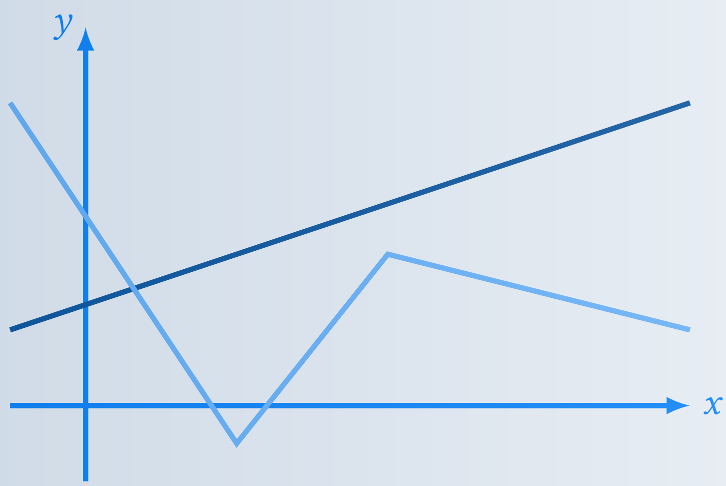
Mike Vandal Auerbach

Matematik i grundforløbet



www.mathematicus.dk

Matematik i grundforløbet
1. udgave, 2018

Disse matematiknoter er skrevet til matematikundervisningen i grundforløbet (som det ser ud efter gymnasiereformen 2017) på stx. Noterne er skrevet med det formål at have en grundbog, som kun indeholder den grundliggende matematiske teori. I forbindelse med samarbejdet med naturvidenskabeligt grundforløb (eller med andre fag) er det derfor nødvendigt at supplere med eksempler og andet materiale, der dækker konkrete anvendelser.

Disse noter er skrevet til matematikundervisning på stx og må frit anvendes til ikke-kommercielle formål.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Indhold

Variable og sammenhænge 1

Megen matematik beskæftiger sig med sammenhænge mellem forskellige størrelser. Ser man f.eks. på en cirkel, så er der en sammenhæng mellem dens radius og dens areal. Kører man en tur i en taxa, er der en sammenhæng mellem, hvor langt man kører og den pris, man skal betale for turen. Sådanne sammenhænge kan udtrykkes matematisk vha. formler og ligninger.

Når man udtrykker en sammenhæng som en formel, beskriver man de størrelser, der indgår i sammenhængen (f.eks. radius eller areal), vha. *variable.*

1.1 Variable

En *variabel* er – som navnet måske antyder – en størrelse, der varierer.[1] Det er altså en størrelse, som ikke har en fast værdi. En variabel i matematik betegnes altid med *ét* bogstav,[2] f.eks. x.

Arealet af en cirkel kan f.eks. bestemmes ved formlen

$$A = \pi \cdot r^2 \;, \tag{1.1}$$

hvor A betegner arealet, og r betegner radius. I dette eksempel er både A og r variable. Dvs. A og r har ikke nogen fast værdi.[3] Men der er dog en *sammenhæng* mellem værdierne af de to variable – hvis man ser på en cirkel med en bestemt radius, så har man også et bestemt areal. Det er denne sammenhæng, der er udtrykt i formlen.

Når der er sammenhæng mellem to variable, betyder det, at hvis man ændrer på den ene variabel, så bliver den anden også automatisk ændret. Hvis man f.eks. gør en cirkels radius større, så bliver arealet også større. I formlen (1.1) kalder man r den *uafhængige variabel*, mens A er den *afhængige variabel*, fordi dens værdi afhænger af værdien af r.

I princippet kunne man lige så godt have valgt at sige, at A er den uafhængige variabel, og r er den afhængige – for hvis man ændrer på arealet af en cirkel, så ændrer man også radius. Formlen (1.1) kan så skrives om, så den i stedet ser således ud:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \;.$$

Men det er mere naturligt at vælge radius som den uafhængige variabel, for hvis man skal tegne en cirkel, så er det radius, man tegner ud fra – ikke arealet.

[1] En størrelse, der ikke varierer, men har én fast værdi, kaldes en *konstant.*

[2] I denne sammenhæng er det vigtigt at pointere, at der i matematik er forskel på store og små bogstaver – x og X er altså to forskellige variable.

[3] Tallet π *har* derimod en fast værdi, så det er ikke en variabel, men en konstant

I mange tilfælde giver det derfor mest mening at lade en bestemt variabel være den uafhængige. Andre eksempler kunne være:

- Hvis man beregner lufttrykket p i forskellige højder h på et bjerg, så er h den uafhængige variabel. Man kan nemlig ændre højden ved at vandre op og ned ad bjerget, og lufttrykket ændrer sig så i takt med højden. Det virker derimod mærkeligt, hvis man beskriver situationen ved at sige, at man kan ændre på lufttrykket, og det fører så til at man kommer til at stå i forskellige højder.
- Indbyggertallet N i en by ændrer sig typisk med tiden t (målt i år). Her vil t være den uafhængige variabel. Det skyldes, at det er indbyggertallet der ændrer sig, fordi tiden går – og ikke årstallet som ændrer sig, fordi indbyggertallet gør.

1.2 Repræsentation

Sammenhænge mellem variable kan vises på flere forskellige måder. Man kan vise

- en tabel, hvor sammenhørende værdier af to (eller flere) variable vises side om side,
- en model, som er en formel eller en ligning, der beskriver sammenhængen, eller
- en graf, som kan vise hvordan værdien af en variabel afhænger af en anden.

Her gennemgås tabeller og modeller gennem et par eksempler. Den grafiske repræsentation gennemgås i et senere afsnit.

Tabel 1.1: Sammenhængen mellem pris og forbrug af gas.

Forbrug (m^3)	Pris (kr.)
10	1010,10
20	1082,70
30	1155,30
40	1227,90
50	1300,50
60	1373,10

Eksempel 1.1 »Hvis man er tilsluttet bygas-forsyningen betaler man 937,50 kr. om året i abonnement og 7,26 kr. pr. m^3 gas, der bliver brugt.«

Denne sammenhæng kan beskrives i en tabel, hvor man viser prisen for forskellige forbrug af gas, se tabel 1.1.

Men man kan også opstille en matematisk model, nemlig

$$P = 7{,}26 \cdot V + 937{,}50 \ ,$$

hvor P er den pris, man skal betale om året, og V er det forbrugte antal m^3 gas.

Har man en tabel, kan man i princippet kun udtale sig om de værdier, der er i tabellen. En model gør det derimod muligt at beregne alle mulige sammenhørende værdier af variablene. Ser man på tabellen fra eksempel 1.1, så kan man kun udtale sig om prisen, hvis forbruget har en helt bestemt størrelse. Modellen gør det derimod muligt at beregne prisen for et hvilket som helst forbrug.

Fordi en tabel kun indeholder en begrænset mængde data, så kan man ikke altid omsætte en tabel direkte til en model. Hvis man har en teoretisk beskrivelse af sammenhængen (f.eks. abonnement og pris pr. m^3, som i eksempel 1.1), så kan man skrive en model op og sammenligne med tabellen.

Hvis man ikke kender en teoretisk sammenhæng, så bliver man nødt til at analysere sine data for at finde frem til en model, der passer. Det findes der forskellige metoder til, én af disse er beskrevet i kapitel 3.

Eksempel 1.2 I et eksperiment har man ladet en sten falde fra en stor højde og målt, hvor langt stenen er faldet efter bestemte tidsrum. Disse måleresultater kan ses i tabel 1.2.

Tabel 1.2: Sammenhængen mellem faldtid t og strækning s for en faldende sten.

t (s)	s (m)
0	0
1	4,91
2	19,64
3	44,19
4	78,56

En matematisk analyse af disse data viser, at sammenhængen kan beskrives ved modellen

$$s = 4{,}91 \cdot t^2 ,$$

hvor t er den forbrugte tid (i sekunder), og s er den tilbagelagte strækning (i meter).[4]

[4]Denne sammenhæng blev fundet eksperimentelt af Galileo Galilei i slutningen af 1500-tallet.[3]

Bemærk i øvrigt, at i modellen fra eksempel 1.2 er tiden den uafhængige variabel, mens strækningen er den afhængige. Det skyldes, at stenen tilbagelægger en større og større strækning, efterhånden som tiden går. Det er derimod ikke sådan, at man kan ændre på stenens faldhøjde og derved skrue tiden frem og tilbage.

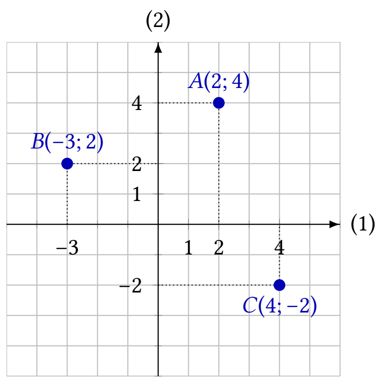
1.3 Grafisk repræsentation

Hvis man har to variable, der afhænger af hinanden, er det muligt at tegne et billede, der illustrerer sammenhængen. Et sådant billede kaldes en *graf*, og den tegnes i et *koordinatsystem*.

Koordinatsystemer

Et koordinatsystem kan forstås som en slags net, der lægges ud over planen, og som man bruger til at beskrive, hvor punkter befinder sig.

Man starter med at tegne to akser, første- og andenaksen (ofte kaldet x- og y-aksen), der står vinkelret på hinanden. De to akser er tallinjer, der skærer hinanden i deres nulpunkter, jf. figur 1.3. Skæringspunktet mellem de to akser kaldes *origo*.

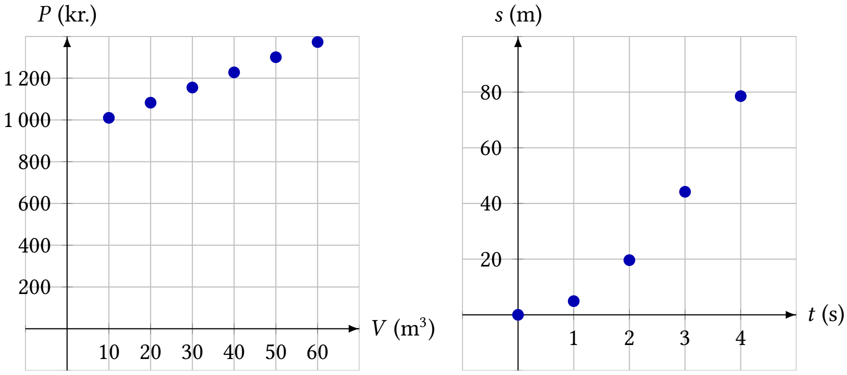


Figur 1.3: De tre punkter $A(2;4)$, $B(-3;2)$ og $C(4;-2)$ indtegnet i et koordinatsystem.

Et punkt i et koordinatsystem befinder sig altid lodret ud for et tal på førsteaksen og vandret ud for et tal på andenaksen. Disse to værdier kaldes punktets *første-* og *andenkoordinat*. Et punkt består altså af et såkaldt koordinat*sæt* $(x; y)$, der fortæller, hvor punktet befinder sig i koordinatsystemet (se figur 1.3). Origo har f.eks. koordinaterne $(0;0)$.

Fra tabeller til grafer

En tabel kan indtegnes i et koordinatsystem som en række punkter ved at lade førstekoordinaten svare til den uafhængige variabel og andenkoordinaten svare til den tilhørende værdi af den afhængige variabel.



(a) Forbrug og pris. (b) Tid og strækning.

Figur 1.4: Data fra tabel 1.1 og 1.2 indsat i hver deres koordinatsystem.
Begge afbildninger tyder på, at der er en pæn sammenhæng – punkterne i det første koordinatsystem ser ud til at ligge på en ret linje, mens de i det sidste ligger på en krummende kurve.

Eksempel 1.3 Tabellerne fra eksempel 1.1 og 1.2 viser sammenhængene mellem hhv. gasforbrug og pris, og tid og tilbagelagt strækning. Tallene fra tabel 1.1 kan omskrives til en række punkter:

$$(10; 1010{,}10)\ , \quad (20; 1082{,}70)\ , \quad (30; 1155{,}30)\ ,$$
$$(40; 1227{,}90)\ , \quad (50; 1300{,}50)\ , \quad (60; 1373{,}10)\ ,$$

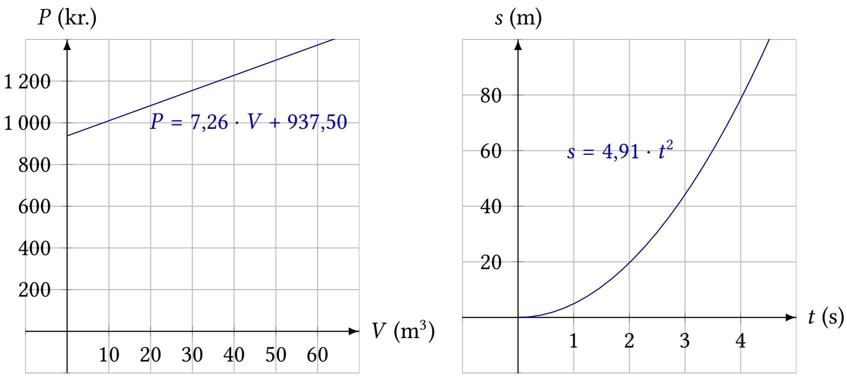
hvor førstekoordinaten er forbruget, og andenkoordinaten er prisen. Disse punkter kan derefter indsættes i et koordinatsystem, se figur 1.4(a).

På samme måde kan tabel 1.2 oversættes til koordinater, og punkterne indsættes i et koordinatsystem. Det giver billedet på figur 1.4(b).

I det første koordinatsystem (figur 1.4(a)) ser punkterne ud til at ligge på en ret linje. Det er ikke tilfældet i det andet koordinatsystem (figur 1.4(b)), men punkterne ser dog ud til at ligge på en pæn kurve. Det kunne derfor i begge tilfælde se ud som om, der er en simpel model, der ligger bag de to afbildninger.

De modeller, der ligger bag de to afbildninger på figur 1.4 er beskrevet i eksempel 1.1 og 1.2. De to modeller kan beskrives som grafer, se figur 1.5. Selve modellerne er de to ligninger

$$P = 7{,}26 \cdot V + 937{,}50 \quad \text{og} \quad s = 4{,}91 \cdot t^2\ .$$



(a) Forbrug og pris. (b) Tid og strækning.

Figur 1.5: Grafer over de to modeller fra eksempel 1.1 og 1.2.

Graferne består så af alle de punkter, hvor første- og andenkoordinaten tilsammen passer ind i den tilhørende ligning.

En graf er altså en billedlig beskrivelse af en ligning, der indeholder to variable. I princippet indeholder grafen og ligningen de samme informationer.

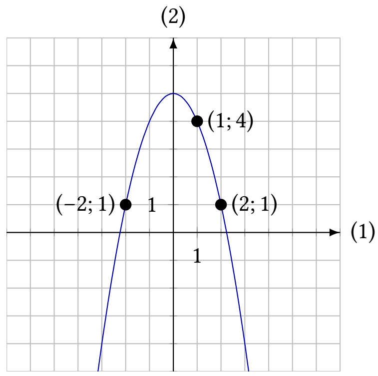
Eksempel 1.4 Ligningen $y = 5 - x^2$ beskriver en kurve i et koordinatsystem, se figur 1.6. På figuren kan man se, at punktet $(1; 4)$ ligger på grafen. Det kan man også se af ligningen, idet man kan indsætte $x = 1$ og få

$$y = 5 - 1^2 = 4 \ .$$

Man kan også bruge grafen til at løse ligningen $5 - x^2 = 1$. Dette svarer nemlig til at sætte $y = 1$ og finde de tilhørende værdier af x. Som man kan se på figuren, er der to punkter med $y = 1$. Dvs.

$$5 - x^2 = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -2 \ \vee \ x = 2 \ .$$

Det kunne man også have fundet ud af ved at løse ligningen algebraisk.



Figur 1.6: Grafen for $y = 5 - x^2$.

Mere generelle kurver

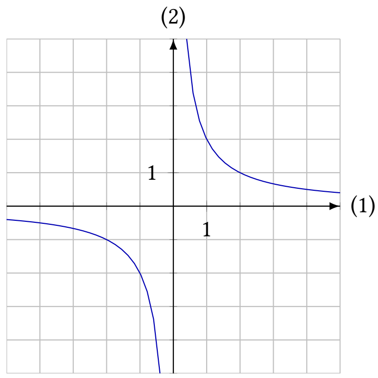
I de ligninger, der ind til nu er blevet præsenteret, står den afhængige variabel isoleret på venstre side:

$$P = 7{,}26 \cdot V + 937{,}50 \ , \quad s = 4{,}91 \cdot t^2 \quad \text{og} \quad y = 5 - x^2 \ .$$

I princippet kan man sagtens forestille sig ligninger, hvor det ikke er klart, hvad der skal kaldes uafhængig og afhængig variabel, f.eks.

$$x \cdot y = 2 \quad \text{eller} \quad y^2 - x = 3 \ .$$

Disse ligninger kan også omsættes til kurver i et koordinatsystem. Kurverne vil så bestå af de punkter, der passer ind i ligningerne.



Figur 1.7: Kurven med ligningen $x \cdot y = 2$.

Eksempel 1.5 De punkter, der ligger på kurven $x \cdot y = 2$ er de punkter, hvor produktet af første- og andenkoordinaterne giver 2. F.eks.

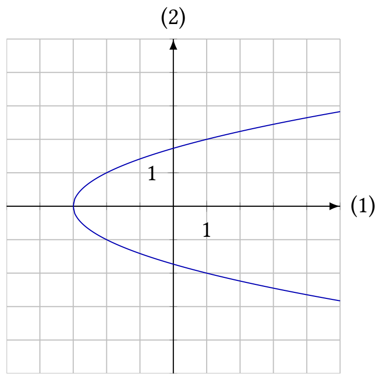
$$(1; 2) \ , \quad (-2; -1) \quad \text{og} \quad (4; 0{,}5) \ .$$

Tegner man kurven får man billedet på figur 1.7.

Der er i øvrigt ingen punkter på kurven med førstekoordinat 0. Det skyldes, at sætter man $x = 0$ får man ligningen

$$0 \cdot y = 2 \ ,$$

som ingen løsninger har. Af samme grund findes der heller ingen punkter på kurven med andenkoordinat 0.



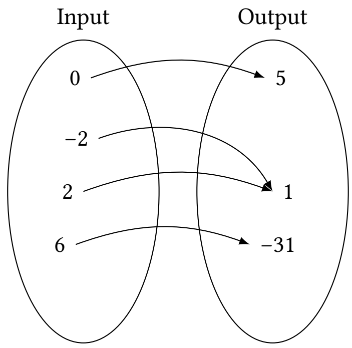
Figur 1.8: Kurven med ligningen $y^2 - x = 3$.

Eksempel 1.6 Kurven med ligningen $y^2 - x = 3$ kan ses på figur 1.8.

Denne kurve er ikke en graf. Det skyldes, at der findes forskellige punkter på kurven med samme førstekoordinat, f.eks. $(1; 2)$ og $(1; -2)$. For at at kurve kan kaldes en graf, må dette ikke være tilfældet.

1.4 Funktioner

En *funktion* i matematik er en form for regneoperation. Man kan beskrive en funktion som en slags maskine, der til ethvert input giver et bestemt output – dvs. en funktion er en sammenhæng mellem tal.



Figur 1.9: Funktionen »sæt tallet i anden, og træk det fra fem«.

På figur 1.9 er det vist, hvordan funktionen »sæt tallet i anden, og træk det fra fem« opfører sig. Man kan se hvilket output man får for 4 forskellige tal. Som man kan se, kan forskellige tal godt give det samme output – men omvendt er det ikke tilladt at det samme input kan give forskellige output.

Fordi det er besværligt at beskrive funktioner på denne måde, har man fundet på en matematisk notation, der gør det nemmere. Funktionen selv betegnes med et bogstav, f.eks. f. I stedet for »sæt tallet i anden, og træk det fra fem«, kan man altså skrive f. Bogstavet f indeholder i sig selv ingen information om, hvad funktionen f gør. Hvis man vil forklare det, kan man skrive en såkaldt *forskrift* op:

$$f(x) = 5 - x^2 .$$

Denne notation betyder, at hvis man sender et tal (x) gennem funktionen f, bliver der gjort det ved tallet, som er beskrevet på højre side. $f(x)$ læses »f af x«, og parentesen skal altså ikke forstås som en regneparentes, men en angivelse af, at det er tallet x som sendes gennem funktionen f. Det tal man får ud af regneoperationen kaldes funktions*værdien.*

Eksempel 1.7 Her ses på funktionen $f(x) = x^2 - 3$.

Funktionsværdierne $f(-1)$ og $f(4)$ beregnes således:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2 \\ f(4) &= 4^2 - 3 = 16 - 3 = 13 . \end{aligned}$$

Det er her vigtigt at bemærke, at x'et i funktionsudtrykket $f(x)$ egentlig bare er en »pladsholder«, dvs. det viser, hvor man skal erstatte med tal, når man beregner en funktionsværdi. Faktisk kan man ikke kun sætte tal ind på x'ets plads, man kan også sætte andre variable ind – eller hele regneudtryk.

Eksempel 1.8 Her ses igen på funktionen $f(x) = x^2 - 3$. Men nu beregnes $f(t)$ og $f(x-1)$, dvs. man skal sætte hhv. t og $x-1$ ind i stedet for x:

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 - 3 \\ f(x-1) &= (x-1)^2 - 3 = x^2 + 1^2 - 2 \cdot x \cdot 1 - 3 = x^2 - 2x - 2 . \end{aligned}$$

Hvis man sender et variabeludtryk gennem en funktion, får man altså et variabeludtryk ud igen.

Hvis man vil have et overblik over, hvordan en funktion opfører sig, kan det være nyttigt at tegne dens graf.

Eksempel 1.9 Her ses på en funktion

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{x+2} .$$

Grafen for funktionen er det samme som grafen for ligningen $y = f(x)$, dvs.

$$y = 3 \cdot \sqrt{x+2}\ ,$$

og den kan ses på figur 1.10.

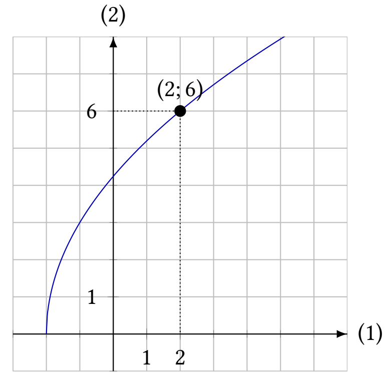
Som det kan ses på figuren går funktionens graf igennem punktet $(2; 6)$, dvs.

$$f(2) = 6\ .$$

Dette kunne man også have regnet ud ved at indsætte 2 i funktionen f:

$$f(2) = 3 \cdot \sqrt{2+2} = 3 \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6\ .$$

Men det kan altså også aflæses direkte på grafen.



Figur 1.10: Grafen for $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x+2}$.

Hvis man omvendt kender funktionsværdien, kan man finde ud af, hvilken værdi af den uafhængige variabel, der giver denne funktionsværdi. Dette kan gøres ved aflæsning, men problemet kan også løses ved udregning, som i følgende eksempel.

Eksempel 1.10 Hvornår antager funktionen $g(x) = 2x + 1$ værdien 17?

Svaret på dette spørgsmål finder man frem til ved at løse ligningen $g(x) = 17$. Det gøres på følgende måde:

$$\begin{aligned} g(x) &= 17 &\Leftrightarrow \\ 2x + 1 &= 17 &\Leftrightarrow \\ 2x &= 16 &\Leftrightarrow \\ x &= 8\ . \end{aligned}$$

Svaret på spørgsmålet er altså, at $g(x) = 17$, når $x = 8$.

Definitions- og værdimængde

Funktionen i eksempel 1.9, $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x+2}$, kan ikke anvende alle værdier af x som input. Prøver man f.eks. at beregne $f(-5)$ får man

$$f(-5) = 3 \cdot \sqrt{-5+2} = 3 \cdot \sqrt{-3}\ ,$$

men da man ikke kan tage kvadratroden af negative tal, så giver dette ingen mening. Denne funktionsværdi eksisterer derfor ikke.

Ser man på grafen for denne funktion (figur 1.10), kan man se, at grafen først starter ved $x = -2$. Det skyldes, at funktionsudtrykket kun giver mening for tal større end eller lig med -2. Man siger her, at *definitionsmængden* for f består af alle de tal, som er større end eller lig med -2. Hvis man vil understrege dette, kan man skrive det efter forskriften på denne måde:

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{x+2}\ , \quad x \geq -2\ .$$

Nogle gange angiver man en definitionsmængde, som består af færre tal end de tal der rent faktisk kan sættes ind i funktionen. Det kan f.eks. være fordi funktionen er udtryk for en matematisk model, hvor man kun vil se på bestemte tal.

Eksempel 1.11 Befolkningstallet i en by i årene 2000–2017 kan modelleres vha. funktionen

$$b(t) = 24 \cdot t + 5309 \ , \quad 0 \leq t \leq 17 \ ,$$

hvor t er antal år efter år 2000.

Her viser $0 \leq t \leq 17$, at definitionsmængden er tallene fra 0 til 17. Dette skyldes at modellen kun gælder inden for disse årstal. Så selv om man sagtens kan sætte andre værdier (f.eks. −10 eller 123) ind på t's plads, så er det ikke tilladt i denne situation.

Tegner man grafen, så skal den derfor først starte ud for $t = 0$, og den skal slutte ud for $t = 17$.

Ser man igen på funktionen

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{x + 2} \ , \quad x \geq -2 \ ,$$

kan man se, at funktionsværdierne aldrig bliver negative. Det skyldes, at kvadratroden altid vil give et positivt tal. Derfor ligger grafen på figur 1.10 over førsteaksen. De tal, som man kan få som funktionsværdier, kaldes *værdimængden* af en funktion. I dette tilfælde er værdimængden for f de positive tal.

Ser man på grafen, så består definitionsmængden af alle de tal på førsteaksen, som grafen dækker. Værdimængden består så af alle de tal på andenaksen, som grafen dækker.

1.5 Proportionalitet

En af de typer af sammenhænge, der kan være mellem variable, er *proportionalitet*. Det defineres på følgende måde.

Definition 1.12: Proportionalitet

Hvis man lader k være en konstant ($k \neq 0$) har man:

1. y er *ligefrem proportional* med x betyder, at $y = k \cdot x$.
2. y er *omvendt proportional* med x betyder, at $y = \frac{k}{x}$.

Konstanten k kaldes *proportionalitetskonstanten*.

Når man taler om ligefrem proportionalitet, udelader man ofte ordet »ligefrem«. Hvis der i en tekst står »y er proportional med x«, menes der altså » …ligefrem proportional med …«.[5]

[5] Af og til kalder man også ligefrem proportionalitet for *direkte proportionalitet*.

Hvis man bytter lidt rundt på formlerne i definition 1.12 kan de to proportionalitetsformer også udtrykkes på denne måde:

1. y er ligefrem proportional med x, hvis $\frac{y}{x} = k$.
2. y er omvendt proportional med x, hvis $y \cdot x = k$.

Desuden kan man se, at hvis $y = k \cdot x$, er $x = \frac{1}{k} \cdot y$. Dvs. at hvis y er ligefrem proportional med x (med proportionalitetskonstant k) er x også ligefrem proportional med y (med proportionalitetskonstant $\frac{1}{k}$).

For omvendt proportionalitet har man, at hvis $y = \frac{k}{x}$ gælder også $x = \frac{k}{y}$. Dvs. hvis y er omvendt proportional med x, er x også omvendt proportional med y (med den samme proportionalitetskonstant).

Eksempel 1.13 Har man et mobiltelefonabonnement med fri SMS, hvor man kun betaler for opkald, og minutprisen er 0,70 kr., vil den samlede udgift være ligefrem proportional med antallet af talte minutter.

Kalder man udgiften for U og antallet af talte minutter for M har man nemlig:

$$U = 0{,}70 \cdot M \ .$$

Her er proportionalitetskonstanten 0,70.

Eksempel 1.14 Hvis man kører fra Odense til København (en strækning på ca. 160 km), vil rejsetiden være omvendt proportional med hastigheden, man kører med.

Hvis tiden t måles i timer og hastigheden v måles i kilometer pr. time, vil proportionalitetskonstanten være 160, og man får

$$t = \frac{160}{v} \ .$$

Af denne sammenhæng ses det (som man skulle forvente), at hvis man kører 80 km/h tager det 2 timer at køre fra Odense til København, og hvis man kører 160 km/h, tager det kun 1 time.

Eksempel 1.15 »T er proportional med kvadratet på p og omvendt proportional med s.«

Denne sammenhæng kan under ét udtrykkes som

$$T = k \cdot \frac{p^2}{s} \ ,$$

hvor k er proportionalitetskonstanten. [6]

[6] Bemærk her, at »kvadratet på p« altså betyder p^2.

1.6 Skæringspunkter

Hvis man analyserer grafen for en funktion, kan der være flere punkter, det er interessant at kigge på. F.eks. kunne det være interessant at se på, hvor grafen skærer koordinatsystemets akser.

På førsteaksen er alle andenkoordinaterne 0. Hvis grafen skærer førsteaksen, svarer det altså til, at funktionsværdien er 0. Værdien af førstekoordinaten i dette skæringspunkt kan man derfor finde ved at løse ligningen $f(x) = 0$. På andenaksen er det sådan at alle førstekoordinaterne er 0. Grafens skæringspunkt med andenaksen er altså funktionsværdien, der svarer til førstekoordinaten 0, dvs. $f(0)$.

Eksempel 1.16 Funktionen f har forskriften

$$f(x) = -3x + 12 \; .$$

Skæringen med førsteaksen kan så findes ved at løse

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -3x + 12 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 4 \; .$$

Dvs. grafen skærer førsteaksen i $(4; 0)$.

Skæringen med andenaksen er i

$$y = f(0) = -3 \cdot 0 + 12 = 12 \; ,$$

dvs. grafen skærer andenaksen i $(0; 12)$.

Hvis man tegner graferne for to forskellige funktioner, er det også muligt, at de to grafer skærer hinanden. Man kan så finde skæringspunktet ved at løse den ligning, der fremkommer ved at sætte de to funktionsudtryk lig hinanden.

Dette skyldes, at der hvor graferne skærer hinanden, må både funktionsværdien og den uafhængige variabel have samme værdi for begge funktioner.

Fremgangsmåden illustreres nemmest ved et eksempel.

Eksempel 1.17 De to funktioner

$$f(x) = x - 5 \qquad \text{og} \qquad g(x) = -2x + 1$$

har grafer, der skærer hinanden (se figur 1.11).

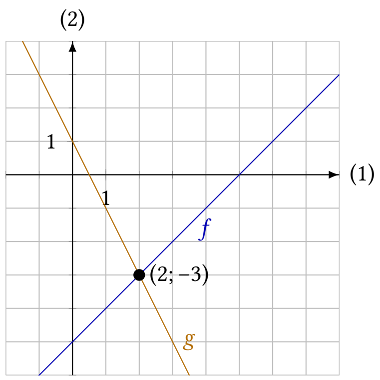
Koordinaterne til skæringspunktet bestemmer man ved at løse ligningen $f(x) = g(x)$, hvorved man får

$$\begin{aligned} x - 5 &= -2x + 1 && \Leftrightarrow \\ 3x &= 6 && \Leftrightarrow \\ x &= 2 \; . \end{aligned}$$

Nu er førstekoordinaten x bestemt. For at finde punktet, skal man også kende andenkoordinaten y. Den bestemmes ved at sætte den fundne førstekoordinat ind i ét af funktionsudtrykkene

$$y = f(5) = 2 - 5 = -3 \; .$$

De to grafer skærer altså hinanden i $(2; -3)$, som det også fremgår af figur 1.11.



Figur 1.11: Skæringspunktet for graferne for de to funktioner $f(x) = x - 5$ og $g(x) = -2x + 1$.

Grafisk løsning af ligninger

Man kan finde skæringspunkter mellem grafer ved at løse en ligning. Omvendt kan man også løse en ligning ved at aflæse skæringspunkter.

Har man en ligning, kan man nemlig opfatte venstre og højre side som to funktionsudtryk. Der hvor de to er lig hinanden (dvs. der hvor graferne skærer hinanden), finder man ligningens løsning(er).

Eksempel 1.18 Ligningen

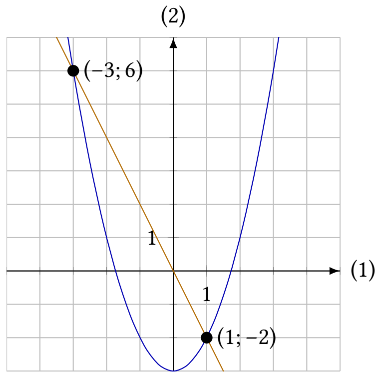
$$x^2 - 3 = -2x$$

kan løses ved at tegne graferne for

$$y = x^2 - 3 \qquad \text{og} \qquad y = -2x \ .$$

På figur 1.12 kan man se, at de to grafer skærer hinanden i $(-3; 6)$ og $(1; -2)$. Ligningen har derfor de to løsninger

$$x = -3 \qquad \vee \qquad x = 1 \ .$$



Figur 1.12: Løsningen til $x^2 - 3 = -2x$ kan aflæses som førstekoordinaten til skæringspunkterne.

1.7 Øvelser

Øvelse 1.1
Herunder er angivet en række begreber, der er helt centrale når man skal beskrive *sammenhænge* ved hjælp af matematik. Forklar hvad hvert af begreberne betyder.

a) Uafhængig variabel
b) Afhængig variabel
c) Konstant

Øvelse 1.2
Sammenhængen mellem en cirkels areal A og dens radius r er givet ved følgende udtryk

$$A = \pi \cdot r^2 \ .$$

a) Angiv hvilke størrelser der er *variable* og hvilke der er *konstante*.
b) Hvilken variabel er den *uafhængige variabel* i udtrykket?
c) Hvilken variabel er den *afhængige variabel* i udtrykket?

Øvelse 1.3
En sammenhæng mellem to variable x og y er givet ved udtrykket

$$y = \frac{10}{1+x} \ .$$

a) Udfyld en tabel med sammenhørende værdier for x- og y-værdier.
b) Skitser en graf på baggrund af tabellen.
c) Tegn grafen vha. et CAS-værktøj, og sammenlign med din skitse.
d) Forklar den grafiske betydning af konstanten 10.

Øvelse 1.4
En sammenhæng mellem to variable t og P er givet ved udtrykket

$$P = \frac{15}{1+t} + 20 \ .$$

a) Udfyld en tabel med sammenhørende værdier for t- og P-værdier.
b) Skitser en graf på baggrund af tabellen.
c) Tegn grafen vha. et CAS-værktøj, og sammenlign med din skitse.
d) Forklar den grafiske betydning af konstanterne 15 og 20.

Øvelse 1.5
En funktion har forskriften $f(x) = 3x - 14$.

a) Bestem funktionsværdien for $x = 2$ og $x = 10$.
b) Bestem for hvilken x-værdi funktionsværdien er 78.

Øvelse 1.6
En funktion har forskriften

$$g(x) = \frac{x}{x-2} \ .$$

a) Beregn $g(1)$
b) Beregn $g(-2)$.
c) Løs ligningen $g(x) = 2$.

Øvelse 1.7
I definitionen af en funktion kræves, at man til enhver værdi af x kan finde præcis én dertil svarende værdi af y.

Hvilke af disse kan betragtes som funktioner?

a) Til ethvert tal x lader man svare de tal y, der går op i x.
b) Til ethvert tal x lader man svare kvadratet på x.
c) Til ethvert tal x lader man svare de tal y, hvor $y^2 = x$.
d) Til ethvert tal x lader man svare de tal y, der er større end x.
e) Til ethvert tal x lader man svare de tal y, der er lig med x.

Øvelse 1.8
»Oversæt« følgende regneopskrifter til en funktionsforskrift.

a) Læg fire til tallet.
b) Gang tallet med to, og læg fem til.
c) Kvadrer tallet, gang med syv, og træk én fra.
d) Læg fire til tallet, og tag kvadratroden.
e) Kvadrer tallet, og gang med to. Læg herefter fire gange tallet til, og træk fem fra.

Øvelse 1.9
Angiv definitionsmængderne for hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = 2x - 3$
b) $f(x) = \sqrt{x-5}$
c) $f(x) = \dfrac{3}{x-6}$
d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
e) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x-3}}$
f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$

Øvelse 1.10
Tegn graferne for de følgende funktioner, og bestem deres værdimængder:

a) $f(x) = 2x - 1\ , \quad -4 \le x \le 7$
b) $g(x) = x^2 - 4x + 1\ , \quad 0 < x \le 12$
c) $h(x) = \sqrt{x^2+7}\ , \quad -3 < x < 3$

Øvelse 1.11
Beskriv sammenhængen mellem x og y med en formel, når

a) y er ligefrem proportional med x med proportionalitetskonstant 4.

b) y er omvendt proportional med x med proportionalitetskonstant 9.

Øvelse 1.12
T er ligefrem proportional med S, og når $S = 4$ er $T = 12$.

Beskriv sammenhængen mellem T og S vha. en formel.

Øvelse 1.13
Udfyld de manglende felter i tabellen herunder, når det er givet, at y og x er ligefrem proportionale.

x	1	3		9
y		18	42	

Øvelse 1.14
Udfyld de manglende felter i tabellen herunder, når det er givet, at y og x er omvendt proportionale.

x	1	4		16
y			4	2

Øvelse 1.15
De to funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = 3x + 8$$
$$g(x) = 7x - 4$$

Bestem skæringspunktet mellem graferne for de to funktioner.

Øvelse 1.16
Løs de følgende ligninger grafisk:

a) $3x - 2 = 4x + 7$

b) $x^2 + 5 = x - 1$

c) $\dfrac{10}{x-6} = x + 3$

Lineære funktioner 2

Funktioner kan grupperes efter, hvordan deres forskrifter ser ud.[1] F.eks. har funktionerne

$$f(x) = 3x + 2, \qquad g(x) = 7x - 5 \qquad \text{og} \qquad h(x) = -4x + 3$$

forskrifter, som følger samme mønster.

[1]De kan også grupperes efter, hvordan deres grafer ser ud, men det er to sider af samme sag.

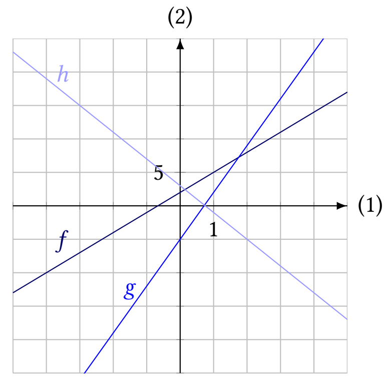
Funktioner, der ser ud som f, g og h ovenfor, kalder man *lineære funktioner*.

Definition 2.1

En *lineær funktion* er en funktion af typen

$$f(x) = ax + b\,,$$

hvor a og b er to tal.



Figur 2.1: Graferne for de tre lineære funktioner f, g og h.

Det viser sig, at når man tegner grafen for en lineær funktion i et koordinatsystem, får man en ret linje; det er derfor funktionerne kaldes lineære (se figur 2.1).

2.1 Hældning og skæring med akserne

Ud fra figur 2.1 er det i princippet muligt at aflæse værdierne af tallene a og b i funktionernes forskrifter. Der gælder nemlig følgende sætning.

Sætning 2.2

For en lineær funktion $f(x) = ax + b$ gælder:

1. Hvis den uafhængige variabel x vokser med 1, vil funktionsværdien $f(x)$ vokse med a.
2. Funktionens graf skærer andenaksen i b.

Bevis
Når x vokser med 1, vokser funktionsværdien fra $f(x)$ til $f(x+1)$. Funktionsværdien vokser derfor med

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= (a(x+1) + b) - (ax + b) \\ &= ax + a + b - ax - b \\ &= a\,. \end{aligned}$$

På andenaksen er $x = 0$, dvs. skæringen med andenaksen er

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b \ . \qquad \blacksquare$$

For lineære funktioner gælder altså, at funktionsværdien vokser med et fast tal (a), hver gang x vokser med 1. Dette er årsagen til, at grafen bliver en ret linje. Jo større a er, jo hurtigere vokser $f(x)$, og linjen bliver så mere stejl. Tallet a kalder man derfor for linjens *hældning* eller *hældningskoefficient*.[2]

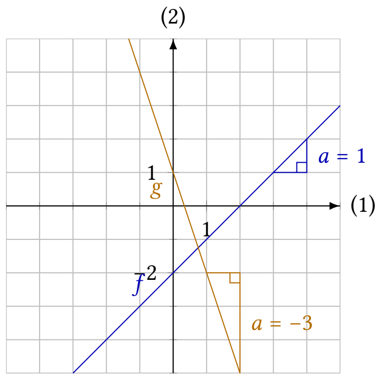
[2]Husk, at en koefficient er en konstant, som er ganget på en variabel.

Hvis a er et negativt tal, aftager $f(x)$, når x vokser, og linjen vil derfor hælde den anden vej; funktionen er aftagende.

Sætning 2.3

For en lineær funktion $f(x) = ax + b$ fortæller *hældningskoefficienten* a følgende:

1. Hvis $a > 0$ er funktionen voksende.
2. Hvis $a < 0$ er funktionen aftagende.



Figur 2.2: Aflæsning af tallene a og b.

Eksempel 2.4 På figur 2.2 ses graferne for to lineære funktioner f og g.

Grafen for f skærer andenaksen i -2, og når man går 1 til højre, skal man gå 1 op for at finde grafen igen, dvs. hældningskoefficienten er $a = 1$.

f har derfor forskriften $f(x) = 1 \cdot x + (-2)$, hvilket reduceres til

$$f(x) = x - 2 \ .$$

Grafen for g skærer andenaksen i 1, og går man 1 ud langs førsteaksen, skal man gå 3 ned ad andenaksen, dvs. hældningen er -3. Forskriften er så

$$g(x) = -3x + 1 \ .$$

I det specielle tilfælde, hvor hældningskoefficienten for en lineær funktion er 0, er funktionen konstant; dvs. grafen er en linje parallel med førsteaksen. En sådan linje har af gode grunde ingen skæringspunkter med førsteaksen.[3]

[3]Med mindre linjen falder sammen med førsteaksen, for så har den uendeligt mange punkter fælles med denne.

En lineær funktion med en hældningskoefficient, der ikke er 0, har til gengæld en graf, der skærer førsteaksen. Dette skæringspunkt kan man regne sig frem til ud fra forskriften.

Sætning 2.5

Grafen for den lineære funktion $f(x) = ax + b$ skærer førsteaksen i punktet $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

Bevis

På førsteaksen er andenkoordinaten 0.[4] Grafen for f skærer derfor førsteaksen, hvor

[4]Husk, at alle punkter på førsteaksen har formen $(x; 0)$, og alle punkter på andenaksen har formen $(0; y)$.

$$f(x) = 0 \ ,$$

dvs.

$$ax + b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ax = -b \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a} \ .$$

Grafen skærer altså førsteaksen i punktet $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$. $\blacksquare$

Eksempel 2.6 Den lineære funktion $f(x) = 4x - 12$ skærer andenaksen i $b = -12$ og har hældningen $a = 4$. Den skærer derfor førsteaksen i

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{-12}{4} = 3 \,.$$

Funktionens graf skærer altså førsteaksen i punktet $(3; 0)$ og andenaksen i punktet $(0; -12)$.

2.2 Beregning af forskriften

Hvis man har to punkter på grafen for en lineær funktion, er funktionen entydigt bestemt.[5] Der er altså en sammenhæng mellem de to punkters koordinater og de to tal a og b.

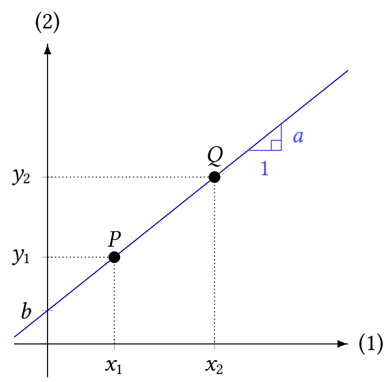
[5]Der går nemlig kun én bestemt ret linje gennem to givne punkter.

Det viser sig, at denne sammenhæng er givet ved to simple formler.

Sætning 2.7

Hvis grafen for $f(x) = ax + b$ går gennem de to punkter $P(x_1; y_1)$ og $Q(x_2; y_2)$, er

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \,.$$



Figur 2.3: De to punkter P og Q på grafen for $f(x) = ax + b$.

Bevis

På figur 2.3 ses grafen for funktionen $f(x) = ax + b$ og de to punkter $P(x_1; y_1)$ og $Q(x_2; y_2)$.

Da punktet P ligger på linjen, er $f(x_1) = y_1$, og da Q ligger på linjen, er $f(x_2) = y_2$. Dette giver de to ligninger

$$\begin{aligned} y_2 &= ax_2 + b \,, \\ y_1 &= ax_1 + b \,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Trækker man den nederste ligning fra den øverste, får man

$$y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) \,,$$

som kan reduceres til

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 \,.$$

Nu sættes a uden for parentes, og man får

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a \,,$$

og formlen er så bevist. ■

Eksempel 2.8 En lineær funktion f har en graf, der går gennem punkterne $P(3; 5)$ og $Q(6; -7)$. Hvad er funktionens forskrift?

For at svare på dette spørgsmål, ser man på de to punkter. Heraf fremgår det, at

$$x_1 = 3 \,, \quad y_1 = 5 \,, \quad x_2 = 6 \quad \text{og} \quad y_2 = -7 \,.$$

Nu kan man bruge formlerne i sætning 2.7, og man får

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7-5}{6-3} = \frac{-12}{3} = -4 \ .$$

Funktionens forskrift er så $f(x) = -4x + b$, hvor b endnu er ukendt.

Tallet b kan man finde ved at indsætte koordinaterne til ét af de kendte punkter i funktionens forskrift. Idet grafen for f går gennem $P(3;5)$, ved man, at $f(3) = 5$, hvilket giver

$$\underbrace{-4 \cdot 3 + b}_{f(3)} = 5 \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 5 + 4 \cdot 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 17 \ .$$

Funktionens forskrift er altså $f(x) = -4x + 17$.

Man kan også udlede følgende sætning, der giver forskriften direkte, når man kender hældningskoefficienten:

Sætning 2.9

Hvis den lineære funktion f har hældningskoefficienten a, og funktionens graf går gennem punktet $(x_1; y_1)$, så er funktionens forskrift givet ved:

$$f(x) = a(x - x_1) + y_1 \ .$$

Bevis
En lineær funktion har den generelle forskrift $f(x) = ax + b$. Hvis punktet $(x_1; y_1)$ ligger på grafen for f, må

$$y_1 = ax_1 + b \qquad \Leftrightarrow \qquad b = y_1 - ax_1 \ .$$

Dette udtryk for b indsættes i forskriften for f:

$$f(x) = ax + (y_1 - ax_1) \ .$$

Regner man på dette udtryk, får man

$$f(x) = ax + y_1 - ax_1 = ax - ax_1 + y_1 = a(x - x_1) + y_1 \ ,$$

hvorved sætningen er bevist. ■

Eksempel 2.10 Hvis lineær funktion f har en graf, der går gennem punkterne $P(3;5)$ og $Q(6;-7)$, er hældningskoefficieten $a = -4$ (se eksempel 2.8).

Funktionens forskrift kan så findes ved at indsætte én af de to punkter i forskriften fra sætning 2.9. Her vælges punktet $Q(6;-7)$:

$$f(x) = a(x - x_1) + y_1 = -4(x - 6) - 7 = -4x + 24 - 7 = -4x + 17 \ .$$

Man finder altså den samme forskrift som i eksempel 2.8.

2.3 Lineær vækst

Lineære funktioner vokser på følgende måde[6]

[6] Denne sætning kan man også argumentere for ud fra sætning 2.2.

Sætning 2.11

For en lineær funktion $f(x) = ax + b$ gælder, at når x vokser med Δx, så vokser funktionsværdien med $a \cdot \Delta x$.

Bevis
Hvis x vokser fra x_1 til x_2, hvor $x_2 = x_1 + \Delta x$, så vil funktionsværdien vokse fra

$$y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$$

til

$$y_2 = f(x_2) = f(x_1 + \Delta x) = a(x_1 + \Delta x) + b = ax_1 + a \cdot \Delta x + b\ .$$

Funktionsværdien er så vokset med

$$y_2 - y_1 = (ax_1 + a \cdot \Delta x + b) - (ax_1 + b) = a \cdot \Delta x\ .$$

Hermed er sætningen bevist. ■

Eksempel 2.12 I tabel 2.4 ses et eksempel på væksten af en lineær funktion.

Funktionen $f(x) = 3x + 7$ vokser således, at hver gang x vokser med 2, vokser funktionsværdien med $3 \cdot 2$.

Tabel 2.4: Vækst af $f(x) = 3x + 7$.

	x	y	
	-2	1	
$+2$			$+3 \cdot 2$
	0	7	
$+2$			$+3 \cdot 2$
	2	13	
$+2$			$+3 \cdot 2$
	4	19	

Eksempel 2.13 Her ses på funktionen $f(x) = 3x - 4$, som har hældningskoefficienten $a = 3$. Hvis x vokser med $\Delta x = 5$, vil funktionsværdien vokse med

$$a \cdot \Delta x = 3 \cdot 5 = 15\ .$$

Hver gang, x vokser med 5, vokser funktionsværdien altså med 15.

Omvendt kan man spørge, hvor meget x skal vokse, for at funktionsværdien vokser med 60? I dette tilfælde er $a \cdot \Delta x = 60$, dvs.

$$3 \cdot \Delta x = 60 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta x = 20\ .$$

x skal altså vokse med 20, for at funktionsværdien vokser med 60.

Eksempel 2.14 For funktionen $f(x) = -2x + 7$ gælder, at når x vokser med $\Delta x = 3$, vokser funktionsværdien med

$$a \cdot \Delta x = -2 \cdot 3 = -6\ .$$

At funktionsværdien vokser med -6 betyder, at funktionsværdien *aftager* med 6, hver gang x vokser med 3.[7]

[7] En negativ stigning svarer altid til et fald. I mange matematiske modeller, hvor man regner på vækst, kan det betale sig at regne med fortegn hele vejen igennem og først til sidst angive, om der er tale om stigning eller fald, afhængig af om resultatet er positivt eller negativt.

Her følger et par eksempler på, hvordan en matematisk beskrivelse af lineær vækst kan give svar på forskellige spørgsmål.

Eksempel 2.15 I en bestemt by er antallet af indbyggere givet ved

$$N(x) = 213x + 14\,752 \ ,$$

hvor $N(x)$ er antallet af indbyggere x år efter år 2000.

I forskriften er der to konstanter,[8] 213 og 14 752. Funktionen $N(x)$ er en lineær funktion, dvs. tallet 213 kan betragtes som en hældningskoefficient: Hver gang x vokser med 1, vokser funktionsværdien med 213. Da x måles i år, og funktionsværdien beskriver antallet af indbyggere, kan man altså sige, at antallet af indbyggere vokser med 213, hver gang x vokser med 1 år. Væksten i indbyggertallet er altså på 213 indbyggere om året.

[8] Husk, at en konstant er et fast tal.

14 752 er skæringen med andenaksen. Den opnås, når $x = 0$. Dette sker i år 2000,[9] og man kan derfor udlede, at indbyggertallet i byen var på 14 752 i år 2000.

[9] Idet år 2000 er 0 år efter år 2000.

Eksempel 2.16 Her ses på samme udvikling som i eksempel 2.15,

$$N(x) = 213x + 14.752 \ .$$

Hvor meget vokser byens indbyggertal over en 10-års periode?

Ud fra forskriften kan man se, at indbyggertallet vokser med 213 om året. Over en 10-års periode kommer der derfor

$$10 \cdot 213 = 2130$$

nye indbyggere.

Eksempel 2.17 Et firma producerer et antal varer. Omkostningerne ved produktionen er 2000 kr. i startomkostninger og 17 kr. pr. produceret vare.

Omkostningerne er altså en funktion af antallet af producerede varer. Denne funktion har forskriften

$$o(x) = 17x + 2000 \ ,$$

hvor x er antallet af varer, og $o(x)$ er de samlede omkostninger.

Eksempel 2.18 Det viser sig, at middeltemperaturen i Vestgrønland er afhængig af breddegraden,[2] sådan at

$$T(x) = -0{,}732x + 46{,}1 \ ,$$

hvor T er middeltemperaturen (i $^\circ$C) og x er breddegraden.

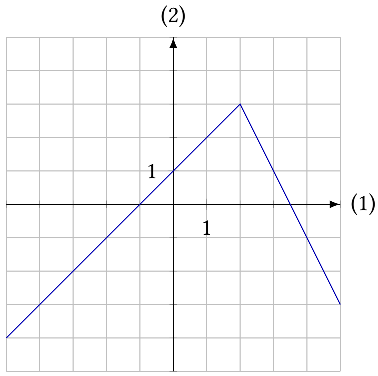
Dvs. at middeltemperaturen i Vestgrønland aftager med 0,732°C, hver gang breddegraden vokser med 1 grad.

Den umiddelbare fortolkning af tallet 46,1 er, at det er temperaturen ved breddegraden 0, dvs. ækvator. Denne fortolkning giver dog ikke mening, idet modellen kun gælder for Vestgrønland.

Det er således ikke muligt at give en fysisk fortolkning af tallet 46,1.

2.4 Stykkevis lineære funktioner

Funktioner, hvis grafer består af linjestykker, kaldes *stykkevis lineære* funktioner. Grafen for en stykkevis lineær funktion kan ses på figur 2.5.



Figur 2.5: Grafen for en stykkevis lineær funktion.

Her kan man aflæse, at når x er mindre end 2, så svarer grafen til linjen med ligningen

$$y = x + 1 ,$$

og når x er større end 2, svarer grafen til linjen med ligningen

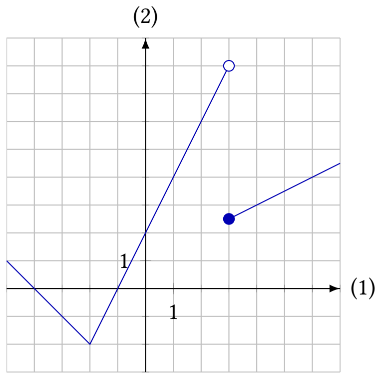
$$y = -2x + 7 ,$$

Hvis funktionen hedder f, skrives forskriften derfor på denne måde:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{for } x < 2 \\ -2x + 7 & \text{for } x \geq 2 \end{cases} .$$

En funktion, hvis graf er sammenhængende, kaldes en *kontinuert* funktion. Stykkevis lineære funktioner er ikke nødvendigvis kontinuerte. Et eksempel på en stykkevis lineær funktion, der ikke er kontinuert kunne være

$$g(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{for } x < -2 \\ 2x + 2 & \text{for } -2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{for } x \geq 3 \end{cases} .$$



Figur 2.6: Grafen for en stykkevis lineær funktion, der ikke er kontinuert.

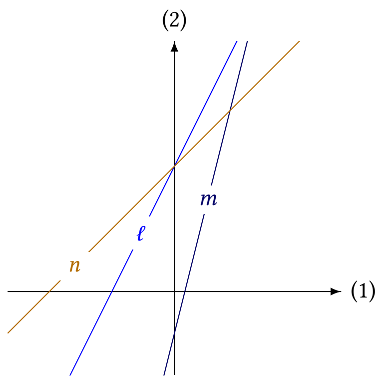
Grafen for g kan ses på figur 2.6.

Den fyldte cirkel på grafen viser et punkt, der er med på grafen, mens den tomme cirkel viser, at punktet ikke er med. For funktionen g gælder, at funktionsværdien $g(3)$ skal beregnes ud fra den nederste »gren« i forskriften – derfor er punktet med på det linjestykke længst mod højre.

2.5 Øvelser

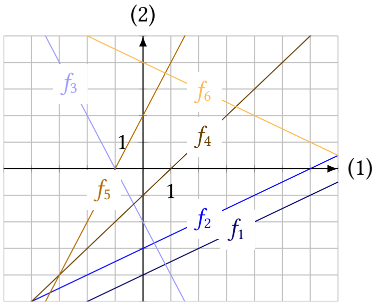
Øvelse 2.1
På tegningen til højre ses de 3 rette linjer ℓ, m og n som er grafer for funktionerne

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x - 1 , \\ g(x) &= 2x + 3 \quad \text{og} \\ h(x) &= x + 3 . \end{aligned}$$



Hvilken linje er graf for hvilken funktion?

Øvelse 2.2
Bestem ved aflæsning en forskrift for funktionerne $f_1, \dots, f_6$, hvis grafer ses på billedet herunder.



Øvelse 2.3
Opskriv en forskrift for den lineære funktion, der går gennem punktet P og som har hældningskoefficient a:

a) $P(0;4)$ og $a = 2$.

b) $P(2;1)$ og $a = -\frac{1}{2}$.

Øvelse 2.4
Bestem en forskrift for den lineære funktion, hvis graf går gennem punkterne:

a) $A(2;3)$ og $B(-1;9)$

b) $C(-3;2)$ og $D(-4;1)$

c) $P(-5;1)$ og $Q(7;1)$

Øvelse 2.5
Den rette linje ℓ går gennem punkterne $A(-4;2)$ og $B(5;5)$.

Bestem ved beregning en ligning for lineære funktion, hvis graf går gennem $C(3;-2)$ og er parallel med ℓ.

Øvelse 2.6
En ret linje ℓ går gennem punkterne $P(3;-7)$ og $Q(8;8)$.

a) Bestem linjens ligning.

b) Bestem linjens skæringspunkt med førsteaksen.

Øvelse 2.7
Bestem skæringspunktet mellem graferne for de to lineære funktioner

$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{og} \quad g(x) = 3x + 7\,.$$

Øvelse 2.8
For den lineære funktion $h(t)$ gælder $h(-1) = -13$ og $h(4) = 32$.

a) Bestem en forskrift for funktionen.

b) Løs ligningen $h(t) = 23$.

Øvelse 2.9
En linje har hældningen 3 og går gennem punktet $(6;14)$.

a) Bestem en ligning for linjen.

b) Hvilken tilvækst får y, når x stiger med 10?

Øvelse 2.10
En linje har hældningen 4 og går gennem punktet $(2;5)$.

a) Bestem en ligning for linjen.

b) Hvad bliver Δy, når $\Delta x = 12$?

Øvelse 2.11
En linje har hældningen -2 og går gennem punktet $(3;1)$.

a) Bestem en ligning for linjen.

b) Hvad er Δx, hvis $\Delta y = 38$?

Øvelse 2.12
Afgør ved beregning, om punkterne A, B og C ligger på en ret linje, når

a) $A(19;12)$, $B(27;25)$ og $C(40;46)$.

b) $A(-6;-3)$, $B(-1;5)$ og $C(7;18)$.

Øvelse 2.13
En bestemt vares pris vokser lineært med tiden. Prisen i 2010 var 66 kr. og i 2015 var prisen 76 kr.

a) Hvad vil prisen være i 2019?

b) Hvornår vil prisen være 100 kr?

Øvelse 2.14
En lineær funktion f vokser med 8, når x øges med 4. Endvidere ved man, at grafen for f går gennem punktet $(3;4)$.

Bestem en forskrift for f.

Øvelse 2.15
Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{for } x \leq -1 \\ 2x - 1 & \text{for } x > -1 \end{cases}$$

a) Tegn grafen for f.

b) Beregn $f(5)$ og $f(-2)$.

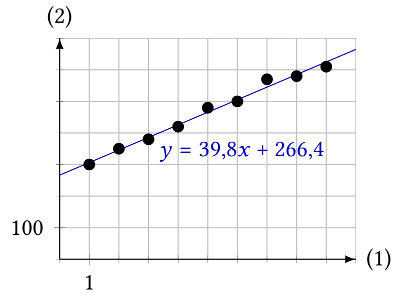
c) Løs ligningen $f(x) = 6$.

d) Løs ligningen $f(x) = -3$.

3 Lineær regression

Når man beskriver vækst ud fra målte data, kan man komme ud for, at man har en række målepunkter, som ikke ligger præcist på en ret linje, men dog gør det med god tilnærmelse. Et eksempel kan ses på figur 3.1.

Da punkterne ikke ligger præcist på en linje, vil det være forkert at bruge sætning 2.7 til at beregne en forskrift. Afhængig af, hvilke to punkter, man sætter ind i formlerne, vil man nemlig få vidt forskellige resultater for forskriften.

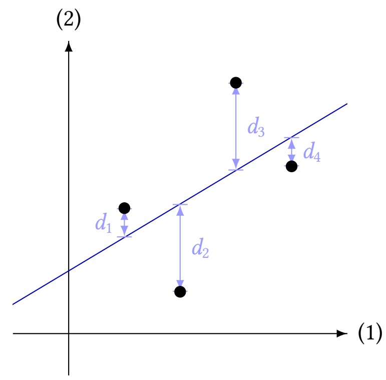


Figur 3.1: En række målepunkter samt den bedste rette linje gennem punkterne.

I stedet bruger man en metode, der kaldes *lineær regression* til at bestemme den rette linje, der ligger tættest muligt på alle punkterne. Denne metode er indbygget i de fleste regneark og matematikprogrammer, således at man blot skal indskrive punkterne i programmet, så får man at vide hvilken ligning, linjen har. Ligningen på figur 3.1 er fundet på denne måde.

Metoden fungerer i praksis på den måde, at man finder den linje, der har den mindste afstand til alle punkterne. Afstanden defineres her som *kvadratsummen D* af den lodrette afstand fra linjen til punkterne. På figur 3.2 er denne afstand givet ved

$$D = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \ .$$



Figur 3.2: Man minimerer kvadratsummen $D = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

Denne sum indeholder flere led, jo flere målepunkter der er. Den rette linje, der passer bedst på punkterne, defineres så til at være den, der gør D mindst mulig.

Hvis man har n forskellige punkter med koordinaterne

$$(x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n) \ ,$$

så kan man finde frem til to formler, der giver linjens hældningskoefficient a og dens skæring med andenaksen b ud fra alle x-værdierne $x_1, \dots, x_n$ og alle y-værdierne $y_1, \dots, y_n$.

Det kræver ret avanceret matematik at udlede de to formler for a og b, derfor bevises de ikke her; men formlerne er givet i følgende sætning:

Sætning 3.1

Den bedste rette linje gennem punkterne $(x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$ har ligningen $y = ax + b$, hvor

$$a = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$
$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x} \, .$$

Her er $\overline{x}$ gennemsnittet af x-værdierne, $\overline{y}$ er gennemsnittet af y-værdierne, osv.

Som sagt bevises formlerne ikke. Her er til gengæld et eksempel, der viser, hvordan de bruges.

Tabel 3.3: Sammenhørende målte værdier af x og y.

x	y
0	1
2	3
4	6
6	8

Tabel 3.4: x, y, $x \cdot y$ og x^2. Den nederste række viser gennemsnittene.

x	y	$x \cdot y$	x^2
0	1	0	0
2	3	6	4
4	6	24	16
6	8	48	36
$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x \cdot y}$	$\overline{x^2}$
3	4,5	19,5	14

Eksempel 3.2 Tabel 3.3 viser sammenhørende værdier af den uafhængige variabel x og den uafhængige variabel y. For at kunne bruge formlerne skal man bruge en række gennemsnit. Disse er beregnet i tabel 3.4.

Man kan nu beregne

$$a = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{19{,}5 - 3 \cdot 4{,}5}{14 - 3^2} = 1{,}2 \, .$$

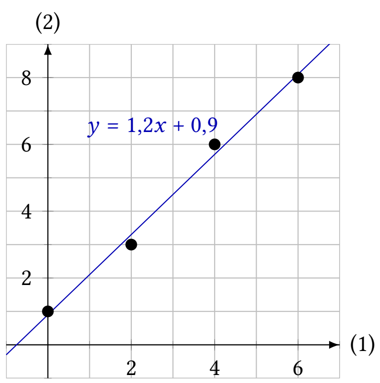
og

$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x} = 4{,}5 - 1{,}2 \cdot 3 = 0{,}9 \, .$$

Den bedste rette linje har derfor ligningen

$$y = 1{,}2x + 0{,}9 \, .$$

Punkterne og linjen kan ses på figur 3.5.



Figur 3.5: Den bedste rette linje gennem de 4 punkter.

Som det måske fremgår af eksemplet, kan det hurtigt blive besværligt at beregne den bedste rette linje vha. formlerne i sætning 3.1. Heldigvis er metoden indbygget i de fleste CAS-værktøjer, så man kan nøjes med at indtaste punkterne og få værktøjet til at beregne ligningen.

3.1 Forklaringsgraden

Hvis man beregner den bedste rette linje vha. et CAS-værktøj, får man som regel også beregnet en størrelse kaldet *determinationskoefficienten* eller *forklaringsgraden*, normalt betegnet med R^2. Det er et tal mellem 0 og 1, som fortæller, hvor godt den rette linje passer på punkterne. Jo tættere tallet er på 1, jo bedre er overensstemmelsen mellem punkterne og linjen.

Forklaringsgraden beregnes vha. følgende formel:

Sætning 3.3

For den rette linje, der passer bedst på punkterne $(x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$, er *forklaringsgraden*

$$R^2 = a^2 \cdot \frac{\overline{x^2} - \overline{x}^2}{\overline{y^2} - \overline{y}^2} .$$

Der gælder, at $0 \leq R^2 \leq 1$, og jo tættere R^2 er på 1, jo bedre er overensstemmelsen mellem punkterne og linjen.

Eksempel 3.4 Hvis man ser på de samme målepunkter som i eksempel 3.2, finder man

$$\overline{x} = 3 , \quad \overline{x^2} = 14 , \quad \overline{y} = 4{,}5 \quad \text{og} \quad \overline{y^2} = 27{,}5 .$$

I eksemplet blev det desuden beregnet at $a = 1{,}2$, dvs. forklaringsgraden er

$$R^2 = a^2 \cdot \frac{\overline{x^2} - \overline{x}^2}{\overline{y^2} - \overline{y}^2} = 1{,}2^2 \cdot \frac{14 - 3^2}{27{,}5 - 4{,}5^2} = 0{,}9931 .$$

Dette tal er meget tæt på 1, så den rette linje passer altså ret godt på punkterne, hvilket også fremgår af grafen på figur 3.5.

3.2 Hvorfor er grafer vigtige?

Når man foretager lineær regression for at finde den bedste rette linje, så behøver man i princippet slet ikke tegne grafen. Man kan sådan set nøjes med at få et CAS-værktøj til at beregne linjens ligning og forklaringsgraden R^2. Forklaringsgraden kan så bruges til at afgøre, om det er fornuftigt at modellere sammenhængen med en ret linje.

I praksis er det dog altid fornuftigt at tegne grafen, for det viser sig, at man kan få den samme rette linje og forklaringsgrad ud fra vidt forskellige data.

Statistikeren Francis Anscombe beskrev i en artikel i 1973 fire forskellige datasæt, som havde den samme regressionsligning og forklaringsgrad, men så vidt forskellige ud.[1] De fire datasæt kan ses i tabel 3.6.

Indsætter man de fire datasæt i hver deres koordinatsystem får man billedet på figur 3.7. Det ses tydeligt, at de fire datasæt er udtryk for vidt forskellige fordelinger. Det første datasæt ser ud til nogenlunde at kunne modelleres med en ret linje. Punkterne ligger i hvert fald nogenlunde tilfældigt omkring linjen. Det næste datasæt (øverst til højre) viser en tydelig sammenhæng – men den er bestemt ikke lineær. De sidste to datasæt har et enkelt punkt, der ligger helt anderledes end alle de andre (et sådant punkt kaldes en *outlier*).

På trods af deres forskellighed har de alle den samme regressionslinje og forklaringsgrad, nemlig

$$y = 0{,}50 \cdot x + 3{,}00 , \quad R^2 = 0{,}67 .$$

Man kan derfor konkludere, at det er en god ide at tegne grafen, så man kan få et overblik over, hvordan punkterne fordeler sig, før man evt. foretager lineær regression.

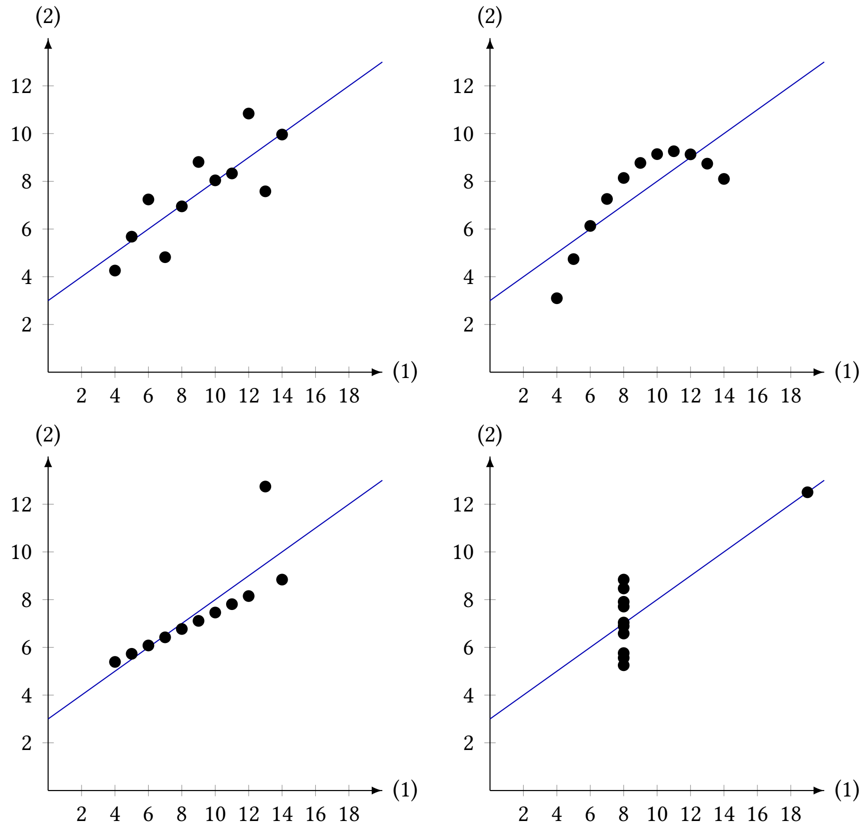
Tabel 3.6: Anscombes fire datasæt. Fra [1].

x	y
4	4,26
5	5,68
6	7,24
7	4,82
8	6,95
9	8,81
10	8,04
11	8,33
12	10,84
13	7,58
14	9,96

x	y
4	3,1
5	4,74
6	6,13
7	7,26
8	8,14
9	8,77
10	9,14
11	9,26
12	9,13
13	8,74
14	8,1

x	y
4	5,39
5	5,73
6	6,08
7	6,42
8	6,77
9	7,11
10	7,46
11	7,81
12	8,15
13	12,74
14	8,84

x	y
8	6,58
8	5,76
8	7,71
8	8,84
8	8,47
8	7,04
8	5,25
8	5,56
8	7,91
8	6,89
19	12,5



Figur 3.7: Anscombes fire datasæt afbildet i hver deres koordinatsystem.
Her ses det tydeligt, at det drejer sig om vidt forskellige sammenhænge.

I det tilfælde, hvor et enkelt punkt ligger helt anderledes end de andre, giver det også god mening at undersøge dette punkt grundigere. Kunne det evt. være resultatet af en fejlmåling?

3.3 Residualplot

Når man har beregnet den rette linje, som passer bedst på en række punkter, så ligger punkterne som regel ikke helt på linjen. Dvs. punktet $(x_i; y_i)$ opfylder ikke ligningen $y = ax + b$, men i stedet

$$y_i = ax_i + b + \varepsilon_i \ ,$$

hvor ε_i er den lodrette afstand fra punktet til linjen. På sin vis er ε_i et udtryk for, hvor stor en fejl, man begår, hvis man bruger linjens ligning til at modellere sammenhængen. Dette kalder man også *residualet* for punktet.

Hvis man isolerer ε_i i ligningen (3.3), får man, at

$$\varepsilon_i = y_i - ax_i - b \ .$$

Man kan forholdsvist let vise, at gennemsnittet af residualerne er 0. Dette overlades som en øvelse til læseren.

Hvis den rette linje er en god model for den undersøgte sammenhæng, så er residualerne små i forhold til de målte y-værdier, og de ligger tilfældigt fordelt. Om dette er tilfældet kan man undersøge ved at lave et *residualplot*, som er en afbildning af residualerne som funktion af x-værdierne.

Tabel 3.8: De sammenhørende værdier af x og y samt residualerne ε.

x	y	ε
0	1	0,1
2	3	−0,3
4	6	0,3
6	8	−0,1

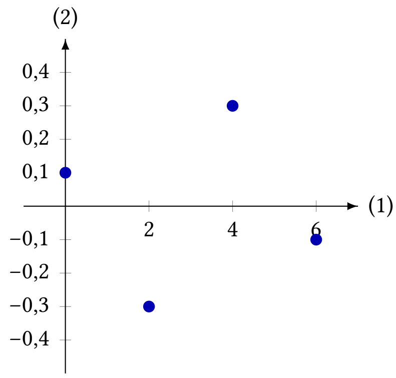
Eksempel 3.5 I eksempel 3.2 fandt man den rette linje, der passede bedst på en række sammenhørende værdier af x og y. Den rette linje havde ligningen

$$y = 1{,}2x + 0{,}9 \ .$$

Vha. $a = 1{,}2$ og $b = 0{,}9$ kan man beregne residualerne. F.eks. er

$$\varepsilon_1 = y_1 - ax_1 - b = 1 - 1{,}2 \cdot 0 - 0{,}9 = 0{,}1 \ .$$

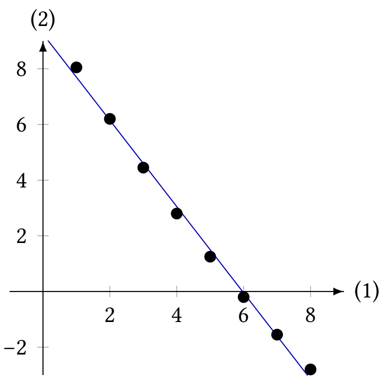
En samlet oversigt over punkterne og residualerne ses i tabel 3.8.



Figur 3.9: Residualplot over værdierne i tabel 3.8.

Residualplottet kan ses på figur 3.9. Her ses det på andenaksen, at residualernes værdier er små i forhold til de målte y-værdier. Plottet viser også, at residualerne ligger nogenlunde tilfældigt omkring førsteaksen. Det virker derfor rimeligt at anvende den lineære model i dette tilfælde.

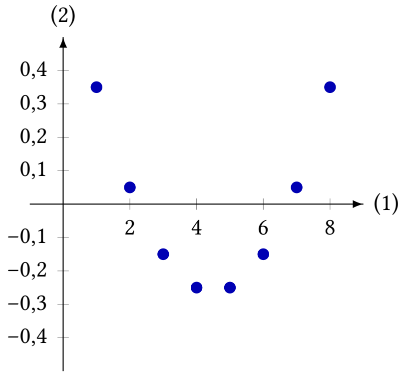
En række målepunkter kan sagtens se ud til at kunne modelleres med en ret linje, selvom det i virkeligheden er en anden type model, der ligger bag. Dette vil typisk afsløre sig ved at residualplottet ikke ser tilfældigt ud, men viser en eller anden form for regelmæssighed.



Figur 3.10: En række målepunkter indsat i et koordinatsystem samt regressionslinjen.

Eksempel 3.6 Figur 3.10 viser et koordinatsystem med indsatte punkter samt en regressionslinje. Ved første øjekast ser punkterne ud til med rigtigt god tilnærmelse at ligge på en ret linje.

Men ser man på residualplottet 3.11 bliver det tydeligt, at den rette linje ikke er en god model i forhold til disse punkter. Man kan nemlig se, at



Figur 3.11: Residualplot over målepunkterne fra figur 3.10.

residualerne ikke ligger tilfældigt, men på en form for kurve. Dette kunne tyde på, at den model, der ligger til grund for målingerne, slet ikke er lineær. Man skal derfor lede efter en anden type model.

3.4 Øvelser

Øvelse 3.1
Der er målt en sammenhæng mellem de to variable x og y. De målte tal kan ses i tabellen herunder:

x	1	2	3	4
y	5	7	8	11

a) Brug formlerne i sætning 3.1 til at beregne a og b for den bedste rette linje.

b) Beregn residualerne.

Øvelse 3.2
De følgende 3 tabeller viser 3 forskellige sammenhænge mellem de variable x og y.

x	1	2	3	4	5	6
y	3,2	4,9	7,3	8,8	10,9	13,4

x	1	2	3	4	5	6
y	1,4	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8

x	1	2	3	4	5	6
y	0,1	1,4	2,9	4,6	6,5	8,6

a) Bestem den bedste rette linje og tegn residualplottene for hver af de tre sammenhænge.

b) Brug residualplottene til at vurdere for hvilke(n) af de tre sammenhænge, den rette linje er en god model.

Øvelse 3.3
For en kobbertråd er der med god tilnærmelse en lineær sammenhæng mellem modstand, målt i Ω, og temperaturen, målt i °C. Ved en række målinger har man fundet følgende data:

Temperatur (°C)	0	15	30	45	60
Modstand (Ω)	54,9	58,4	61,9	66,2	69,0

a) Bestem en lineær model, der beskriver sammenhængen.

b) Ved hvilken temperatur er modstanden 75 Ω?

Øvelse 3.4
En række målinger giver følgende sammenhæng mellem vindhastigheden og den støj, som en vindmølle udsender:

Vindhastighed ($\frac{m}{s}$)	6,3	7,2	8,5	9,4
Støj (dB)	51	56	65	71

Med god tilnærmelse kan denne beskrives ved ligningen $y = ax + b$, hvor x er vindhastigheden, og y er støjen.

a) Bestem tallene a og b i ligningen.

b) Forklar, hvad konstanterne a og b beskriver i denne model.

c) Bestem den vindhastighed, der giver en støj på 75 dB.

d) Hvor meget skal vindhastigheden falde, for at støjen aftager med 10 dB?

Bibliografi

[1] F. J. Anscombe. »Graphs in Statistical Analysis«. I: *The American Statistician* 27.1 (feb. 1973), s. 17–21.

[2] Jesper Ruggaard Mehus og Svend Erik Nielsen. *Klimaforandringer i arktis.* Biofag nr. 6/2012. Særnummer. Forlaget Nucleus, 2012.

[3] Morton M. Sternheim og Joseph W. Kane. *General Physics.* 2nd edition. John Wiley & Sons, Inc., 1991.

Brøkregning

Forkorte	(1)	$\frac{a}{b} = \frac{a/k}{b/k}$
Forlænge	(2)	$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}$
Addition	(3)	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$
Subtraktion	(4)	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$
Multiplikation	(5)	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
Division	(6)	$\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Potenser og rødder

	(7)	$a^0 = 1$
Negativ eksponent	(8)	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
Brøk som eksponent	(9)	$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$
Samme grundtal	(10)	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
	(11)	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
	(12)	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
Samme eksponent	(13)	$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
	(14)	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
Samme rod	(15)	$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{a \cdot b}$
	(16)	$\frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b}} = \sqrt[x]{\frac{a}{b}}$

Algebra

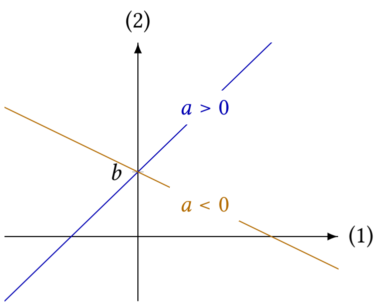
Den associative lov	(17)	$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$
	(18)	$a(bc) = (ab)c = abc$

Den distributive lov	(19)	$a(b+c) = ab + ac$
Kvadratet på en sum	(20)	$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
Kvadratet på en differens	(21)	$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
To tals sum gange de samme to tals differens	(22)	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Funktioner

y er ligefrem proportional med x	(23)	$y = k \cdot x$
y er omvendt proportional med x	(24)	$y = \frac{k}{x}$

Lineære funktioner



Lineær funktion	(25)	$f(x) = ax + b$
Hældningskoefficient ud fra to punkter $(x_1; y_1)$ og $(x_2; y_2)$ på grafen	(26)	$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Skæring med andenaksen	(27)	$b = y_1 - ax_1$

Lineær regression

Den bedste rette linje	(28)	$a = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$
	(29)	$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}$
Forklaringsgraden	(30)	$R^2 = a^2 \cdot \frac{\overline{x^2} - \overline{x}^2}{\overline{y^2} - \overline{y}^2}$
Residual	(31)	$\varepsilon_i = y_i - ax_i - b$