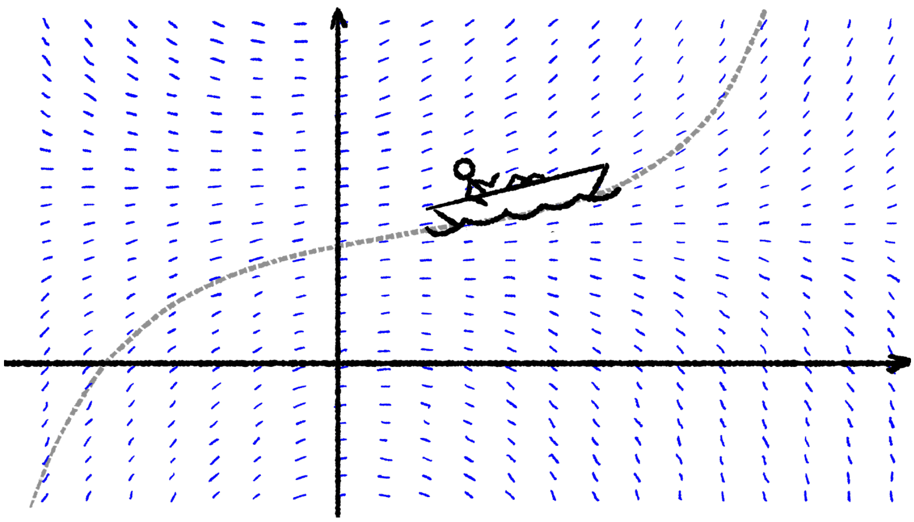
Differentialligninger

Version 2.0
3. august 2021



Mike Vandal Auerbach
www.mathematicus.dk

Differentialligninger
Version 2.0, 2021

Disse noter er skrevet til matematikundervisningen på stx A-niveau efter gymnasiereformen 2017. Noterne indeholder det meste af kernestoffet og lidt til.

Enkelte grafer/figurer er markeret med symbolet der fungerer som link til et interaktivt GeoGebra-arbejdsark. Se også www.geogebra.org.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Indhold

1 Differentialligninger

I en almindelig ligning, f.eks.

$$2x + 3 = x^2 - 5\,,$$

er den ubekendte x et tal. Løsningerne til ligningen er de tal x som får ligningens venstre og højre side til at være lig med hinanden.[1]

[1] Den viste ligning har i øvrigt løsningerne $x = -2$ og $x = 4$.

I en *differentialligning* er den ubekendte ikke et tal, men derimod en *funktion*. Man kan lave de samme regneoperationer med funktioner som man kan med tal, men derudover kan man også differentiere (og integrere). En differentialligning er derfor en ligning der indeholder en funktion, f.eks. f samt funktionens afledte f'.

Eksempler på differentialligninger kunne være

$$y' = 2x \tag{1.1}$$

$$y' = 2y \tag{1.2}$$

$$y' = \frac{y}{2x} \tag{1.3}$$

$$y' = \sin(x) \cdot y \tag{1.4}$$

$$y'' = 3y\,. \tag{1.5}$$

Ligningerne (1.1)–(1.4) er alle *førsteordens* differentialligninger, mens ligningen (1.5) er en *andenordens* differentialligning fordi ligningen indeholder y''. En differentiallignings *orden* beskriver altså hvor mange gange den ubekendte (højst) er differentieret i ligningen. I det følgende ses kun på førsteordens differentialligninger.

Når man skriver differentialligninger op, anvender man i øvrigt ofte notationen $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ i stedet for y'. F.eks. kan ligningerne (1.4) og (1.5) også skrives som

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin(x) \cdot y \qquad \text{og} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 3y\,.$$

1.1 Partikulære og fuldstændige løsninger

En løsning til en differentialligning er, som nævnt ovenfor, en funktion. Det er ikke altid så let at løse en differentialligning, men i bestemte tilfælde kan man udlede en løsningsformel. Dette er beskrevet i senere kapitler.

Her ses i stedet på hvordan man kan afgøre *om* en given funktion er en løsning. Først kommer dog et enkelt eksempel hvor det repeteres hvordan man afgør om en given værdi er løsning til en almindelig ligning.

Eksempel 1.1 Her er givet ligningen

$$x^2 - 5 = x + 7 \ .$$

Er $x = 1$ en løsning til ligningen? For at finde ud af det sættes $x = 1$ på ligningens venstre og højre side:

$$\begin{aligned} \text{Venstre side:} \quad & 1^2 - 5 = 1 - 5 = -4 \\ \text{Højre side:} \quad & 1 + 7 = 8 \ . \end{aligned}$$

Da venstre og højre side ikke giver samme tal, er $x = 1$ *ikke* en løsning.

Er $x = 4$ en løsning til ligningen? For at finde ud af det sættes $x = 4$ på ligningens venstre og højre side:

$$\begin{aligned} \text{Venstre side:} \quad & 4^2 - 5 = 16 - 5 = 11 \\ \text{Højre side:} \quad & 4 + 7 = 11 \ . \end{aligned}$$

Da venstre og højre side giver samme tal, *er* $x = 4$ en løsning.[2]

[2] Bemærk at blot fordi man har fundet én løsning, så har man ikke nødvendigvis fundet dem alle. Ligningen i eksemplet har faktisk yderligere en løsning, nemlig $x = -3$.

Hvis man skal afgøre om en given funktion er løsningen til en bestemt differentialligning, gør man faktisk præcist det samme. Man sætter funktionsudtrykket ind på differentialligningens venstre og højre side og ser om det giver samme resultat.

Eksempel 1.2 Her undersøges om funktionen $f(x) = \mathrm{e}^x + x + 1$ er en løsning til differentialligningen

$$y' = y - x \ .$$

Den venstre side af ligningen er y'. Sætter man udtrykket for $f(x)$ ind på y's plads, får man

$$y' = f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 + 0 = \mathrm{e}^x + 1 \ .$$

Den højre side af ligningen er $y - x$. Sætter man her $f(x)$ ind, får man

$$y - x = f(x) - x = (\mathrm{e}^x + x + 1) - x = \mathrm{e}^x + 1 \ .$$

Venstre og højre side er altså lig hinanden for alle x,[3] dvs. den givne funktion f er en løsning til differentialligningen.

[3] Hvis to funktioner er lig hinanden, så skal de være lig hinanden *for alle* x, og ikke blot for enkelte værdier af x.

Differentialligninger har aldrig kun én løsning. De har i virkeligheden uendeligt mange. En enkelt løsning som den der er fundet i eksempel 1.2, kaldes en *partikulær* løsning. Differentialligningen

$$y' = y - x \ ,$$

har i virkeligheden alle funktioner af typen

$$f(x) = c\,\mathrm{e}^x + x + 1 \ ,$$

hvor c er en konstant, som løsning. Dette kaldes den *fuldstændige* løsning til differentialligningen. Ved at prøve efter kan man altså være heldig at finde en partikulær løsning, men man finder ikke den fuldstændige løsning til ligningen.

1.2 At gætte en løsning

I nogle situationer kan man komme ud for at man ved hvilken type funktion man leder efter som løsning til en bestemt differentialligning. Enten fordi man leder efter en funktion af en bestemt type, eller fordi differentialligningens form gør det oplagt at gætte på en bestemt type funktion som løsning.

I sådanne tilfælde kan man bestemme en løsning ved at indsætte en funktion af denne type i differentialligningen. Det demonstreres måske nemmest vha. et eksempel:

Eksempel 1.3 En differentialligning er givet ved

$$y - 2xy' = 0 \ ,$$

og man leder efter en potensfunktion der løser ligningen. Dvs. man ved allerede at løsningen har formen

$$f(x) = bx^a \ .$$

Detter indsætter man i differentialligningen, og man får

$$\begin{aligned} f(x) - 2x \cdot f'(x) &= 0 \quad &\Leftrightarrow \\ bx^a - 2x \cdot abx^{a-1} &= 0 \quad &\Leftrightarrow \\ bx^a - 2abx^a &= 0 \quad &\Leftrightarrow \\ (b - 2ab)x^a &= 0 \ . \end{aligned}$$

Da løsningen er en funktion, skal ligningen være opfyldt *for alle* x. Dette kan kun lade sig gøre hvis koefficienten $b - 2ab$ giver 0. Der må derfor gælde at

$$b - 2ab = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b(1 - 2a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0 \quad \vee \quad a = \tfrac{1}{2} \ .$$

Hvis $b = 0$, er funktionen ikke en potensfunktion, så denne løsning kasseres. Der må derfor gælde at $a = \frac{1}{2}$, dvs. de potensfunktioner der løser differentialligningen ovenfor, har formen

$$f(x) = b \cdot x^{\frac{1}{2}} \ .$$

Som man kan se af eksemplet, finder man altså løsningen ved at indsætte en funktion på den ønskede form i differentialligningen og derefter sørge for at ligningen er sand for alle x.

At ligningen skal gå op for alle x, skyldes at der er tale om en differentialligning, dvs. løsningen er en funktion. Ligningen skal derfor gå op uanset hvilken værdi af x der indsættes i løsningsfunktionen $f(x)$. Løsningen må altså på ingen måde afhænge af bestemte værdier af x.

Eksempel 1.4 Her leder man efter det andengradspolynomium som løser ligningen

$$y' = y - 4x^2 - 1 \ .$$

Hvis man ved at man leder efter et andengradspolynomium som løsning, så har løsningen formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c \,.$$

Dette indsætter man i differentialligningen hvorved man får

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) - 4x^2 - 1 && \iff \\ 2ax + b &= ax^2 + bx + c - 4x^2 - 1 && \iff \\ 2ax + b &= (a-4)x^2 + bx + c - 1 && \iff \\ 0 &= (a-4)x^2 + (b-2a)x + (c-1-b) \,. \end{aligned}$$

Denne ligning skal være opfyldt for alle x, og det kan kun lade sig gøre hvis alle koefficienterne på højre side er 0, dvs. hvis

$$a - 4 = 0 \,, \quad b - 2a = 0 \quad \text{og} \quad c - 1 - b = 0 \,.$$

Den første af disse ligninger har løsningen $a = 4$; den næste giver så

$$b - 2 \cdot 4 = 0 \quad \iff \quad b = 8 \,,$$

og den sidste giver

$$c - 1 - 8 = 0 \quad \iff \quad c = 9 \,.$$

Der findes altså kun ét andengradspolynomium som løser differentialligningen, nemlig

$$f(x) = 4x^2 + 8x + 9 \,.$$

1.3 Tangenter og hældningsfelter

Grafen for en partikulær løsning til en differentialligning kaldes en *løsningskurve*. Selv om man ikke kender den fuldstændige løsning til en differentialligning, kan man alligevel sige noget om hvordan løsningerne ser ud. Det er nemlig muligt at undersøge de forskellige løsningskurver.

Differentialligningen giver sammenhængen mellem y', y og x, dvs. man kan for ethvert punkt i koordinatsystemet beregne y' ud fra punktets koordinater. Det betyder, at hvis man kender et punkt (x_0, y_0), som en løsningskurve skal gå igennem, kan man beregne tangenthældningen i dette punkt – og derved også tangentens ligning.

Eksempel 1.5 Differentialligningen

$$y' = \frac{x}{y} \,, \quad y \neq 0 \,,$$

har en løsningskurve, der går gennem punktet $(6, 3)$. Tangenten til løsningskurven i dette punkt kan findes ud fra differentialligningen. Man sætter blot koordinaterne $x_0 = 6$ og $y_0 = 3$ fra punktet ind i ligningen. Herved får man

$$y' = \frac{6}{3} = 2 \,.$$

Tangenten i punktet $(6, 3)$ har altså hældningen 2.

Tangentens ligning kan nu findes ved at sætte de kendte værdier ind i formlen for en ret linje gennem et punkt ($y = a(x - x_0) + y_0$), og man får

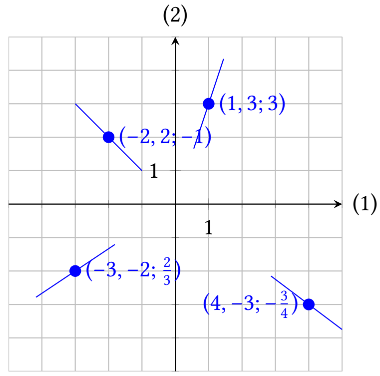
$$y = 2(x - 6) + 3 = 2x - 9 \, .$$

Den løsning til differentialligningen, hvis graf går gennem $(6, 3)$ har altså tangenten $y = 2x - 9$ i dette punkt.

Hvis man har en differentialligning er det muligt at beregne tangenthældningen til løsningskurven i ethvert punkt i koordinatsystemet. Herved kan man beregne en masse såkaldte *linjeelementer*:

Definition 1.6

Hvis grafen for en funktion f går gennem punktet (x_0, y_0), og tangenthældningen i dette punkt er $a = f'(x_0)$, så har grafen *linjeelementet* $(x_0, y_0; a)$ i dette punkt.



Figur 1.1: Fire linjeelementer for differentialligningen $y' = \frac{y}{x}$.

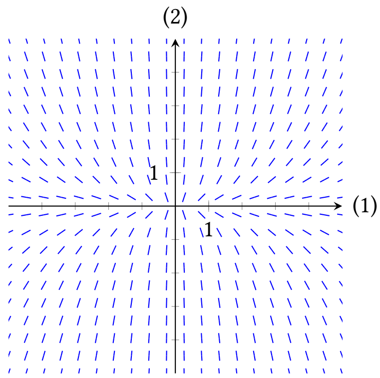
Et linjeelement $(x_0, y_0; a)$ tegnes i et koordinatsystem som et lille linjestykke med hældning a gennem punktet (x_0, y_0). Dvs. et linjeelement tegnes som et lille stykke af tangenten i punktet (x_0, y_0).

Eksempel 1.7 Her beregnes linjeelementerne for differentialligningen

$$y' = \frac{y}{x}$$

i en række punkter.

$$\begin{aligned}
(1, 3): &\quad y' = \frac{3}{1} = 3 &&\text{dvs. linjeelementet er } (1, 3; 3)\\
(-2, 2): &\quad y' = \frac{2}{-2} = -1 &&\text{dvs. linjeelementet er } (-2, 2; -1)\\
(-3, -2): &\quad y' = \frac{-2}{-3} = \tfrac{2}{3} &&\text{dvs. linjeelementet er } (-3, -2; \tfrac{2}{3})\\
(4, -3): &\quad y' = \frac{-3}{4} = -\tfrac{3}{4} &&\text{dvs. linjeelementet er } (4, -3; -\tfrac{3}{4})
\end{aligned}$$



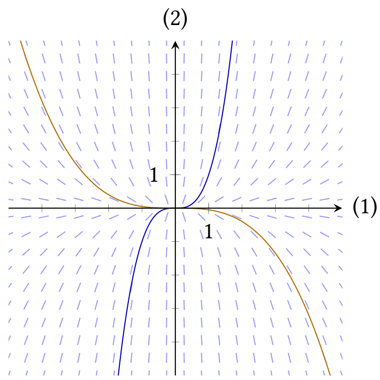
Figur 1.2: Hældningsfeltet for differentialligningen $y' = \frac{3y}{x}$.

På figur 1.1 ses de fire linjeelementer indtegnet i et koordinatsystem.

Hvis man beregner et linjeelement i alle punkter, finder man det, man kalder et *hældningsfelt*. Tegner man hældningsfeltet kan man få et indtryk af, hvordan løsningskurverne forløber. På figur 1.2 ses hældningsfeltet for differentialligningen

$$y' = \frac{3y}{x} \, ,$$

og på figur 1.3 ses hældningsfeltet igen, denne gang med to løsningskurver indtegnet.



Figur 1.3: Hældningsfeltet for differentialligningen $y' = \frac{3y}{x}$ samt to af løsningskurverne.

1.4 Øvelser

Øvelse 1.1
Undersøg om $f(x) = \frac{3}{x}$ er en løsning til differentialligningen

$$y' + \frac{y}{x} = 0\,.$$

Øvelse 1.2
Undersøg i hvert af tilfældene nedenfor om den givne funktion er løsning til den givne differentialligning.

a) $f(x) = 2x + 4x + e^{2x}$ og $y' = 2y - 8x$

b) $g(x) = \sin(x) + x$ og $\dfrac{dy}{dx} = y - x + 1$

c) $h(x) = x \cdot e^x$ og $y' = e^x + y$

d) $k(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ og $\dfrac{dy}{dx} + (y-1)^2 = 0$

Øvelse 1.3
Bestem den lineære funktion der er løsning til differentialligningen $y' = y - x$.

Øvelse 1.4
Bestem det andengradspolynomium der er løsning til differentialligningen

$$y' = y - 3x^2 + 2\,.$$

Øvelse 1.5
Bestem samtlige andengradspolynomier der er løsning til differentialligningen

$$3y' - x = \frac{3y}{x}\,.$$

Øvelse 1.6
Bestem de to lineære funktioner der er løsninger til differentialligningen

$$x \cdot y' = y^2 - x^2 - \tfrac{1}{4}\,.$$

Øvelse 1.7
En løsningskurve til differentialligningen

$$y' = \frac{x}{y} + 2$$

går gennem punktet $(6, 3)$.

Bestem en ligning for tangenten til kurven i dette punkt.

Øvelse 1.8
Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y$$

har en løsning hvis graf går gennem punktet $(1, 6)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen i dette punkt.

Øvelse 1.9
Bestem linjeelementerne for differentialligningen

$$y' = \frac{3-x}{y}$$

i de givne punkter:

a) $(2, 1)$

b) $(7, 2)$

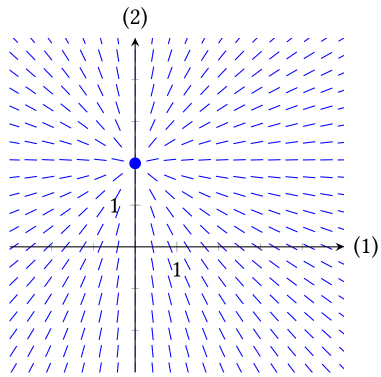
c) $(-5, 1)$

d) $(0, -9)$

Skitsér herefter linjeelementerne i et passende koordinatsystem.

Øvelse 1.10
Figuren herunder viser hældningsfeltet for differentialligningen

$$y' = \frac{y-2}{x}\,.$$



a) Brug hældningsfeltet til at gætte nogle løsninger til differentialligningen.

b) Undersøg om gættene løser ligningen.

c) Bestem uendeligt mange løsninger til ligningen.

2 Løsningsformler

Der findes ingen generel metode som kan anvendes til at løse enhver form for differentialligning. Der er dog bestemte typer af differentialligninger der dukker op i forbindelse med en lang række vækstmodeller, som man kan udlede løsningsformler for.

Det gælder bl.a. andet for differentialligningerne

$$\begin{aligned} y' &= g(x) \qquad (2.1) \\ y' &= ay \\ y' &= b - ay \\ y' &= ay(M - y) \end{aligned}$$

hvor a, b og M er konstanter, og g og h er funktioner. Ligningen (2.1) er specielt simpel idet y slet ikke indgår i ligningen. Den kan derfor løses blot ved at bestemme en stamfunktion til g. De resterende ligninger gennemgås i de følgende afsnit.

Hvordan ligningen (2.1) løses ses i dette eksempel:

Eksempel 2.1 Der er givet differentialligningen

$$y' = 2x + 3 \ .$$

Da man kender y' som funktion af x, kan man bestemme y som

$$y = \int (2x + 3)\,\mathrm{d}x = x^2 + 3x + c$$

hvor c er en konstant.

Den fuldstændige løsning til ligningen er altså givet ved funktionerne

$$f(x) = x^2 + 3x + c \ .$$

Hvis man leder efter en partikulær løsning, bliver man nødt til at kende et punkt på løsningskurven således at man kan bestemme værdien af konstanten c. Det vil altså sige at de to spørgsmål

> »Find den løsning til differentialligningen $y' = 2x + 3$, hvis graf går gennem punktet $P(3, 7)$.«

og

> »Bestem den stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, hvis graf går gennem punktet $P(3, 7)$.«

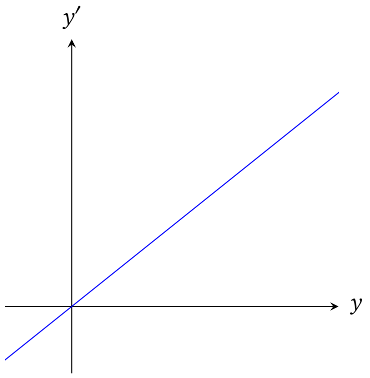
faktisk går ud på det samme.

2.1 Eksponentiel vækst

I dette afsnit ses på differentialligningen

$$y' = ay \; .$$

Denne ligning udtrykker at væksthastigheden af en given størrelse y er proportional med størrelsen selv. Det vil altså sige at hvis y f.eks. bliver dobbelt så stor, vokser den også dobbelt så hurtigt. Denne type differentialligning kan bruges til at beskrive en masse fænomener, f.eks. populationsvækst og radioaktivt henfald.[3, 4]



Figur 2.1: Visualisering af differentialligningen $y' = ay$.

En måde at visualisere dette på kan ses på figur 2.1. Her er y afsat ud ad førsteaksen og y' ud ad andenaksen. Som det fremgår af figuren, bliver væksthastigheden y' større og større jo større y bliver.

Det viser sig at denne differentialligning har en simpel løsning der fremgår af denne sætning:

Sætning 2.2

Differentialligningen
$$y' = ay$$
hvor a er en konstant, har den fuldstændige løsning
$$y = c\,\mathrm{e}^{ax}$$
hvor c er en vilkårlig konstant.

Bevis
Først omskrives ligningen til

$$\begin{aligned} y' - ay &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ y' + (-a)y &= 0 \; . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Man ganger nu ligningen (2.2) med e^{-ax} på begge sider hvorved man får

$$\begin{aligned} \big(y' + (-a)y\big) \cdot \mathrm{e}^{-ax} &= 0 \cdot \mathrm{e}^{-ax} \quad \Leftrightarrow \\ y' \cdot \mathrm{e}^{-ax} + y \cdot (-a e^{-ax}) &= 0 \; . \end{aligned}$$

Ved at anvende produktreglen på venstre side af denne ligning,[1] får man så

$$(y \cdot \mathrm{e}^{-ax})' = 0 \; .$$

Ud fra dette kan man konkludere at $y \cdot \mathrm{e}^{-ax}$ er konstant, dvs.

$$y \cdot \mathrm{e}^{-ax} = c \quad \Leftrightarrow \quad y = c\,\mathrm{e}^{ax}$$

hvor c er en konstant. ∎

[1] Husk at produktreglen siger at
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \; .$$

I beviset ovenfor ganges ligningen (2.2) med e^{-ax} på begge sider for at kunne omskrive den ved hjælp af produktreglen. Ideen er at gange med en funktion, således at venstresiden af (2.2) kan omskrives vha. produktreglen. Ganger man en vilkårlig funktion $g(x)$ på venstresiden, får man

$$(y' + (-a)y) \cdot g(x) = y' \cdot g(x) + y \cdot (-a)g(x) \; .$$

Dette svarer til differentiationen af et produkt hvis blot man kan vælge $g(x)$ sådan at $g'(x) = -a \cdot g(x)$. Det viser sig at funktionen $g(x) = e^{-ax}$ opfylder dette krav.

Som man kan se af sætningen, fører denne type differentialligning i øvrigt til eksponentiel vækst. De følgende eksempler viser hvordan man bruger formlen i sætning 2.2.

Eksempel 2.3 Differentialligningen

$$y' = 3y$$

har den fuldstændige løsning

$$y = c\,e^{3x} \; .$$

Eksempel 2.4 Her bestemmes den løsning f til differentialligningen

$$y' = -2y$$

der opfylder $f(0) = 314$.

Den fuldstændige løsning til ligningen er givet ved

$$y = c\,e^{-2x} \; .$$

Idet funktionen f opfylder $f(0) = 314$, er

$$c\,e^{-2\cdot 0} = 314 \quad \Longleftrightarrow \quad c \cdot 1 = 314 \quad \Longleftrightarrow \quad c = 314 \; .$$

Den søgte løsning er altså

$$f(x) = 314e^{-2x} \; .$$

Eksempel 2.5 Her findes den løsning $f(t)$ til differentialligningen

$$y' = 5y$$

hvis graf går gennem punktet $(3, 7)$.

Den fuldstændige løsning er givet ved

$$y = c\,e^{5t} \; .$$

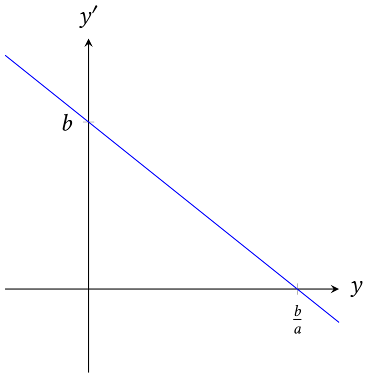
Konstanten c beregnes ved at indsætte punktet $(3, 7)$ i denne ligning,

$$c\,e^{5\cdot 3} = 7 \quad \Longleftrightarrow \quad c = \frac{7}{e^{15}} \; ,$$

og derfor er løsningen

$$f(t) = \frac{7}{e^{15}} e^{5t} = 7e^{5t-15} \; .$$

2.2 Forskudt eksponentiel vækst



Figur 2.2: Væksthastigheden som funktion af y for differentialligningen $y' = b - ay$.

I dette afsnit ses på differentialligninger af typen

$$y' = b - ay$$

hvor a og b er konstanter. På figur 2.2 ses hvordan væksthastigheden afhænger af størrelsen på y. Som det ses på figuren, er væksthastigheden aftagende, og den bliver faktisk negativ når $y > \frac{b}{a}$.

Det viser sig at løsningerne til denne ligning er forskudte eksponentielle funktioner, dvs. eksponentielle funktioner der er parallelforskudt langs andenaksen.

Sætning 2.6

Differentialligningen

$$y' = b - ay$$

hvor a og b er konstanter, har den fuldstændige løsning

$$y = \frac{b}{a} + c\,\mathrm{e}^{-ax}$$

hvor c er en vilkårlig konstant.

Bevis
Idéen i dette bevis er den samme som i beviset for sætning 2.2. Man forsøger at finde en funktion som man kan gange ligningen med sådan at man kan omskrive vha. produktreglen.

Ligningen omskrives derfor på følgende måde:

$$\begin{aligned} y' &= b - ay \quad \Longleftrightarrow \\ y' + ay &= b \end{aligned}$$

Nu viser det sig at hvis man ganger med e^{ax} på begge sider, kan venstresiden omskrives vha. produktreglen:

$$\begin{aligned} \left(y' + ay\right) \cdot \mathrm{e}^{ax} &= b \cdot \mathrm{e}^{ax} \quad \Longleftrightarrow \\ y' \cdot \mathrm{e}^{ax} + y \cdot a\,\mathrm{e}^{ax} &= b \cdot \mathrm{e}^{ax} \quad \Longleftrightarrow \\ \left(y \cdot \mathrm{e}^{ax}\right)' &= b \cdot \mathrm{e}^{ax} \end{aligned}$$

Nu kan man tage det ubestemte integral på begge sider; herved fås

$$y \cdot \mathrm{e}^{ax} = b \cdot \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + c$$

hvor c er en integrationskonstant. Nu ganger man med e^{-ax} på begge sider og får[2]

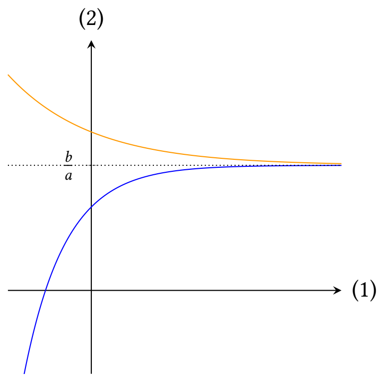
$$\begin{aligned} y \cdot \mathrm{e}^{ax} \cdot \mathrm{e}^{-ax} &= \left(\frac{b}{a}\mathrm{e}^{ax} + c\right) \cdot \mathrm{e}^{-ax} \quad \Longleftrightarrow \\ y &= \frac{b}{a} + c\,\mathrm{e}^{-ax}\ , \end{aligned}$$

og sætningen er således bevist. ■

[2] Man udnytter at

$$\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{e}^{-ax} = \mathrm{e}^{ax-ax} = \mathrm{e}^{0} = 1\ .$$

På figur 2.3 ses graferne for nogle funktioner af typen $f(x) = \frac{b}{a} + c\,\mathrm{e}^{-ax}$. Som man kan se, vokser den ene op mod linjen $y = \frac{b}{a}$, mens den anden aftager ned mod linjen. Afhængig af værdien af konstanten c finder man derfor en løsning som vokser op mod en øvre grænse eller aftager ned mod en nedre grænse.



Figur 2.3: Graferne for nogle funktioner af typen $f(x) = \frac{b}{a} + c\,\mathrm{e}^{-ax}$.

Eksempel 2.7 Differentialligningen

$$y' = 8 - 2y$$

har den generelle løsning

$$y = \frac{8}{2} + c\,\mathrm{e}^{-2x} = 4 + c\,\mathrm{e}^{-2x} .$$

Den løsning til ligningen hvis graf går gennem punktet $(0, 1)$ kan findes ved at sætte disse koordinater ind i ligningen:

$$1 = 4 + c\,\mathrm{e}^{-2\cdot 0} \quad \Longleftrightarrow \quad c = -3 ,$$

dvs. løsningen bliver

$$f(x) = 4 - 3\mathrm{e}^{-2x} .$$

Grafen for denne løsning vil vokse op mod den øvre grænse $y = 4$.

Den løsning hvis graf går gennem $(0, 9)$ opfylder derimod

$$9 = 4 + c\,\mathrm{e}^{-2\cdot 0} \quad \Longleftrightarrow \quad c = 5 ,$$

dvs. løsningen bliver

$$g(x) = 4 + 5\mathrm{e}^{-2x} ,$$

og grafen for denne løsning vil aftage mod den nedre grænse $y = 4$.

2.3 Logistisk vækst

Eksponentiel vækst kan, som nævnt ovenfor, benyttes til at modellere forskellige former for populationsvækst. Dog er der intet i den virkelige verden der kan vokse ubegrænset idet enhver form for vækst vil have begrænsede ressourcer.

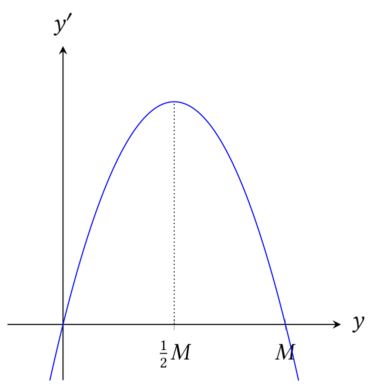
Den belgiske matematiker Verhulst publicerede i 1838 en artikel, hvor han beskrev følgende model som han havde fået bekræftet ved at analysere statistikker for befolkningsvækst:[2]

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = mp - np^2 .$$

Der er her tale om såkaldt *logistisk* vækst. Differentialligningen

$$y' = ay(M - y) , \quad a > 0 , M > 0 , \tag{2.3}$$

der er en omskrevet version af den ovenstående, viser sig at føre til funktioner der i begyndelsen vokser eksponentielt, men derefter nærmer sig en øvre grænse givet ved konstanten M.



Figur 2.4: Væksthastigheden som funktion af y for den logistiske differentialligning.

På figur 2.4 ses y' som funktion af y for den logistiske differentialligning (2.3). Differentialligningens højre side er et andengradspolynomium i y. Ganger man ind i parentesen og bytter rundt på leddene, får man nemlig

$$y' = -ay^2 + aMy\,.$$

Toppunktet for dette andengradspolynomium[3] ligger i $y = \frac{1}{2}M$. Grafen vender grenene nedad da koefficienten til y^2 er $-a$, og $a > 0$. Dvs. væksthastigheden er størst når $y = \frac{1}{2}M$. Samtidig kan man se at væksthastigheden er 0 når $y = 0$ og når $y = M$. Hvis der ingen individer er i populationen eller populationen har sin maksimale størrelse M, så er der altså ingen vækst.

[3]Rødderne i $ay(M-y)$ er 0 og M, og førstekoordinaten til toppunktet befinder sig midt imellem rødderne.

Løsningen til ligningen (2.3) er givet i følgende sætning:

Sætning 2.8

Den logistiske differentialligning

$$y' = ay(M-y)$$

hvor $a > 0$ og $M > 0$ er konstanter, har den fuldstændige løsning

$$y = \frac{M}{1 + c\,\mathrm{e}^{-aMx}}$$

hvor c er en vilkårlig konstant.

Bevis
Differentialligningen omskrives ved at gange ind i parentesen:

$$y' = ay(M-y) \quad \Longleftrightarrow \quad y' = -ay^2 + aMy\,. \tag{2.4}$$

Idet der indgår et $-y^2$ på højre side, giver det mening at lede efter en funktion y der opfylder $y' = -y^2$. Dette er opfyldt for $y = \frac{1}{z}$. Denne funktion kan dog ikke være løsningen idet der står mere på højre side end blot $-y^2$ så den skal modificeres lidt.

Man antager derfor at løsningen er givet ved $y = \frac{1}{z}$ hvor z er en funktion af x. Så får man[4]

$$y' = \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}\,z'\,.$$

[4]Da z er en funktion af x, er der her tale om differentiation af en sammensat funktion:

$$y'(x) = \left(\frac{1}{z(x)}\right)' = -\frac{1}{z(x)^2}\,z'(x)\,.$$

Udtrykkene for y og y' som funktion af z kan nu sættes ind i (2.4), og man får

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z^2}\,z' &= -a\left(\frac{1}{z}\right)^2 + aM\,\frac{1}{z} \qquad \Longleftrightarrow \\ z' &= a - aMz\,. \end{aligned}$$

Denne ligning kan løses vha. sætning 2.6, og man får

$$z = \frac{a}{aM} + c_0\,\mathrm{e}^{-aMx} = \frac{1}{M} + c_0\,\mathrm{e}^{-aMx}$$

hvor c_0 er en konstant.

Nu var z jo defineret ud fra $y = \frac{1}{z}$, dvs.

$$y = \frac{1}{\frac{1}{M} + c_0\,\mathrm{e}^{-aMx}}\ .$$

Forlænger man brøken på højre side med M, kan dette omskrives til

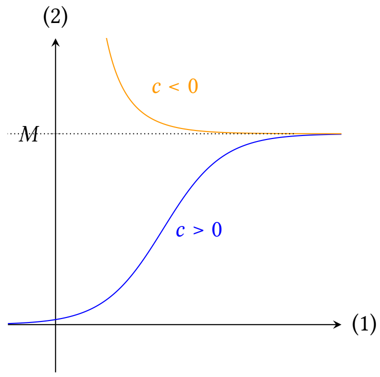
$$y = \frac{M}{1 + c\,\mathrm{e}^{-aMx}}$$

hvor $c = Mc_0$ blot er en ny vilkårlig konstant. ∎

Løsningerne til ligningen $y' = ay(M - y)$ er altså funktioner af typen

$$y = \frac{M}{1 + c\,\mathrm{e}^{-aMx}}\ .$$

På figur 2.5 ses to eksempler på hvordan graferne for sådanne funktioner ser ud. Hvis konstanten $c > 0$, er grafen en karakteristisk s-formet kurve, som vokser op mod linjen $y = M$. Er $c < 0$, aftager grafen derimod ned mod denne linje.



Figur 2.5: Grafer for logistisk vækst.

Eksempel 2.9 Differentialligningen

$$y' = 0{,}3y(820 - y)$$

kan løses vha. sætning 2.8. I ligningen er $a = 0{,}3$ og $M = 820$, dvs. den fuldstændige løsning til differentialligningen er

$$y = \frac{820}{1 + c\,\mathrm{e}^{-0{,}3\cdot 820x}} = \frac{820}{1 + c\,\mathrm{e}^{-246x}}\ .$$

Eksempel 2.10 Størrelsen af en population N opfylder differentiallignin-gen

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0{,}0001N\,(14000 - N)$$

hvor N er antal individer, og tiden t måles i døgn. Til tiden $t = 0$ er populationens størrelse $N = 2000$.

Differentialligningen har den fuldstændige løsning

$$N(t) = \frac{14000}{1 + c\,\mathrm{e}^{-0{,}0001\cdot 14000t}} = \frac{14000}{1 + c\,\mathrm{e}^{-1{,}4t}}\ .$$

Konstanten c kan nu bestemmes ud fra oplysningen om at $N(0) = 2000$, dvs.

$$\frac{14000}{1 + c\,\mathrm{e}^{-1{,}4\cdot 0}} = 2000 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = 6\ .$$

Populationens størrelse kan altså beskrives ved funktionen

$$N(t) = \frac{14000}{1 + 6\mathrm{e}^{-1{,}4t}}\ .$$

Den logistiske differentialligning forekommer også af og til på formen

$$y' = y(b - ay)\ .$$

Denne form svarer fuldstændigt til formen (2.3) hvor $b = aM$. Derfor gælder følgende sætning, som ikke bevises:

Sætning 2.11

Differentialligningen

$$y' = y(b - ay)$$

hvor $a > 0$ og $b > 0$ er konstanter, har den fuldstændige løsning

$$y = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c\,\mathrm{e}^{-bx}}$$

hvor c er en vilkårlig konstant.

2.4 Øvelser

Øvelse 2.1
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' = 4y\,.$$

Bestem herefter den løsning hvis graf går gennem punktet $(0, 13)$.

Øvelse 2.2
Bestem de løsninger til de givne differentialligninger hvis grafer går gennem det givne punkt:

a) $y' = 3y$ og $(0, 5)$

b) $y' = -5y$ og $(4, 2)$

c) $y' = 2y$ og $(3, 1)$

Øvelse 2.3
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningerne

a) $y' = 12 - 3y$ b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4y = 8$

Øvelse 2.4
Bestem de løsninger til de givne differentialligninger hvis grafer går gennem det givne punkt:

a) $y' = 6 - 3y$ og $(0, 7)$

b) $y' = 1 - 5y$ og $(10, 6)$

c) $y' + 2y = 10$ og $(1, 9)$

Øvelse 2.5
Funktionen $f(t)$ hvor tiden t måles i minutter, beskriver temperaturen (i °C) af en kop kaffe. Funktionen f er en løsning til differentialligningen

$$y' = 0{,}6 - 0{,}03y\,.$$

Kaffen har en temperatur på 90°C til tiden $t = 0$.

a) Bestem en forskrift for $f(t)$.

b) Hvor varm er kaffen efter 30 min?

c) Hvad er omgivelsernes temperatur?

Øvelse 2.6
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' = 2y(3 - y)\,,$$

Øvelse 2.7
En population af frøer i en sø vokser således at antallet $N(t)$ (hvor tiden t måles i år) af frøer er en løsning til differentialligningen

$$N' = N(1{,}3 - 0{,}005N)\,.$$

Til tiden $t = 0$ er der 25 frøer i søen.

a) Bestem en forskrift for funktionen $N(t)$.

b) Hvor mange frøer er der i søen efter 2 år?

c) Hvad er det maksimale antal frøer i populationen?

d) Hvor mange frøer er der i populationen når den vokser hurtigst?

3 Lineære førsteordens differentialligninger

En differentialligning af formen

$$y' + g(x)\,y = h(x) \tag{3.1}$$

kaldes en *lineær* førsteordens differentialligning. Hvis funktionen $h(x) = 0$, kaldes differentialligningen homogen; i sådanne tilfælde er det lettest at løse ligningen ved separation af variable – denne metode gennemgås i sidste afsnit i dette kapitel.

Hvis derimod $h(x)$ ikke konstant er 0, så kaldes ligningen en *inhomogen lineær førsteordens differentialligning*. Ligningerne

$$y' = ay \qquad \text{og} \qquad y' = b - ay$$

som er blevet behandlet ovenfor, er af denne form. Her er funktionerne $g(x)$ og $h(x)$ konstante hvilket gør ligningen nemmere at løse.

Det viser sig dog at man kan udlede en generel løsningsformel som passer på enhver ligning af formen (3.1).

3.1 Panserformlen

Den følgende sætning giver en generel løsningsformel til lineære, førsteordens differentialligninger.

Sætning 3.1: Panserformlen

Den lineære, førsteordens differentialligning

$$y' + g(x)\,y = h(x)$$

har den generelle løsning

$$y = \mathrm{e}^{-G(x)} \int h(x)\mathrm{e}^{G(x)}\,\mathrm{d}x$$

hvor G er en stamfunktion til g.

Bevis
Hvis $G(x)$ er en stamfunktion til $g(x)$, så er

$$\left(\mathrm{e}^{G(x)}\right)' = \mathrm{e}^{G(x)} \cdot G'(x) = \mathrm{e}^{G(x)} \cdot g(x)\,.$$

Ganger man nu med $\mathrm{e}^{G(x)}$ på begge sider af differentialligningen, får man

$$\begin{aligned}\left(y' + g(x)\,y\right)\cdot \mathrm{e}^{G(x)} &= h(x)\cdot \mathrm{e}^{G(x)} &&\iff\\ y'\cdot \mathrm{e}^{G(x)} + y\cdot \mathrm{e}^{G(x)}\,g(x) &= h(x)\,\mathrm{e}^{G(x)} &&\iff^{1}\\ y'\cdot \mathrm{e}^{G(x)} + y\cdot \left(\mathrm{e}^{G(x)}\right)' &= h(x)\,\mathrm{e}^{G(x)}\,.\end{aligned}$$

Ligningens venstre side kan nu omskrives vha. produktreglen, og man får

$$\begin{aligned}\left(y\,\mathrm{e}^{G(x)}\right)' &= h(x)\,\mathrm{e}^{G(x)} &&\iff\\ y\,\mathrm{e}^{G(x)} &= \int h(x)\,\mathrm{e}^{G(x)}\,\mathrm{d}x &&\iff\\ y &= \frac{1}{\mathrm{e}^{G(x)}}\int h(x)\,\mathrm{e}^{G(x)}\,\mathrm{d}x &&\iff\\ y &= \mathrm{e}^{-G(x)}\int h(x)\,\mathrm{e}^{G(x)}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist. ■

[1]Idet, det lige er vist, at

$$\mathrm{e}^{G(x)}\cdot g(x) = \left(\mathrm{e}^{G(x)}\right)'\,.$$

Formlen i sætning 3.1 kaldes *panserformlen*. Det er en løsningsformel der kan bruges på et væld af forskellige differentialligninger. Der er dog det problem at det integral der indgår i formlen, ikke altid kan løses – og så er man jo lige vidt. I nogle tilfælde kan det dog lade sig gøre hvilket fremgår af følgende eksempler:

Eksempel 3.2 Differentialligningen

$$y' + 2x\,y = -6x$$

kan løses vha. panserformlen. Her er

$$g(x) = 2x\,,\quad G(x) = x^2 \quad \text{og} \quad h(x) = -6x\,.$$

Indsættes det i formlen, får man

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-x^2}\int -6x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^{-x^2}\left(-3\mathrm{e}^{x^2} + c\right) = -3 + c\,\mathrm{e}^{-x^2}\,.\end{aligned}$$

Eksempel 3.3 I differentialligningen

$$y' + \cos(x)\,y = 4\cos(x)$$

er

$$g(x) = \cos(x)\,,\quad G(x) = \sin(x) \quad \text{og} \quad h(x) = 4\cos(x)\,.$$

Indsættes det i formlen, får man

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-\sin(x)}\int 4\cos(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^{-\sin(x)}\left(4\mathrm{e}^{\sin(x)} + c\right) = 4 + c\,\mathrm{e}^{-\sin(x)}\,.\end{aligned}$$

Hvis man vil finde den løsningskurve der går gennem punktet $(0,6)$, indsætter man punktets koordinater i ligningen og får

$$6 = 4 + c\,\mathrm{e}^{-\sin(0)} \quad\iff\quad c = 2\,,$$

dvs. den partikulære løsning hvis graf går gennem $(0,6)$, er

$$f(x) = 4 + 2\mathrm{e}^{-\sin(x)}\,.$$

3.2 Separation af variable

Visse typer af differentialligninger viser sig at kunne løses vha. en teknik der kaldes *separation af variable*. Navnet henviser til at man løser differentialligningen ved at separere den uafhængige og den afhængige variabel således at disse står på hver sin side af ligningen.

Eksempel 3.4 Hvis man vil løse differentialligningen

$$y' = xy\,,$$

gør man følgende:

Først skrives differentialligningen op på formen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy\,.$$

Dernæst isolerer man alle led med y på venstre side og alle led med x på højre side,

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x\,.$$

Til sidst integrerer man på begge sider[2]

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(y) = \tfrac{1}{2}x^2 + k.$$

Løsningen til differentialligningen findes da ved at isolere y

$$y = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+k} = \mathrm{e}^k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = c\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\,.$$

Den fuldstændige løsning til differentialligningen er altså $f(x) = c\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$, hvor c er en konstant (som er lig med e^k).

Der er flere problemer i eksempel 3.4 ovenfor. Det største problem er at man regner med $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, som om det var en almindelig brøk.[3] For at kunne argumentere for metoden bliver man derfor nødt til at gå lidt mere matematisk til værks.

Differentialligningen i eksempel 3.4 er et specialtilfælde af ligningen[4]

$$y' = g(x)\,h(y).$$

Hvis de to funktioner g og h opfører sig tilstrækkeligt pænt,[5] så gælder følgende sætning,

Sætning 3.5

Løsningen til differentialligningen

$$y' = g(x)\,h(y)$$

er også løsning til ligningen

$$\int \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

[2] Det er kun nødvendigt at tilføje en integrationskonstant k på den ene side når man udfører integrationen, idet man altid vil kunne samle konstanter der er lagt til, på den ene side af ligningen.

[3] I virkeligheden er $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ jo en anden måde at skrive y' på. Det er altså et samlet symbol og ikke en brøk.

[4] I eksempel 3.4 er $g(x) = x$ og $h(y) = y$.

[5] De to funktioner skal være kontinuerte, og $h(y) \neq 0$.

Bevis
Man kan omskrive ligningen på følgende måde

$$\begin{aligned} y' &= g(x)\,h(y) && \iff \\ \frac{1}{h(y)}\,y' &= g(x) && \iff \end{aligned}$$

Nu integrerer man mht. x på begge sider

$$\int \frac{1}{h(y)} y' \,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}x \,.$$

Den venstre side af denne ligning svarer til integration med substitution,[6] så ligningen kan omskrives til

$$\int \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x \,.$$

[6] Husk at

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g)\,\mathrm{d}g \,.$$

Hermed er sætningen bevist. ■

Her følger til sidst et par eksempler på hvordan man bruger sætning 3.5.

Eksempel 3.6 For at løse differentialligningen

$$y' = \mathrm{e}^x\, y^2 \,,$$

anvendes sætning 3.5.

Det ses at

$$g(x) = \mathrm{e}^x \qquad \text{og} \qquad h(y) = y^2 \,.$$

Løsningen til differentialligningen er derfor også løsning til

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \,.$$

Nu integrerer man på begge sider og løser ligningen,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y} &= \mathrm{e}^x + k && \iff \\ y &= -\frac{1}{\mathrm{e}^x + k} \,. \end{aligned}$$

Løsningen til differentialligningen er derfor $f(x) = -\frac{1}{\mathrm{e}^x+k}$.

Eksempel 3.7 Her findes den løsning til differentialligningen

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x}}$$

hvis graf går gennem punktet $(0, 7)$.

Ligningen omskrives først til $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot y$. Heraf kan man se at $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ og $h(y) = y$, dvs.

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \iff$$

$$\begin{aligned} \ln(y) &= 2\sqrt{x} + k && \iff \\ y &= e^{2\sqrt{x}+k} && \iff \\ y &= e^k e^{2\sqrt{x}} && \iff \\ y &= c\, e^{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

hvor $c = e^k$ er en konstant.

Da grafen for løsningen skal gå gennem $(0;7)$ er

$$7 = c\, e^{2\sqrt{0}} = c \cdot 1 = c\ ,$$

dvs. den søgte løsning er $f(x) = 7e^{2\sqrt{x}}$.

3.3 Øvelser

Øvelse 3.1
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' + 2y = e^{3x}\ .$$

Øvelse 3.2
Bestem den fuldstændige løsning til ligningen

$$xy' = y + 2x^3\ .$$

Øvelse 3.3
Bestem den løsning til differentialligningen

$$y' - \sin(x)y = 3\sin(x)$$

hvis graf går gennem $(0,1)$.

Øvelse 3.4
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$x^2y' + xy = -2\ .$$

Øvelse 3.5
Løs differentialligningen $y' - y = xe^x$.

Øvelse 3.6
Bestem en forskrift for den funktion f der er en løsning til differentialligningen

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^2}$$

og hvor $f(1) = 2$.

Øvelse 3.7
Bestem løsningen til differentialligningen

$$y' = 3x^2e^{-y}\ .$$

Bestem herefter den løsning hvis graf går gennem $(0;4)$.

Øvelse 3.8
Bestem den fuldstændige løsning til $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

Øvelse 3.9
Bestem den løsning til differentialligningen

$$y' = \frac{x-1}{y}$$

hvis graf går gennem punktet $(0;1)$.

Øvelse 3.10
Bestem alle løsningerne til ligningen

$$y^2 \cdot y' = x\ .$$

Øvelse 3.11
Bestem den partikulære løsning til

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$$

som går gennem $(0;0)$.

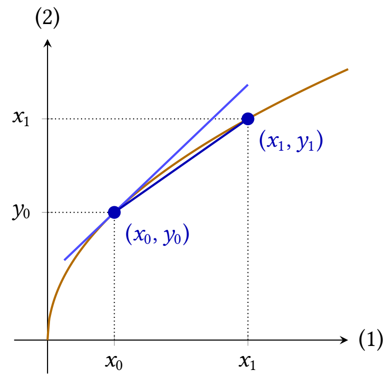
Øvelse 3.12
Bestem den fuldstændige løsning til

$$y' = \frac{xy}{x^2+1}\ .$$

4 Numerisk løsning af differentialligninger

I de foregående to kapitler blev der gennemgået løsningsformler til en række forskellige typer af differentialligninger. Dog er det ikke alle differentialligninger der kan løses analytisk. I de tilfælde hvor man har en differentialligning der ikke direkte kan løses, kan man i stedet løse den ved at benytte numeriske metoder til at regne sig frem til en tilnærmet løsningskurve.

Idéen bag de metoder der præsenteres i dette kapitel, består i at regne sig frem fra ét punkt på en løsningskurve til det næste vha. hældningen af sekanten mellem disse to punkter. Har man en differentialligning, kan man dog kun beregne *tangent*hældningen i et givet punkt, og man forsøger derfor at beregne en tilnærmelse til sekanthældningen ud fra denne.



Figur 4.1: To punkter på en løsningskurve samt tangenten i det ene punkt.

Figur 4.1 viser en løsningskurve til en differentialligning samt to punkter på kurven. Sekanthældningen mellem de to punkter (x_0, y_0) og (x_1, y_1) på kurven er

$$a_s = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \ .$$

Omskriver man denne ligning, får man

$$y_1 = y_0 + a_s \cdot \Delta x \ ,$$

eller mere generelt

$$y_1 = y_0 + a_s \cdot \Delta x \tag{4.1}$$

hvor $\Delta x = x_1 - x_0$ er afstanden mellem x-værdierne. Man kan altså beregne y-værdien i punktet (x_1, y_1) ud fra punktet (x_0, y_0) hvis man kender sekanthældningen a_s. Hvis man har en differentialligning der kan skrives på den generelle form

$$y' = g(x, y)$$

så er det muligt at beregne *tangent*hældningen i punktet (x_0, y_0). Men som figuren viser, er hældningen af tangenten og sekanten ikke det samme.

Ideen i metoderne nedenfor er at bestemme en tilnærmet værdi til sekanthældningen i (x_0, y_0) sådan at man kan bruge ligning (4.1) til at regne sig frem til et punkt (x_1, y_1^*) hvor y_1^* er en tilnærmet værdi til den rigtige y-værdi i punktet (x_1, y_1) på grafen. Ud fra punktet (x_1, y_1^*) kan man derefter beregne en værdi for sekanthældningen i (x_1, y_1^*) så man kan regne sig frem til det næste punkt (x_2, y_2^*), osv.

Generelt kan metoden altså udtrykkes vha. formlen

$$y^*_{n+1} = y^*_n + a_s \cdot \Delta x \tag{4.2}$$

som udtrykker at man kan finde et estimat for en y-værdi hvis man kender den foregående y-værdi og har en metode til at beregne en værdi for sekanthældningen a_s. En sådan formel hvor man beregner en værdi på baggrund af den foregående, kaldes en *rekursionsformel.*

4.1 Eulers metode

Som nævnt ovenfor er tangenthældningen i et punkt og den ønskede sekanthældning ikke det samme. Men kigger man på figur 4.1, kan man dog se at forskellen på de to hældninger bliver mindre, jo tættere x_0 og x_1 er på hinanden.

Hvis differentialligningen kan skrives som $y' = g(x, y)$, så er tangenthældningen i punktet (x_0, y_0) givet ved $g(x_0, y_0)$ Er $\Delta x = x_1 - x_0$ meget lille, kan man altså ud fra ligningen (4.1) argumentere for at

$$y^*_1 = y_0 + g(x_0, y_0) \cdot \Delta x$$

er en god tilnærmelse til den rigtige y-værdi i punktet (x_1, y_1).

Ud fra dette argument følger rekursionsformlen

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \ , \qquad y^*_{n+1} = y^*_n + g(x_n, y^*_n) \cdot \Delta x$$

som kaldes *Eulers metode.*[1] Fremgangsmåden kan illustreres med et eksempel.

Eksempel 4.1 I dette eksempel bestemmes den løsningskurve til differentialligningen

$$y' = 0{,}3 \cdot y$$

der går gennem punktet $(0, 5)$. Ligningen kan løses analytisk dvs. man kan sammenligne den eksakte løsning med den tilnærmede løsning man får vha. Eulers metode. Den eksakte løsning til ligningen er givet ved funktionen $f(x) = 5 \cdot \mathrm{e}^{0{,}3x}$.

I differentialligningen $y' = 0{,}3 \cdot y$ er funktionen g som er nævnt ovenfor, givet ved

$$g(x, y) = 0{,}3 \cdot y \ .$$

Eulers metode bliver så i dette tilfælde

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \ , \qquad y^*_{n+1} = y^*_n + \underbrace{0{,}3 \cdot y^*_n}_{g(x_n, y^*_n)} \cdot \Delta x \ .$$

Metoden virker bedst når *skridtlængden* Δx mellem x-værdierne er lille. Her vælges $\Delta x = 0{,}2$. Så har man

$$x_0 = 0 \ , \qquad\qquad y_0 = 5$$

$$x_1 = \underbrace{0 + 0{,}2}_{x_0+\Delta x} = 0{,}2\ , \qquad y_1^* = \underbrace{5}_{y_0} + \underbrace{0{,}3 \cdot 5 \cdot 0{,}2}_{0{,}3\cdot y_0\cdot\Delta x} = 5{,}3$$

$$x_2 = \underbrace{0{,}2 + 0{,}2}_{x_1+\Delta x} = 0{,}4\ , \qquad y_2^* = \underbrace{5{,}3}_{y_1^*} + \underbrace{0{,}3 \cdot 5{,}3 \cdot 0{,}2}_{0{,}3\cdot y_1^*\cdot\Delta x} = 5{,}618$$

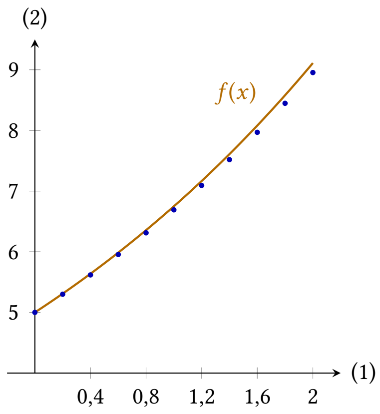
$$x_3 = \underbrace{0{,}4 + 0{,}2}_{x_2+\Delta x} = 0{,}6\ , \qquad y_3^* = \underbrace{5{,}618}_{y_2^*} + \underbrace{0{,}3 \cdot 5{,}618 \cdot 0{,}2}_{0{,}3\cdot y_2^*\cdot\Delta x} = 5{,}955\ .$$

Forsætter man disse udregninger, får man tallene i tabel 4.2. Som man kan se af tabellen er de tilnærmede y-værdier y^* meget tæt på de sande y-værdier beregnet vha. funktionen $f(x)$.

Den eksakte løsning og den tilnærmede kan også ses afbildet på figur 4.3. Her ses det at den tilnærmede løsning ligger tæt på den eksakte. Afvigelsen mellem de to kan gøres mindre ved at gøre Δx mindre.

Tabel 4.2: Tilnærmede og sande y-værdier for differentialligningen $y' = 0{,}3 \cdot y$.

x	y^*	$f(x)$
0	5	5
0,2	5,3	5,309
0,4	5,618	5,637
0,6	5,955	5,986
0,8	6,312	6,356
1	6,691	6,749
1,2	7,093	7,167
1,4	7,518	7,610
1,6	7,969	8,080
1,8	8,447	8,580
2	8,954	9,111



Figur 4.3: Løsningskurven til differentialligningen $y' = 0{,}3 \cdot y$ samt den tilnærmede løsning fundet vha. Eulers metode.

Eksempel 4.2 I dette eksempel bestemmes en tilnærmet løsning til en differentialligning der ikke kan løses analytisk. Ligningen

$$y' = \sqrt{x} + \sin(y)$$

har en løsningskurve der går gennem punktet $(1, 2)$. Det er ikke muligt at bestemme den eksakte løsning til ligningen, men man kan bestemme en tilnærmet løsningskurve vha. Eulers metode.

Funktionen $g(x, y)$ er givet ved

$$g(x, y) = \sqrt{x} + \sin(y)\ ,$$

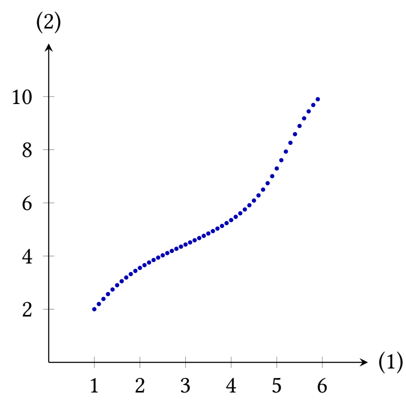
så Eulers metode bliver

$$x_{n+1} = x_n\ , \qquad y_{n+1}^* = y_n^* + (\sqrt{x} + \sin(y)) \cdot \Delta x\ .$$

Vælger man $\Delta x = 0{,}1$, får man

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1\ , & y_0 &= 2\\
x_1 &= 1{,}1\ , & y_1^* &= 2 + (\sqrt{1} + \sin(2)) \cdot 0{,}1 = 2{,}196\\
x_2 &= 1{,}2\ , & y_2^* &= 2{,}196 + (\sqrt{1{,}1} + \sin(2{,}196)) \cdot 0{,}1 = 2{,}386\\
x_3 &= 1{,}3\ , & y_3^* &= 2{,}386 + (\sqrt{1{,}2} + \sin(2{,}386)) \cdot 0{,}1 = 2{,}569\\
x_4 &= 1{,}4\ , & y_4^* &= 2{,}196 + (\sqrt{1{,}3} + \sin(2{,}569)) \cdot 0{,}1 = 2{,}742
\end{aligned}$$

Da man skal foretage den samme udregning rigtigt mange gange, kan man med fordel anvende et regneark til at beregne punkterne (x_n, y_n^*). Løsningskurven for de første 50 punkter beregnet vha. metoden kan ses på figur 4.4.



Figur 4.4: Tilnærmet løsningskurve til differentialligningen $y' = \sqrt{x} + \sin(y)$.

4.2 Heuns metode

Eulers metode er udmærket til hurtigt at bestemme tilnærmede løsningskurver, men dens præcision er ikke specielt god. På figur 4.3 ligger den tilnærmede løsningskurve under grafen. Dette skyldes at grafen for funktionen $f(x)$ krummer opad. Anvender man tangenthældningen i et punkt til at estimere sekanthældningen, vil man derfor altid få en lidt for lav værdi.

I Heuns metode forsøger man at rette op på dette ved også at se på tangenthældningen i det følgende punkt på grafen. Når man skal beregne en tilnærmet værdi for sekanthældningen fra (x_n, y_n) til (x_{n+1}, y_{n+1}), inddrager man tangenthældningen i begge punkter. Problemet er nu at man ikke kender punktet (x_{n+1}, y_{n+1}) idet dette jo skal beregnes ud fra punktet (x_n, y_n).

Man beregner derfor først tangenthældningen i punktet (x_n, y_n^*), og derefter laver man et foreløbigt estimat for (x_{n+1}, y_{n+1}) vha. Eulers metode hvorefter man bestemmer tangenthældningen i dette punkt vha. funktionen g. Herefter tager man gennemsnittet af de to tangenthældninger.

Man beregner altså tangenthældningen k_1 i punktet (x_n, y_n^*) og tangenthældningen k_2 i punktet $(x_{n+1}, y_n^* + k_1 \cdot \Delta x)$ der er et estimat for det næste punkt på grafen.[1]

$$\begin{aligned} k_1 &= g(x_n, y_n^*) \\ k_2 &= g(x_{n+1}, y_n^* + k_1 \cdot \Delta x) \ . \end{aligned}$$

Herefter anvender man gennemsnittet af disse to hældninger som sekanthældningen i ligningen (4.2),

$$y_{n+1}^* = y_n^* + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \cdot \Delta x \ .$$

Tabel 4.5: Tilnærmede og sande y-værdier for differentialligningen $y' = 0{,}3 \cdot y$ beregnet vha. Heuns metode.

x	y^*	$f(x)$
0	5	5
0,2	5,309	5,309
0,4	5,637	5,637
0,6	5,985	5,986
0,8	6,355	6,356
1	6,748	6,749
1,2	7,165	7,167
1,4	7,608	7,610
1,6	8,078	8,080
1,8	8,577	8,580
2	9,107	9,111

Eksempel 4.3 Her anvendes metoden på den samme differentialligning som i eksempel 4.1. Differentialligningen er

$$y' = 0{,}3 \cdot y \ ,$$

og løsningskurven går gennem $(0, 5)$. Der anvendes samme skridtlængde som før, nemlig $\Delta x = 0{,}2$.

Det første punkt på kurven er $(0, 5)$. Man beregner så

$$\begin{aligned} k_1 &= \underbrace{0{,}3 \cdot 5}_{0{,}3 \cdot y_0} = 1{,}5 \\ k_2 &= \underbrace{0{,}3 \cdot (5 + 1{,}5 \cdot 0{,}2)}_{0{,}3 \cdot (y_0 + k_1 \cdot \Delta x)} = 1{,}59 \ . \end{aligned}$$

Herefter er

$$y_1^* = \underbrace{5}_{y_0} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(1{,}5 + 1{,}59) \cdot 0{,}2}_{\frac{1}{2}(k_1 + k_2) \cdot \Delta x} = 5{,}309 \ .$$

Det næste punkt på løsningskurven er så $(0.2, 5.309)$.

Man kan nu beregne det næste punkt på løsningskurven vha. samme metode, osv. osv. Igen er det praktisk at anvende et regneark da man skal foretage mange beregninger af samme type. Tabel 4.5 viser nogle af de første beregnede punkter på løsningskurven. Sammenligner man denne tabel med tabel 4.2, bliver det tydeligt at Heuns metode er væsentligt mere præcis end Eulers.

4.3 Fjerdeordens Runge-Kutta

Både Heuns og Eulers metode kan gøres mere præcise ved at formindske skridtlængden Δx. Gør man det, skal man dog lave mange flere beregninger. Ideelt set vil man gerne have en metode der giver temmeligt præcise resultater for relativt store værdier af Δx. En metode der anvendes i rigtigt mange CAS-værktøjer når man løser differentialligninger numerisk, er den såkaldte *fjerdeordens Runge-Kutta-metode.*

I denne metode giver man et estimat for sekanthældningen i et punkt både ud fra tangenthældningen i start- og slutpunktet (som i Heuns metode), men også ud fra det estimerede midtpunkt. Metoden kan udtrykkes ved disse ligninger:[1]

$$\begin{aligned} k_1 &= g(x_n, y_n^*) \\ k_2 &= g(x_n + \tfrac{1}{2}\Delta x, y_n^* + k_1 \cdot \tfrac{1}{2}\Delta x) \\ k_3 &= g(x_n + \tfrac{1}{2}\Delta x, y_n^* + k_2 \cdot \tfrac{1}{2}\Delta x) \\ k_4 &= g(x_n + \Delta x, y_n^* + k_3 \cdot \Delta x) \end{aligned}$$

og

$$y_{n+1}^* = y_n^* + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \cdot \Delta x \ .$$

Her er k_1 tangenthældningen i startpunktet (x_n, y_n^*). Tallet k_2 er tangenthældningen i midtpunktet, estimeret vha. hældningen k_1. Tallet k_3 er tangenthældningen i midtpunktet, estimeret vha. hældningen k_2. Og k_4 er tangenthældningen i slutpunktet, estimeret vha. hældningen k_3. Et estimat for tangenthældningen mellem start- og slutpunkterne fås til sidst som et vægtet gennemsnit

$$\tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

af de fire konstanter.

Teorien bag metoden er ret kompliceret, men den er meget mere præcis end de to tidligere nævnte metoder. Hvis man f.eks. beregner tabel 4.5 vha. denne metode frem for Heuns metode, vil de estimerede værdier være lig med de eksakte værdier med 5 decimalers præcision.[1]

[1] Hvis man ser bort fra den sidste række i tabellen er de faktisk lig med hinanden med 6 decimalers præcision.

4.4 Øvelser

Øvelse 4.1
Der er givet differentialligningen

$$y' = 2x - y \ .$$

a) Opstil en rekursionsformel til at løse denne differentialligning vha. Eulers metode.

Øvelse 4.2
Der er givet samme differentialligning som i øvelse 4.1. En løsningskurve til denne ligning går gennem punktet $(0, 3)$

a) Brug Eulers metode med en skridtlængde på $\Delta x = 0{,}2$ til at beregne de tre næste punkter på løsningskurven.

Øvelse 4.3
Der er givet differentialligningen

$$y' = 8 - 2y\ ,$$

og punktet $(0, 1)$ ligger på løsningskurven.

a) Bestem den eksakte løsning til ligningen, og tegn grafen for denne.

b) Anvend en skridtlængde på $\Delta x = 0{,}2$, og brug et regneark til at bestemme punkter på løsningskurven vha. Eulers metode for $0 \leq x \leq 2$.

c) Indtegn punkterne i samme koordinatsystem som grafen fra a).

d) Hvor stor er den største afvigelse de eksakte y-værdier, og de y-værdier der er beregnet vha. Eulers metode?

Sæt nu $\Delta x = 0{,}1$.

e) Hvor stor bliver den største afvigelse nu?

Øvelse 4.4
Der er givet en differentialligning

$$y' = 0{,}3y(4 - y)$$

og et begyndelsespunkt $(0, 1)$.

a) Brug Eulers metode med en skridtlængde på $\Delta x = 0{,}2$ til at bestemme løsningskurven i intervallet $0 \leq x \leq 3$.

b) Bestem den største afvigelse af de estimerede værdier fra de korrekte.

Sæt nu $\Delta x = 0{,}1$, og beregn igen punkterne på løsningskurven.

c) Bestem den største afvigelse af de estimerede værdier fra de korrekte.

d) Hvor mange gange er den største afvigelse blevet mindre ved at halvere skridtlængden?

5 Opstilling af differentialligninger

I dette kapitel gennemgås nogle eksempler på hvordan man kan opstille differentialligninger ud fra en sproglig beskrivelse.

Eksempel 5.1 En population vokser således at væksthastigheden er proportional med populationens størrelse. Proportionalitetskonstanten er 0,003 døgn^{-1}.

Kalder man populationen for N er væksthastigheden N'. Beskrivelsen af væksten siger altså at N' er proportional med N, dvs. $N' = kN$. Proportionalitetskonstanten k er kendt, dvs. beskrivelsen kan oversættes til differentialligningen

$$N' = 0{,}003N \ .$$

Eksempel 5.2 En tændt vandhane fylder et badekar. Der løber vand ned i karret med en hastighed på 0,5 L/s. Bundproppen er dog utæt, så der løber vand ud af karret med en hastighed der er proportional med mængden af vand i karret. Proportionalitetskonstanten er 0,001 s^{-1}.

Hvis denne beskrivelse skal oversættes til en differentialligning, skal man opstille en ligning for væksthastigheden. Kalder man mængden af vand i badekarret for v, kan man se at væksthastigheden v' er differensen af det vand der løber ind i karret, og det vand der løber ud. Vandet løber ind med en hastighed på 0,5 L/s. Det løber ud med en hastighed der er proportional med mængden af vand, dvs. v. Altså løber der vand ud med en hastighed på $0{,}001v$.

Sætter man dette sammen, når man frem til følgende differentialligning

$$v' = 0{,}5 - 0{,}001v$$

hvor 0,5 altså beskriver den konstante tilstrømning af vand, og leddet $0{,}001v$ beskriver den mængde vand der løber ud af karret pr. sekund.

Eksempel 5.3 I en model er antallet N af individer i en population en funktion af tiden t (målt i døgn). Væksthastigheden af N til tiden t er proportional med produktet af antallet af individer og forskellen på 1300 og antallet af individer. Væksthastigheden er 15 individer pr. døgn når der er 300 individer i populationen.

I beskrivelsen dukker disse størrelse op:

- Væksthastigheden, dvs. N',
- antallet af individer, dvs. N, og
- forskellen på 1300 og antallet af individer, dvs. $1300 - N$.

Væksthastigheden N' er proportional med produktet af de sidste to størrelser, dvs. N' er proportional med $N \cdot (1300 - N)$. Altså gælder der

$$N' = kN\,(1300 - N)$$

hvor k er en proportionalitetskonstant.

Størrelsen af k kan bestemmes ud fra den sidste oplysning i beskrivelsen. Her står nemlig, at $N' = 15$, når $N = 300$. Indsættes dette i ligningen, får man

$$15 = k \cdot 300 \cdot (1300 - 300) \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = 0{,}00005\ .$$

Altså kan beskrivelsen oversættes til differentialligningen

$$N' = 0{,}00005N\,(3200 - N)\ .$$

5.1 Øvelser

Øvelse 5.1
I en model for andelen af kulstof-14 i dødt organisk materiale er hastigheden kulstof-14-andelen aftager med proportional med andelen af kulstof-14 (målt i procent).

Til tiden $t = 0$ er andelen 100%, og proportionalitetskonstanten er $-0{,}00012$.

Opstil en differentialligningen der beskriver udviklingen af andelen af kulstof-14 i dødt organisk materiale.

Øvelse 5.2
Antallet af individer i en population N er en funktion af tiden t (målt i år). Væksthastigheden for antallet af individer er proportional med produktet af N og forskellen mellem 7200 og N. Proportionalitetskonstanten er 0,0021.

Opstil en differentialligning som N opfylder.

Bibliografi

[1] Edmund Christiansen. *Numerisk analyse.* Institut for Matematik og Datalogi, Odense Universitet, 1999.

[2] Kristian Danielsen og Henrik Kragh Sørensen. *Vækst i nationens tjeneste – Hvordan Verhulst fik beskrevet logistisk vækst.* Matematiklærerforeningen, 2014.

[3] Hans Ulrik Riisgaard. *Basisbog i økologi.* 2. udg. København: G.E.C. Gads Forlag, 1995.

[4] Morton M. Sternheim og Joseph W. Kane. *General Physics.* 2nd edition. John Wiley & Sons, Inc., 1991.