftrightarrow \\ x^2 + 16 - 8x + y^2 + 1 + 2y &= 25 \qquad \Longleftrightarrow \\ x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 &= 0 \ . \end{aligned}$$

**Eksempel 6.3** Ligningen

$$x^2 + y^2 - 6x + 14y + 42 = 0 \ ,$$

er ligningen for en cirkel. Hvis man vil finde centrum og radius for cirklen, bliver man nødt til at skrive ligningen om, så den får samme form som ligningen i sætning 6.1.

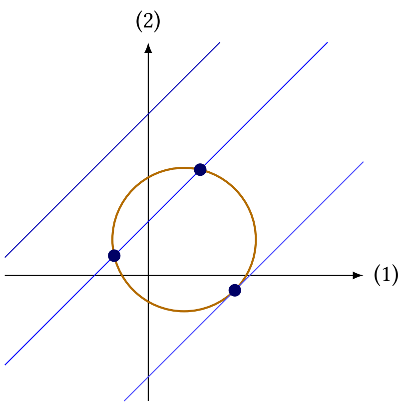
For at gøre det, skal leddene $x^2$ og $-6x$ skrives om til kvadratet på en toleddet størrelse. Det samme gælder for $y^2$ og $14y$. Hvis $x^2$ og $-6x$ kommer af kvadratet på en toleddet størrelse, så er $-6x$ det dobbelte produkt. Det giver derfor mening at beregne

$$(x-3)^2 = x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 = x^2 + 9 - 6x \ ,$$

Her kan man se, at $x^2 - 6x$ kan omskrives til $(x-3)^2 - 9$. På samme måde, kan man vise, at $y^2 + 14y = (y+7)^2 - 49$. Derfor kan cirklens ligning omskrives på følgende måde

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 6x + 14y + 42 &= 0 \quad &\Longleftrightarrow \\
x^2 - 6x + y^2 + 14y + 42 &= 0 \quad &\Longleftrightarrow \\
(x-3)^2 - 9 + (y+7)^2 - 49 + 42 &= 0 \quad &\Longleftrightarrow \\
(x-3)^2 + (y+7)^2 &= 16 \quad &\Longleftrightarrow \\
(x-3)^2 + (y-(-7))^2 &= 4^2 \ .
\end{aligned}$$

Når ligningen nu står på denne form, kan man direkte aflæse, at radius er $r = 4$, og centrum er $C(3; -7)$.




**Figur 6.1:** En linje kan skære en cirkel 0, 1 eller 2 steder.

## 6.1 Skæringspunkter mellem cirkler og linjer

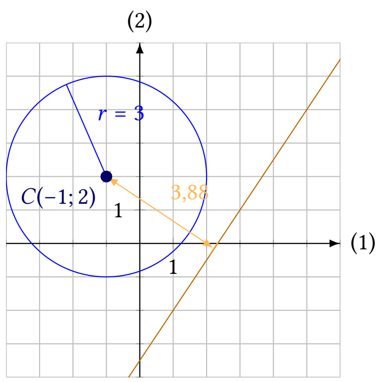
En cirkel og en linje kan have 0, 1 eller 2 skæringspunkter, se figur 6.1. Hvis cirklen og linjen har præcist ét punkt fælles, er linjen en tangent til cirklen. Hvor mange skæringspunkter, der er mellem cirklen og linjen, kan man finde ud af ved at bestemme afstanden mellem cirklens centrum og linjen. Hvis afstanden fra centrum til linjen er præcis lig med radius, så er linjen en tangent. Hvis afstanden er mindre end radius, er der to skæringspunkter, og hvis afstanden er større end radius, er der ingen skæringspunkter mellem cirklen og linjen.

**Eksempel 6.4** Her bestemmes det, om der er skæringspunkter mellem linjen med ligningen

$$3x - 2y - 7 = 0$$

og cirklen med ligningen

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 \ .$$




**Figur 6.2:** Afstanden fra centrum til linjen er større end radius.

Cirklens centrum er $C(-1; 2)$ og dens radius er $r = \sqrt{9} = 3$. Afstanden fra centrum til $l$ er

$$\operatorname{dist}(C, l) = \frac{|3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 - 7|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{13}} = \frac{14}{\sqrt{13}} \approx 3{,}88 \ .$$

Da afstanden fra centrum til linjen er større end radius, har linjen og cirklen ingen skæringspunkter (se figur 6.2).

**Eksempel 6.5** Linjen med ligningen

$$x - 3y + 2 = 0$$

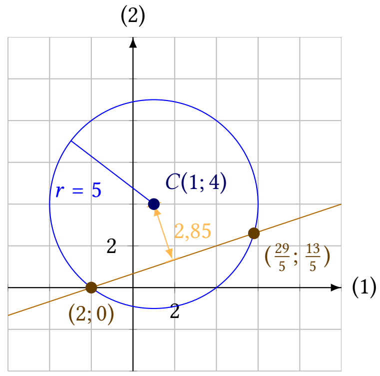
og cirklen med ligningen

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 25$$

har to skæringspunkter. Det ses af at afstanden fra cirklens centrum $C(1;4)$ til linjen er

$$\operatorname{dist}(C,l) = \frac{|1\cdot 1 - 3\cdot 4 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{1+9}} = \frac{9}{\sqrt{10}} \approx 2{,}85 \ ,$$

som er mindre end cirklens radius $r = \sqrt{25} = 5$ (se figur 6.3).



**Figur 6.3:** Afstanden fra centrum til linjen er mindre end radius.

**Eksempel 6.6** Linjen og cirklen i eksempel 6.5 skærer hinanden to steder. Her bestemmes de to skæringspunkter (se figur 6.3).

Først omskrives linjens ligning

$$x - 3y + 2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 3y - 2 \ .$$

Denne værdi for $x$ sættes ind i cirklens ligning, som bliver til

$$(3y - 2 - 1)^2 + (y-4)^2 = 25 \ .$$

Dette er en andengradsligning. Man kan løse den vha. et CAS-værktøj, hvorved man får

$$y = 0 \quad \vee \quad y = \frac{13}{5} \ .$$

De to skæringspunkter har disse værdier af $y$. Værdien af $x$ kan beregnes ud fra linjens ligning:

$$\begin{aligned} y = 0 &: \quad x = 3\cdot 0 - 2 = -2 \\ y = \frac{13}{5} &: \quad x = 3\cdot\frac{13}{5} - 2 = \frac{39}{5} - \frac{10}{5} = \frac{29}{5} \ . \end{aligned}$$

Linjen skærer altså cirklen i de to punkter $(-2;0)$ og $(\frac{29}{5};\frac{13}{5})$.

Hvis en linje er givet ved en parameterfremstilling, kan man ikke uden videre beregne afstanden fra linjen til en cirkels centrum. Er man interesseret i dette, skal man altså først skrive parameterfremstillingen om til en ligning (se eksempel 5.9).

Men er man blot interesseret i skæringspunkterne mellem linjen og cirklen er dette ikke nødvendigt. Her kan man i stedet udnytte parameterfremstillingens koordinatfunktioner.

**Eksempel 6.7** Hvis en linje er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \qquad t \in \mathbb{R} \ .$$

og en cirkel er givet ved ligningen

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16 \ ,$$

kan man finde skæringspunkterne ved at sætte linjens koordinatfunktioner

$$x = 3 + 2t \quad \text{og} \quad y = 5 - t$$

ind i linjens ligning. De to udtryk for $x$ og $y$ sættes ind i linjens ligning:

$$\begin{aligned}
(\overbrace{3 + 2t}^{x} - 2)^2 + (\overbrace{5 - t}^{y} - 1)^2 &= 16 \quad \Longleftrightarrow \\
(1 + 2t)^2 + (4 - t)^2 &= 16 \quad \Longleftrightarrow \\
1 + 4t^2 + 4t + 16 + t^2 - 8t &= 16 \quad \Longleftrightarrow \\
5t^2 - 4t + 17 &= 16 \quad \Longleftrightarrow \\
5t^2 - 4t + 1 &= 0 \ .
\end{aligned}$$

Løser man ligningen vha. et CAS-værktøj, finder man løsningerne

$$t = -\tfrac{1}{5} \quad \vee \quad t = 1 \ .$$

Man ved altså nu, at der er to skæringspunkter, idet de to løsninger er de værdier af parameteren $t$, der svarer til skæringspunkterne. For at finde punkterne skal man sætte disse værdier af $t$ ind i linjens parameterfremstilling:

$$\begin{aligned}
t = -\tfrac{1}{5} \ : &\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(-\tfrac{1}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{26}{5} \end{pmatrix} \\
t = 1 \ : &\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \ .
\end{aligned}$$

Linjen skærer altså cirklen i punkterne $\left(\frac{8}{5}; \frac{26}{5}\right)$ og $(5; 4)$.

## 6.2 Cirkeltangenter

En tangent til en cirkel er en linje, der kun har ét punkt fælles med cirklen. Dette punkt kaldes *røringspunktet*. Derudover vil en tangent til en cirkel altid stå vinkelret på linjen gennem centrum og røringspunktet.

Som omtalt ovenfor, kan man bestemme, om en given linje er en tangent, ved at beregne afstanden fra linjen til cirklens centrum. Afstanden fra centrum til en tangent er nemlig lig med radius. Alternativt kan man bestemme, om en linje givet ved en parameterfremstilling er en tangent, ved at bestemme antallet af skæringspunkter (se eksempel 6.7).

I de følgende eksempler vises, hvordan man kan *konstruere* bestemte tangenter, hvis man kender enten et punkt, eller en hældning.

**Eksempel 6.8** Punktet $P(5; -7)$ ligger på cirklen givet ved ligningen

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25 \ .$$

Her bestemmes en ligning til den tangent til cirklen, der har dette punkt som røringspunkt.

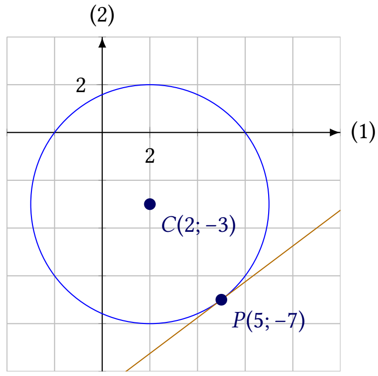
Cirklens centrum er $C(2;-3)$. Den søgte tangent står vinkelret på linjestykket $CP$, dvs. vektoren $\overrightarrow{CP}$ kan bruges som normalvektor for linjen:

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ -7-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Da man nu kender et punkt $P(5;-7)$, som linjen går igennem, og en normalvektor, $\overrightarrow{CP}$, kan linjens ligning skrives op vha. sætning 5.7:

$$\begin{aligned} 3(x-5)+(-4)\cdot(y-(-7)) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ 3x-4y-43 = 0 \; . & \end{aligned}$$

Cirklen og tangenten kan ses på figur 6.4.




**Figur 6.4:** Cirklens tangent gennem det givne punkt $P(5;-7)$.

**Eksempel 6.9** Her bestemmes røringspunkterne for de tangenter til cirklen

$$(x-2)^2+(y-1)^2 = 25 \, ,$$

der er parallelle med linjen $l$ med ligningen

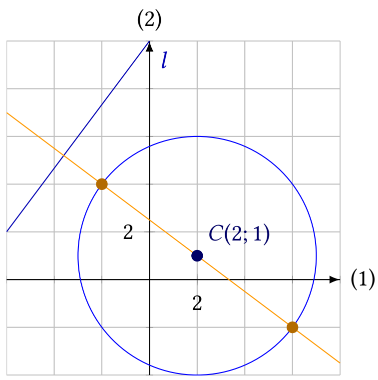
$$l : \quad 4x-3y+30 = 0 \; .$$

Cirklen må have to tangenter, der er parallelle med den givne linje. En linje gennem de to røringspunkter må gå gennem centrum og stå vinkelret på linjen $l$. Idet den står vinkelret på $l$, kan man finde en parameterfremstilling for linjen ved at bruge en normalvektor for $l$ som retningsvektor. Dvs.

$$\vec{r} = \vec{n}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Man ved at linjen gennem røringspunkterne går gennem centrum $C(2;1)$. Dette punkt giver sammen med retningsvektoren parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} , \quad t \in \mathbb{R} \, .$$




**Figur 6.5:** Røringspunkterne for de cirkeltangenter, der er parallelle med linjen $l$.

Skæringspunkterne mellem denne linje og cirklen vil være de søgte røringspunkter (se figur 6.5). Disse skæringspunkter kan bestemmes på samme måde som i eksempel 6.7 vha. linjens koordinatfunktioner

$$x = 2+4t \qquad \text{og} \qquad y = 1-3t \, ,$$

som sættes ind i cirklens ligning:

$$\begin{aligned} (2+4t-2)^2+(1-3t-1)^2 = 25 \quad &\Leftrightarrow \\ (4t)^2+(-3t)^2 = 25 \quad &\Leftrightarrow \\ 16t^2+9t^2 = 25 \quad &\Leftrightarrow \\ 25t^2 = 25 \quad &\Leftrightarrow \\ t^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \\ t = -1 \quad \vee \quad t = 1 \; . & \end{aligned}$$

De to værdier af parameteren $t$ kan nu sættes ind i parameterfremstillingen, og man får

$$t=-1:\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$$
$$t=1:\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}.$$

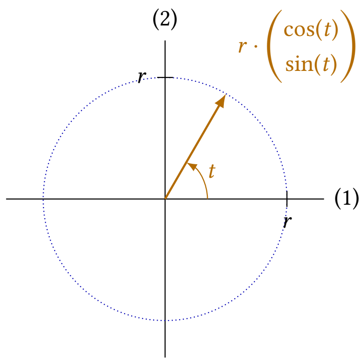
De to tangenter, der er parallelle med $l$, rører altså cirklen i punkterne $(-2;4)$ og $(6;-2)$. Hvis man vil finde ligningerne for tangenterne, kan dette gøres på samme måde som i eksempel 6.8.

## 6.3 Cirklens parameterfremstilling

Som afslutning på dette kapitel vises, hvordan cirkler også kan beskrives ved parameterfremstillinger.

Vektoren med længde $r$ og retningsvinkel $t$ har koordinaterne $r\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}$. Denne vektor er stedvektor for et punkt på cirklen med radius $r$ og centrum i $(0;0)$. Hvis vinklen $t$ løber fra $-180^\circ$ til $180^\circ$, får man beskrevet alle punkterne på cirkelperiferien. Dvs. denne cirklen kan beskrives ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix},\qquad -180^\circ<t\le180^\circ.$$



**Figur 6.6:** Parametrisering af cirklen med radius $r$ og centrum $(0;0)$.

Skal man udlede en parameterfremstilling for en cirkel med centrum i $(x_0;y_0)$ i stedet for $(0;0)$, skal man blot lægge retningsvektoren for dette punkt til parameterfremstillingen, og man får følgende sætning:

**Sætning 6.10**

Cirklen med centrum i $C(x_0;y_0)$ og radius $r$ kan beskrives ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r\cos(t)\\r\sin(t)\end{pmatrix},\qquad -180^\circ<t\le180^\circ.$$

Dette er ikke den eneste mulighed for en parameterfremstilling for cirklen. I virkeligheden vil enhver parameterfremstilling af typen

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r\cos(\omega t)\\r\sin(\omega t)\end{pmatrix}$$

kunne bruges. En parameterfremstilling som denne bruges til at beskrive et punkt, der bevæger sig rundt i en jævn cirkelbevægelse. Størrelsen af konstanten $\omega$ hænger sammen med, hvor hurtigt punktet bevæger sig rundt på cirklen.

## 6.4 Øvelser

**Øvelse 6.1**
Opstil en ligning for cirklen med centrum i $C$ og radius $r$, når

a) $C(1;4)$ og $r = 2$
b) $C(0;6)$ og $r = 7$
c) $C(-3;7)$ og $r = 1$

**Øvelse 6.2**
Bestem centrum og radius for cirklerne givet ved følgende ligninger:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 23$
b) $x^2 + y^2 + 2x = 24$
c) $x^2 + y^2 + 8x + 4y = 61$

**Øvelse 6.3**
Bestem antallet af skæringspunkter mellem linjen $l$ givet ved ligningen

$$l: \quad 4x - 7y + 8 = 0$$

og cirklen givet ved ligningen

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 16 \ .$$

**Øvelse 6.4**
Bestem skæringspunkterne mellem linjen $l$ givet ved ligningen

$$l: \quad x + y = 6$$

og cirklen givet ved ligningen

$$(x-3)^2 + (x-2)^2 = 13 \ .$$

**Øvelse 6.5**
Bestem skæringspunkterne mellem linjen $l$ givet ved parameterfremstillingen

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \ , \quad t \in \mathbb{R}$$

og cirklen givet ved ligningen

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 25 \ .$$

**Øvelse 6.6**
Cirklen med ligningen

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

går gennem de tre punkter $A(-2;6)$, $B(2;8)$ og $C(7;3)$.

a) Bestem en ligning for tangenten til cirklen i hver af disse punkter.

**Øvelse 6.7**
Cirklen med ligningen

$$(x-5)^2 + (y+1)^2 = 169 \ ,$$

har to tangenter, der er parallelle med linjen med ligningen

$$-12x + 5y + 10 = 0 \ .$$

a) Bestem røringspunkterne for disse tangenter.

b) Bestem en ligning for hver af tangenterne.