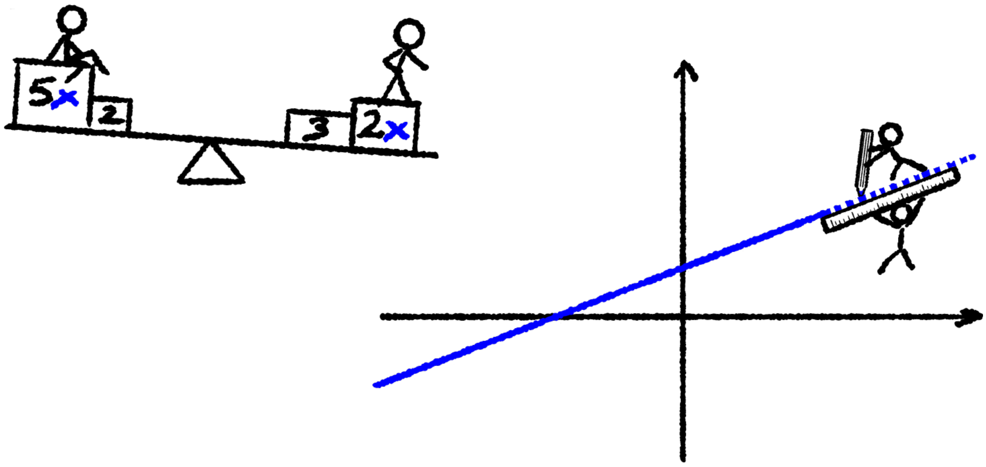
Matematik i grundforløbet

Version 3.3
8. august 2024



Mike Vandal Auerbach
www.mathematicus.dk

Matematik i grundforløbet
Version 3.3, 2024

Disse matematiknoter er skrevet til matematikundervisningen i grundforløbet (som det ser ud efter læreplanen i 2024) på stx. Noterne er skrevet med det formål at have en grundbog som kun indeholder den grundliggende matematiske teori. I forbindelse med samarbejdet med naturvidenskabeligt grundforløb (eller med andre fag) er det derfor nødvendigt at supplere med eksempler og andet materiale der dækker konkrete anvendelser.

Enkelte grafer/figurer er markeret med symbolet der fungerer som link til et interaktivt GeoGebra-arbejdsark. Se også www.geogebra.org.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Indhold

1 Regning

Dette korte kapitel handler om hvordan man regner. Det drejer sig om en repetition af de fire basale regningsarter

- *addition*, dvs. at lægge sammen (f.eks. $3 + 5 = 8$),
- *subtraktion*, dvs. at trække fra (f.eks. $7 - 13 = -6$),
- *multiplikation*, dvs. at gange (f.eks. $2 \cdot 8 = 16$), og
- *division*, dvs. at dele/dividere (f.eks. $\frac{6}{3} = 2$),

samt

- *potensopløftning*, f.eks. $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, og
- *roduddragning*, f.eks. $\sqrt[3]{64} = 4$.

I første omgang handler kapitlet om subtraktion og fortegn.

1.1 Subtraktion og negative tal

For at beskrive ideen om mangel eller gæld matematisk har man brug for de *negative tal*.[1] I første omgang kan man nøjes med at se på de negative hele tal:

$$-1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots \ .$$

[1] De negative tal er en forholdsvis ny opfindelse inden for matematikken. Helt op i det 18. århundrede var der matematikere der mente at de negative tal ikke eksisterede.[3]

Man kan på sin vis sige at ethvert negativt tal er et »modsat tal« til et positivt tal. Lægger man sammen får man f.eks.[2]

$$3 + (-3) = 0 \quad \text{og} \quad (-3) + 3 = 0 \ .$$

[2] I regnestykket er der sat parentes om -3. Det gør man for at vise, at $-$ er et fortegn, dvs. det hører til tallet -3; en anden god grund er, at når man sætter parentesen, er det nemmere at se, at der både står et $+$ og et $-$. Helt generelt må man ikke skrive et fortegn lige efter et regnetegn uden at sætte en parentes.

Man kan argumentere for, at $-(-3)$ er det modsatte tal til -3, og at der derfor må gælde, at

$$-(-3) + (-3) = 0 \ .$$

Men fordi $3 + (-3) = 0$, må man have, at

$$-(-3) = 3 \ .$$

Dette må gælde for alle tal (og ikke kun tallet 3).

Vha. de negative tal kan man *definere* subtraktion som addition med det modsatte tal. Et eksempel kunne være

$$8 - 2 = 8 + (-2) \ .$$

Dette kan også forklare hvorfor man ikke bare kan bytte rundt på tallene. $2 - 8$ er ikke det samme som $8 - 2$, da tegnet $-$ faktisk hører til 2-tallet. Når man lægger sammen er rækkefølgen til gengæld ligegyldig, så man kan gøre følgende

$$8 - 2 = 8 + (-2) = -2 + 8 \ .$$

Som man kan se, bliver tegnet $-$ ved med at stå foran 2-tallet.

1.2 Fortegn ved multiplikation og division

Det er simpelt at argumentere for, hvordan man ganger positive tal sammen; men hvad sker der, når man blander negative tal ind i regnestykkerne?

Hvis man ser på de negative tal som gæld, er det naturligt at fortolke et regnestykke som $-6 \cdot 3$ på den måde, at man gør en gæld på 6 stk. 3 gange så stor, hvilket giver en gæld på 18. Dvs.

$$-6 \cdot 3 = -18 \ .$$

Da rækkefølgen, man ganger i, er ligegyldig, gælder der så også, at[3]

[3]Bemærk parentesen om -6; den sætter man for at vise at fortegnet hører til 6-tallet (og den er ikke valgfri).

$$3 \cdot (-6) = -18 \ .$$

Hvis man ganger et positivt tal med et negativt (eller omvendt), bliver resultatet altså negativt.

For at finde ud af, hvad der sker, når man ganger to negative tal med hinanden, kan man bruge følgende argument: $-2 \cdot (-4)$ må være det modsatte tal til $2 \cdot (-4)$. Og da $2 \cdot (-4) = -8$, må

$$-2 \cdot (-4) = -(-8) = 8 \ .$$

Når man ganger to negative tal med hinanden, bliver resultatet altså positivt.

Fortegnsreglerne for multiplikation kan ses samlet i tabel 1.1.

Idet division er den modsatte operation af multiplikation, gælder der tilsvarende fortegnsregler når man dividerer. Disse kan ses i tabel 1.2.

Tabel 1.1: Fortegnsregler for multiplikation.

Regel	Eksempel
$(+) \cdot (+) = (+)$	$2 \cdot 3 = 6$
$(+) \cdot (-) = (-)$	$2 \cdot (-4) = -8$
$(-) \cdot (+) = (-)$	$(-3) \cdot 5 = -15$
$(-) \cdot (-) = (+)$	$(-4) \cdot (-2) = 8$

Tabel 1.2: Fortegnsregler for division.

Regel	Eksempel
$\frac{(+)}{(+)} = (+)$	$\frac{6}{2} = 3$
$\frac{(+)}{(-)} = (-)$	$\frac{10}{-5} = -2$
$\frac{(-)}{(+)} = (-)$	$\frac{-14}{2} = -7$
$\frac{(-)}{(-)} = (+)$	$\frac{-18}{-3} = 6$

1.3 Regningsarternes hierarki

Når man skal udføre et regnestykke som f.eks. $7 + 5 \cdot 3^2$, bliver man nødt til at vide i hvilken rækkefølge man skal udføre de forskellige trin. Skal man f.eks. lægge 7 og 5 sammen først, eller skal man udregne 3^2 først?

Derfor har man nogle regler for hvilken rækkefølge man skal regne i sådan at man kan sikre sig at alle får samme (og rigtige) resultat ud af et regnestykke.

Sætning 1.1: Regningsarternes hierarki

Når man skal udføre et regnestykke, skal udregningerne foregå i denne rækkefølge:[4]

1. Først udføres potensopløftning og roduddragning.
2. Dernæst udføres multiplikation (gange) og division.
3. Til sidst lægger man sammen og trækker fra.

Denne rækkefølge kan kun ændres ved brug af parenteser. Står en del af en udregning i parentes, skal den betragtes som et lille regnestykke for sig selv, som altid skal udregnes *først*.

Et par eksempler på udregninger gives herunder.

Eksempel 1.2 Et eksempel på anvendelse af regningsarternes hierarki:

$$\begin{aligned} 2\cdot 17 - 4\cdot 2^3 &= 2\cdot 17 - 4\cdot 8 && \text{Først beregnes potensopløfning.}\\ &= 34 - 32 && \text{Så ganges der.}\\ &= 2 && \text{Til sidst trækkes der fra.} \end{aligned}$$

Eksempel 1.3 Et eksempel hvor der indgår parenteser:

$$\begin{aligned} (6+2)\cdot 5 + 3\cdot\sqrt{16} &= 8\cdot 5 + 3\cdot\sqrt{16} && \text{Parentesen udregnes først.}\\ &= 8\cdot 5 + 3\cdot 4 && \text{Så uddrages rødder.}\\ &= 40 + 12 && \text{Dernæst ganger man.}\\ &= 52 && \text{Til sidst lægger man sammen.} \end{aligned}$$

Man kan altså komme igennem et regnestykke ved at følge hierarkiet fra øverst til nederst og tage hensyn til eventuelle parenteser.

1.4 Skjulte parenteser

Når der i foregående afsnit tales om parenteser, gælder det også i de tilfælde, hvor man måske ikke umiddelbart tænker over at der faktisk står en parentes.

I et regnestykke som $\frac{3+17}{10}$ er det givet at man skal udregne $3+17$ først. Når en division er skrevet vha. en brøkstreg bliver der altså på sin vis introduceret parenteser som man skal tage hensyn til når man gennemfører udregningen.

Det samme står man overfor når man uddrager rødder. F.eks. skal man i regnestykket $\sqrt{17-8}$ beregne $17-8$ før man tager kvadratroden.

Eksempel 1.4 I de følgende fire regnestykker er det vist eksplicit, hvor man skal sætte de parenteser som er underforståede:

$$\frac{3+9}{4} = \frac{(3+9)}{4}$$
$$\frac{50}{7-2} = \frac{50}{(7-2)}$$

[4] Rækkefølgen af regneoperationer følger af at udregninger skal give logisk mening. At man skal gange før man lægger sammen, kan man f.eks. se ved at huske at $4\cdot 3 = 4+4+4$. Derfor må

$$2+4\cdot 3 = 2+4+4+4\,,$$

og derfor bliver man nødt til at gange sammen først (med mindre man vil skrive alle gangestykkerne om til plusstykker).

$$7^{2+1} = 7^{(2+1)}$$
$$\sqrt{7+9} = \sqrt{(7+9)}$$
$$\sqrt[5-2]{8} = \sqrt[(5-2)]{8}\,.$$

Det er vigtigt at huske disse parenteser når man regner; især hvis man taster regnestykket ind på en lommeregner.

Eksemplet er ikke udtømmende der kan sagtens findes andre typer af regnestykker hvor der er en underforstået parentes. Som hovedregel gælder, at hvis noget ligner en afgrænset del af en udregning, så er det det nok også.

1.5 Øvelser

Øvelse 1.1
Udregn resultatet af de følgende regnestykker:

a) $12 - 5$ b) $2 - 6$
c) $15 - 6 - 7$ d) $7 - (-8)$

Øvelse 1.2
Beregn resultatet af de følgende regnestykker:

a) $5 \cdot (-3)$ b) $7 \cdot 2$
c) $-8 \cdot (-4)$ d) $\dfrac{-12}{4}$
e) $\dfrac{22}{-11}$ f) $\dfrac{-18}{-3}$

Øvelse 1.3
Beregn resultatet af de følgende regnestykker:

a) 3^4 b) 6^2
c) $\sqrt[3]{27}$ d) $\sqrt[4]{16}$

Øvelse 1.4
Beregn resultatet af de følgende regnestykker:

a) $3 - 4 \cdot 2$
b) $5 \cdot 3^2$
c) $11 - 2 \cdot (8+3) - \dfrac{16}{8} + 1$
d) $9 \cdot (-2) + 10 \cdot 3 - \dfrac{6}{2} \cdot \left(3 \cdot 2 - 5 \cdot \dfrac{14}{7}\right)$

Brøkregning 2

En brøk er et tal der betegner et antal dele af en enhed. En brøk skrives som to hele tal med en vandret streg imellem:

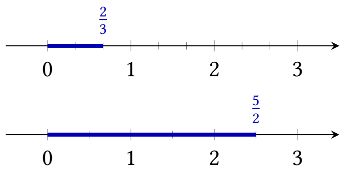
$$\frac{2}{3}\,,\quad \frac{7}{4}\,,\quad \frac{-13}{29}\;.$$

Den vandrette streg kaldes en *brøkstreg*, det øverste tal kaldes *tælleren*, og tallet under brøkstregen kaldes *nævneren.*[1]

[1]Tæller og nævner kan være hvilke som helst hele tal, også negative; dog må nævneren ikke være 0.

Brøken $\frac{2}{3}$ er den størrelse man får, når man deler 1 hel i 3 dele, og tager 2 af dem. En brøk kan også fortolkes som det præcise resultat man får, når man dividerer tælleren med nævneren.

Hvis man skal visualisere størrelsen af en brøk i forhold til de hele tal, kan det gøres vha. tallinjen (se figur 2.1).



Figur 2.1: De to tal $\frac{2}{3}$ og $\frac{5}{2}$ placeret på tallinjen.

2.1 At forkorte og forlænge

Hvis en brøk kan fortolkes som det resultat man får, når man dividerer tæller med nævner, så kan man jo forestille sig at regnestykket »går op«, dvs. resultatet bliver et helt tal. Nogle brøker kan altså skrives om til hele tal, f.eks.[2]

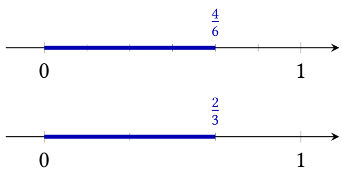
$$\frac{10}{5} = 2\,,\qquad \frac{36}{9} = 4\,,\qquad \frac{-27}{3} = -9\;.$$

[2]Omvendt kan de hele tal forstås som de brøker der har den underforståede nævner 1, f.eks $8 = \frac{8}{1}$.

Selvom regnestykket ikke går op, så er det nogle gange muligt at gøre tæller og nævner mindre; det kalder man at *forkorte* brøken. Det kan man når der findes et tal som går op i både brøkens tæller og nævner.

Situationen er illustreret på figur 2.2. Her kan man se at $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Det kan man også regne sig frem til hvis man opdager at tallet 2 går op i både tæller og nævner i brøken $\frac{4}{6}$. Da en brøk er et udtryk for forholdet mellem tæller og nævner, ændrer den ikke størrelse hvis tæller og nævner deles med samme tal. Altså er

$$\frac{4}{6} = \frac{4/2}{6/2} = \frac{2}{3}\;.$$



Figur 2.2: Man kan se ud af de to tallinjer, at $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Man ændrer ikke brøkens værdi ved at forkorte. Tallet har præcis samme størrelse som før; man har blot gjort det mere læsevenligt og nemmere at regne med idet tæller og nævner er blevet mindre.

Eksempel 2.1 Et par yderligere eksempler på hvordan man forkorter brøker:

$$\frac{15}{36} = \frac{15/3}{36/3} = \frac{5}{12} \,,$$
$$\frac{24}{56} = \frac{24/8}{56/8} = \frac{3}{7} \,,$$
$$\frac{27}{18} = \frac{27/9}{18/9} = \frac{3}{2} \,.$$

Når man kan dividere med samme tal i tæller og nævner uden at ændre brøkens værdi, så kan man også gange.[3] Herved bliver både tæller og nævner større, og det virker ikke umiddelbart smart; men det viser sig at være brugbart når man skal lægge brøker sammen – mere om det i næste afsnit.

[3]Det er vigtigt at huske at man skal dividere eller gange med *samme tal* i *både* tæller og nævner. Ellers ændrer man brøkens værdi.

Her vises blot et par eksempler på, hvordan man *forlænger* en brøk.

Eksempel 2.2 Hvis man forlænger $\frac{3}{4}$ med 5, får man

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20} \,.$$

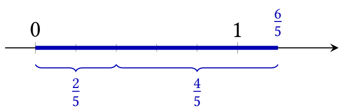
Forlænger man $\frac{8}{5}$ med 3, får man

$$\frac{8}{5} = \frac{8 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{24}{15} \,.$$

2.2 Addition og subtraktion

Det viser sig at man kun kan lægge brøker sammen hvis de har samme nævner. Hvis det er tilfældet, lægger man blot tællerne sammen. F.eks. er

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2+4}{5} = \frac{6}{5} \,.$$



Figur 2.3: Regnestykket $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$ illustreret på tallinjen.

Dette regnestykke er illustreret på figur 2.3.

Uanset hvor meget man gerne vil, kan man ikke lægge brøker sammen der har forskellige nævnere. Ikke desto mindre ville det være rart at kunne beregne f.eks. $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$. Hvis man kun kan lægge brøker sammen der har samme nævner, må man derfor på en eller anden måde sørge for at de to brøker *får* samme nævner.

Dette gør man ved at forlænge brøkerne. I tilfældet $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ kan man forlænge $\frac{1}{4}$ med 3 og $\frac{2}{3}$ med 4; så får man

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12} \,.$$

Når man forlænger på denne måde, får begge brøkerne nævneren 12, og man kan så lægge dem sammen.

I regnestykket ser man, at man forlænger den ene brøk med den andens nævner (og omvendt). Denne teknik virker altid.[4]

[4]Men det er ikke altid nødvendigt. Nogle gange kan man nøjes med at forlænge med to mindre tal og stadig få samme nævner på de to brøker.

Eksempel 2.3 Et par eksempler på hvordan man lægger brøker sammen:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}\,,$$
$$\frac{7}{4}+\frac{2}{11}=\frac{7\cdot 11}{4\cdot 11}+\frac{2\cdot 4}{11\cdot 4}=\frac{77}{44}+\frac{8}{44}=\frac{85}{44}\,,$$
$$\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}+\frac{1}{10}=\frac{6}{10}+\frac{1}{10}=\frac{7}{10}\,.$$

I den sidste udregning ses at det ikke altid er nødvendigt at forlænge begge brøker for at få fælles nævner.[5]

[5] Det er ofte en fordel at forlænge med så små tal som overhovedet muligt, fordi små tal simpelthen er nemmere at regne med.

Hvis man skal trække brøker fra hinanden, så fungerer det på samme måde som når man lægger sammen. Man kan kun trække en brøk fra en anden brøk hvis de har samme nævner. F.eks.

$$\frac{8}{13}-\frac{3}{13}=\frac{8-3}{13}=\frac{5}{13}\,.$$

Har de to brøker ikke samme nævner, så må man forlænge sådan at de får den samme nævner.

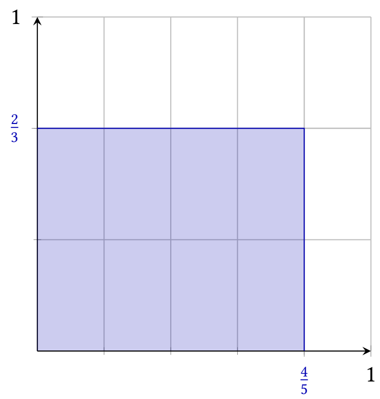
Eksempel 2.4 Her er tre eksempler på hvordan man trækker brøker fra hinanden.

$$\frac{4}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4\cdot 5}{3\cdot 5}-\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{20}{15}-\frac{6}{15}=\frac{14}{15}\,,$$
$$\frac{7}{8}-\frac{1}{2}=\frac{7}{8}-\frac{1\cdot 4}{2\cdot 4}=\frac{7}{8}-\frac{4}{8}=\frac{3}{8}\,,$$
$$\frac{2}{3}-\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}-\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{10}{15}-\frac{12}{15}=\frac{-2}{15}\,.$$

Det er i øvrigt god stil at forkorte resultatet så meget som muligt (hvis det kan forkortes).

2.3 Multiplikation og division

En af de måder man kan finde ud af hvordan man ganger tal sammen på, er ved at betragte produktet som et areal. Man finder som bekendt arealet af et rektangel ved at gange længden med bredden. Resultatet af et regnestykke som $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$ vil altså være arealet af et rektangel, som er $\frac{4}{5}$ langt og $\frac{2}{3}$ bredt.



Figur 2.4: Illustration af $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$.

På figur 2.4 kan man se resultatet af regnestykket illustreret. Her ses, at

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}\,.$$

Hvis man ser nærmere på figuren, kan man se at antallet af fyldte rektangler (resultatets tæller) fås ved at gange de to tællere (4 og 2) sammen. Antallet af små rektangler som 1 hel deles op i finder man ved at gange de to nævnere (5 og 3). Samlet set er altså

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{8}{15}\,.$$

Brøker bliver altså ganget sammen ved at man ganger tæller med tæller og nævner med nævner.

Eksempel 2.5 Et par eksempler på gangestykker:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7} = \frac{15}{14} ,$$
$$\frac{4}{9} \cdot \frac{7}{11} = \frac{4 \cdot 7}{9 \cdot 11} = \frac{28}{99} ,$$
$$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{13}{7} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{65}{42} .$$

Den sidste type regnestykke der gennemgås i dette kapitel, er division. Som eksempel kan man se på regnestykket

$$\frac{4}{7} \Big/ \frac{2}{5} .$$

For at finde ud af hvad dette giver, er det nødvendigt først at konstatere at[6]

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 2} = \frac{10}{10} = 1 .$$

[6]Dette regnestykke er udtryk for en generel regel: Når man ganger en brøk med dens omvendte, bliver resultatet 1.

Hvis man tager det oprindelige regnestykke $\frac{4}{7} \big/ \frac{2}{5}$ og ganger det med 1, så ændrer man ikke noget ved resultatet, dvs. man kunne lige så godt have skrevet

$$\frac{4}{7} \Big/ \frac{2}{5} \cdot 1 .$$

Men når man ved, at $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$, så kan man også skrive det som

$$\frac{4}{7} \Big/ \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} \right) .$$

Rækkefølgen man ganger og dividerer i, er uden betydning. Så man kan uden videre flytte parentesen, så der i stedet står

$$\left(\frac{4}{7} \Big/ \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \right) \cdot \frac{5}{2} .$$

Nu står der inde i parentesen at $\frac{4}{7}$ skal divideres med $\frac{2}{5}$ hvorefter man skal gange med $\frac{2}{5}$. Da division og multiplikation virker modsat hinanden, gør det i virkeligheden intet ved tallet $\frac{4}{7}$. Man kan derfor i virkeligheden fjerne det og nøjes med at skrive

$$\left(\frac{4}{7} \right) \cdot \frac{5}{2}$$

som er det samme som $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{2}$.

Hele vejen igennem er der regnet på det samme regnestykke. Derfor må man kunne konkludere at

$$\frac{4}{7} \Big/ \frac{2}{5} = \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{2} .$$

Man dividerer altså med en brøk ved at gange med den omvendte brøk.

Eksempel 2.6 Et par eksempler:

$$\frac{3}{8}\bigg/\frac{7}{5} = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} = \frac{15}{56}\,,$$
$$\frac{1}{2}\bigg/\frac{11}{5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{11} = \frac{5}{22}\,,$$
$$\frac{7}{6}\bigg/\frac{3}{13} = \frac{7}{6}\cdot\frac{13}{3} = \frac{91}{18}\,.$$

2.4 Hele tal og brøker

Hvis der indgår hele tal i en udregning med brøker, så er den nemmeste måde at regne videre på simpelthen at lave de hele tal om til brøker. Dette kan man gøre ved at give dem nævneren 1. F.eks. er

$$8 = \frac{8}{1}, \qquad 12 = \frac{12}{1} \qquad \text{og} \qquad -3 = \frac{-3}{1}\,.$$

Herefter bliver regnestykkerne nemmere idet man jo nu kun har brøker.

Eksempel 2.7 Som eksempel kan man se på regnestykket $2 + \frac{3}{4}$. Laver man 2-tallet om til en brøk, får man

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{4}\,.$$

For at man kan lægge de to brøker sammen, skal de have fælles nævner. Det kan man få ved at forlænge $\frac{2}{1}$ med 4:

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{4} = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}\,.$$

Resultatet er altså $\frac{11}{4}$.

Eksempel 2.8 Hvis man skal udføre divisionen $\frac{4}{3}\big/5$, så laves 5-tallet om til brøken $\frac{5}{1}$. Så er

$$\frac{4}{3}\bigg/\frac{5}{1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{15}\,.$$

2.5 Lidt om fortegn

Hvis man skal regne med fortegn i brøkregnestykker, foregår det på nøjagtigt samme måde som når man dividerer, idet en brøk kan fortolkes som en division.

Når man dividerer et positivt tal med et negativt eller et negativt med et positivt er resultatet negativt.

Derfor er f.eks.

$$\frac{-6}{11} = \frac{6}{-11}\,.$$

Man skriver derfor som regel fortegnet uden for brøken, dvs.

$$-\frac{6}{11}\,.$$

Når der står et minus uden for brøken, betyder det altså blot at resultatet er negativt; og da man får samme resultat hvad enten minusset sættes på tælleren eller nævneren, er det i princippet ligegyldigt hvor minusset står *så længe der kun er ét.*

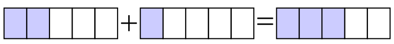
Er der placeret et minus på både tæller og nævner, dividerer man to negative tal med hinanden, og så bliver resultatet positivt. Altså

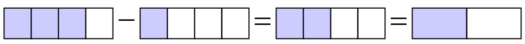
$$\frac{-13}{-7} = \frac{13}{7} \ .$$

Hvis man har et længere gange- og divisionsstykke, kan man afgøre fortegnet for resultatet ved at huske at alle par af minusser »forsvinder«. Hvis der er et *lige* antal minusser i regnestykket, bliver resultatet positivt, er antallet af minusser *ulige*, bliver resultatet negativt.

2.6 Øvelser

Øvelse 2.1
Skriv billederne om til regnestykker med brøker:

a) 

b) 

Øvelse 2.2
Beregn og skriv resultatet som en uforkortelig brøk.

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{3} + \frac{7}{9}$

c) $\frac{3}{4} + \frac{1}{9}$ d) $\frac{3}{7} + \frac{11}{3}$

e) $\frac{2}{9} + \frac{5}{6}$ f) $\frac{15}{4} - \frac{1}{6}$

Øvelse 2.3
Forkort brøkerne mest muligt.

a) $\frac{24}{32}$ b) $\frac{112}{200}$

c) $\frac{63}{77}$ d) $\frac{17}{136}$

Øvelse 2.4
Beregn, og angiv resultatet som en uforkortelig brøk.

a) $\frac{5}{8} - \frac{13}{20} - \frac{3}{15}$ b) $\frac{11}{9} - \frac{7}{18} + \frac{4}{27}$

c) $\frac{4}{5} + \frac{7}{3} - \frac{5}{4}$ d) $\frac{3}{6} - \frac{12}{16} - \frac{3}{8}$

e) $\frac{4}{9} - \frac{7}{6} + \frac{12}{9}$ f) $\frac{5}{7} + \frac{3}{21} - \frac{2}{14}$

Øvelse 2.5
Beregn, og angiv resultatet som en uforkortelig brøk.

a) $\frac{2}{3} \cdot 5 + 7 \cdot \frac{1}{2}$ b) $-\frac{3}{2} \cdot 8 + \frac{\frac{7}{2}}{3}$

Øvelse 2.6
Beregn, og angiv resultatet som en uforkortelig brøk.

a) $\frac{9}{14} + \frac{3}{4} - \frac{2}{7}$ b) $3 \cdot \frac{3}{13} - \frac{\frac{4}{7}}{2} + \frac{2}{3}$

c) $\frac{\frac{5}{3}}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{6} - 32 \cdot \frac{1}{7}$ d) $\frac{3}{4} - \frac{\frac{1}{5}}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{3}$

Algebra 3

Algebra er en samlet betegnelse for de regler der gælder når man regner med tal. I matematikken har man nogle gange brug for at regne med tal hvis værdi man ikke kender. Sådanne tal kaldes »ubekendte«. I stedet for det ukendte tal skriver man et bogstav, f.eks. x, y, a eller A.[1]

[1]I matematikken skelner man mellem store og små bogstaver – a og A er altså ikke det samme tal.

Hvis man har et regnestykke hvori der indgår tal man ikke kender, kan man af gode grunde ikke beregne et endeligt resultat. Men man kan nogle gange forsimple regnestykket, så man ikke skal regne nær så meget når man endelig får det ukendte tals værdi at vide.

Idet f.eks.

$$5 + 5 + 5 = 3 \cdot 5\ ,$$

ved man, at

$$x + x + x = 3 \cdot x\ ,$$

uanset hvilken værdi x har. Ud fra samme betragtning giver f.eks.

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4\ ,$$

at

$$x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4\ .$$

Så det man anvender de algebraiske regler til, er at forsimple regneudtryk og formler sådan at de bliver nemmere at arbejde med.

De regneregler man anvender, er som sagt de sædvanlige regneregler for hvordan man regner med tal. Dette skyldes at bogstaverne jo netop også *er* tal. Der er dog en enkelt lille detalje i notationen som er vigtig at vide: I algebraiske udtryk er det normalt at man ikke skriver gangetegn mellem størrelser hvis man kan undlade dem og stadig forstå regnestykket.[2] Derfor er

[2]Når man regner med tal, er det nødvendigt at skrive gangetegnene sådan at man kan skelne 73 fra $7 \cdot 3$. Dette er ikke nødvendigt med f.eks. $7x$.

$$\begin{aligned}
4p &= 4 \cdot p \\
3xy &= 3 \cdot x \cdot y \\
5w^2 &= 5 \cdot w^2 \\
2y^3z &= 2 \cdot y^3 \cdot z \\
7ab^2 &= 7 \cdot a \cdot b^2 \\
2(x+y) &= 2 \cdot (x+y) \\
(5-x)(2-x) &= (5-x) \cdot (2-x)\ .
\end{aligned}$$

3.1 Ensbenævnte størrelser

Hvis x og x kan lægges sammen til $2x$, kan man også gøre følgende:

$$3x + 4x = \overbrace{x + x + x}^{3\text{ stk.}} + \overbrace{x + x + x + x}^{4\text{ stk.}} = 7x\ .$$

Er bogstaverne ens, kan man altså lægge tallene sammen (eller trække dem fra hinanden).

Eksempel 3.1 Et par andre eksempler på, hvordan man lægger størrelser sammen kunne være

$$\begin{aligned} 2x + 5x &= 7x \\ 5p^2 + 11p^2 &= 16p^2 \\ 4y + 7y + 2y &= 13y \\ 8xy - 3xy &= 5xy \\ 7w^3 - 15w^3 &= -8w^3\ . \end{aligned}$$

Størrelser som $2x$ og $5x$ kaldes *ensbenævnte*. Hvis man har to ensbenævnte størrelser som er lagt sammen, lægger man dem altså sammen ved at lægge tallene sammen.[3] For at man kan gøre dette, skal bogstaverne være *fuldstændigt* ens. Man kan altså f.eks. ikke lægge $2a$ og $4b$ sammen.

[3] Når man trækker fra, gælder der en tilsvarende regel.

Eksempel 3.2 Da man kun kan lægge led med ensbenævnte størrelser sammen er

$$\begin{aligned} 3x - 8y + 6x &= 3x + 6x - 8y = 9x - 8y \\ 4w + 7u - w + 5uw &= 4w - w + 7u + 5uw = 3w + 7u + 5uw \\ -3y + 4z + 5y - z &= -3y + 5y + 4z - z = 2y + 3z \\ 4x + 3x^2 + 2x &= 4x + 2x + 3x^2 = 6x + 3x^2\ . \end{aligned}$$

Som det fremgår af ovenstående eksempel er $4x$ og $3x^2$ ikke ensbenævnte størrelser. Det er altså vigtigt, at bogstaverne er fuldstændig ens, også mht. en evt. potensopløftning.[4]

[4] Til gengæld er $3ab$ og ba ensbenævnte størrelser idet rækkefølgen man ganger i, er ligegyldig. Dvs. at $ba = ab$. Det samme gælder for eksempel for xy^2 og y^2x; men ikke for yx^2 da det her er det forkerte tal der står i anden potens.

3.2 Parenteser

For at forsimple udtryk anvender man ofte de følgende 3 love der gælder for addition og multiplikation.

Den kommutative lov: $a + b = b + a$ og $a \cdot b = b \cdot a$.

Den associative lov : $a + (b + c) = (a + b) + c$ og $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Den distributive lov: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Den kommutative lov siger blot at rækkefølgen er underordnet når man lægger sammen eller ganger. Den associative lov viser at nogle parenteser er ligegyldige. F.eks. er

$$8x + (3x + 6x) = (8x + 3x) + 6x\ .$$

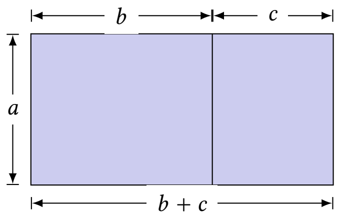
Parentesen er derfor ligegyldig, og man kunne lige så godt skrive

$$8x + 3x + 6x \ .$$

Summen af disse tre led er i øvrigt $17x$.

Står der et »+« foran en parentes, kan parentesen altså uden videre fjernes. Det samme gælder ikke hvis der står et »−«. Hvis man vil vide hvad man skal gøre i denne situation, får man brug for den distributive lov.

Den distributive lov kan man argumentere for vha. figur 3.1, og den viser altså hvordan man skal gange et tal med en sum.



Figur 3.1: Hele arealet af rektanglet er $a \cdot (b + c)$, men man kan også beregne arealet som summen af de to små rektangler, dvs. $a \cdot b + a \cdot c$. Dette betyder at der må gælde $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Hvis man husker, at $-x = (-1)x$, kan man udlede at

$$a - (b + c) = a + (-1)(b + c) = a + (-1)b + (-1)c = a - b - c \ .$$

Når der står »−« foran en parentes, så kan man altså fjerne parentesen ved at ændre fortegn på alle leddene inde i parentesen.

Eksempel 3.3 Et par eksempler på hvordan man hæver parenteser kunne være

$$\begin{aligned} x + (8 - 2x) &= x + 8 - 2x \ , \\ 8y - (y + 3) &= 8y - y - 3 \ , \\ 5t + (6 + 2t) &= 5t + 6 + 2t \ , \\ 7p - (1 - 6p) &= 7p - 1 + 6p \ . \end{aligned}$$

Hvis man skal gange en størrelse på en sum, anvender man også den distributive lov.

Eksempel 3.4 Et par eksempler på hvordan man ganger et tal med en sum eller en differens, er

$$\begin{aligned} 2(x + 5) &= 2x + 2 \cdot 5 = 2x + 10 \ , \\ x - 8(5 + x) &= x + (-8) \cdot 5 + (-8)x = x - 40 - 8x \ , \\ y(3 + y) &= 3y + y^2 \ . \end{aligned}$$

Et lidt mere avanceret eksempel er

$$\begin{aligned} 5 - ab(3b + a) &= 5 + (-ab) \cdot 3b + (-ab)a = 5 - ab \cdot 3b - aba \\ &= 5 - 3abb - aab = 5 - 3ab^2 - a^2b \ . \end{aligned}$$

En sidste ting der kunne være interessant at vide, er hvad der sker når man ganger to summer sammen; som f.eks. $(a + b) \cdot (c + d)$. Her anvendes den distributive lov to gange, så man får

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d \ .$$

Som man kan se, ganges alle led i den første parentes altså med alle led i næste parentes. Dette kan også illustreres på følgende måde:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d \ .$$

Alle disse regneregler for parenteser kan sammenfattes i følgende sætning.

Sætning 3.5

For udregninger med parenteser gælder følgende:

1. $a + (b + c) = a + b + c$.
2. $a - (b + c) = a - b - c$.
3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
4. $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$.

At sætte uden for parentes

Nogle gange kan det være en fordel at læse den distributive lov »baglæns«. Sætning 3.5(3) bliver derved til

Sætning 3.6

For de tre tal a, b og c gælder

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c) .$$

Det man gør for at omskrive udtrykkene på denne måde, er at identificere en størrelse der går op i alle led. F.eks. er

$$12x + 18y = 6 \cdot 2x + 6 \cdot 3y = 6 \cdot (2x + 3y) .$$

Eksempel 3.7 Flere eksempler på at »sætte uden for parentes« er

$$\begin{aligned} 5x + 15y &= 5x + 5 \cdot 3y = 5 \cdot (x + 3y) , \\ 7a + ab &= a(7 + b) , \\ 3pq - 5pq^2 &= 3pq - 5pq \cdot q = pq \cdot (3 - 5q) . \end{aligned}$$

Eksempel 3.8 Et avanceret eksempel, hvor det viser sig, at man kan sætte $2xy$ uden for parentes, er

$$\begin{aligned} 2x^2y + 4xy^2 - 6xy &= 2xxy + 2 \cdot 2xyy - 3 \cdot 2xy \\ &= 2xy \cdot x + 2xy \cdot 2y - 2xy \cdot 3 = 2xy(x + 2y - 3) . \end{aligned}$$

Eksempel 3.9 Man kan få brug for at sætte uden for parentes, når man skal forkorte en brøk. Et eksempel kunne være

$$\frac{6x + 9}{12} = \frac{3 \cdot (2x + 3)}{12} = \frac{3 \cdot (2x + 3)/3}{12/3} = \frac{2x + 3}{4} .$$

3.3 Toleddede størrelser

Størrelser som $(a + b)^2$ og $(a - b)^2$ kaldes *kvadratet på en toleddet størrelse*. De hedder sådan fordi man tager kvadratet på en størrelse der består af to led.

Når man ganger to parenteser sammen, ganger man alle led i den ene parentes med alle leddene i den anden. Hvis nogle af leddene er de samme er der mulighed for at reducere udtrykket.

Man får så for de to kvadrater at[5]

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + b^2 + 2ab \ ,$$

og

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = aa + a(-b) + (-b)a + (-b)(-b) = a^2 + b^2 - 2ab \ .$$

[5] I de følgende udregninger bliver det udnyttet flere steder at $ab = ba$.

Hvis fortegnene i de to parenteser er forskellige, har man ikke et kvadrat på en toleddet størrelse. Men resultatet af en sådan multiplikation er alligevel interessant for man får

$$(a+b)\cdot(a-b) = aa + (-b)a + ba + (-b)b = a^2 - b^2 \ .$$

Læser man nu disse udregninger fra højre mod venstre, får man en matematisk sætning der fortæller hvad der skal til for at noget kan omskrives til et kvadrat på en toleddet størrelse.

Sætning 3.10

Man kan lave følgende omskrivning til et kvadrat på en toleddet størrelse:

1. $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$.
2. $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$.

En differens mellem to kvadrater kan skrives om til et produkt:

3. $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$.

Her følger et par eksempler på anvendelser af formlerne:

Eksempel 3.11 Man kan læse formlerne fra højre mod venstre og beregne

$$\begin{aligned}
(x+4)^2 &= x^2 + 4^2 + 2x\cdot 4 = x^2 + 16 + 8x \ ,\\
(6-p)^2 &= 6^2 + p^2 - 2\cdot 6p = 36 + p^2 - 12p \ ,\\
(t-3)\cdot(t+3) &= t^2 - 3^2 = t^2 - 9 \ ,\\
(8x-2y)^2 &= (8x)^2 + (2y)^2 - 2\cdot 8x\cdot 2y = 64x^2 + 4y^2 - 32xy \ .
\end{aligned}$$

Men formlerne er mest interessant når man læser dem fra venstre mod højre. Så kan man nemlig regne som i de næste to eksempler.

Eksempel 3.12

$$\begin{aligned}
x^2 + 49 + 14x &= x^2 + 7^2 + 2\cdot 7x = (x+7)^2 \ ,\\
4p^2 - 25q^2 &= (2p)^2 - (5q)^2 = (2p+5q)\cdot(2p-5q) \ ,\\
9a^2 + 36 - 36a &= (3a)^2 + 6^2 - 2\cdot 3a\cdot 6 = (3a-6)^2 \ .
\end{aligned}$$

Eksempel 3.13 Af og til kan man forkorte brøker, der ikke ser umiddelbart forkortelige ud. F.eks. er

$$\frac{x^2 + 25 - 10x}{4x - 20} = \frac{(x-5)^2}{4(x-5)} = \frac{x-5}{4} \ .$$

3.4 Øvelser

Øvelse 3.1
Reducer følgende udtryk mest muligt:

a) $4(a+5b)+7(3a+b)$

b) $x(y+3)-y(x-6)$

c) $17x-(14x-(7x+2))$

d) $(6x-5y)(3x-10)-(2x+7)(9x+4y)$

e) $4(2x+7y)-5(-2y+4x)+3(-3x-5y)$

Øvelse 3.2
Reducer følgende udtryk:

a) $2(x+3)-4x$

b) $6(7+a)-(3-a)$

c) $12(a-b)+6(5b-a)$

d) $27(c-3z)-(-4+c)$

e) $-2(c+h^2)+h(4-c)$

f) $\dfrac{12x+6y}{3}-7y$

g) $\dfrac{6x+xy}{x}+2(y+3)$

Øvelse 3.3
Nedenfor ses 6 forskellige omskrivninger. Der sker det samme i alle 6 tilfælde. Prøv at gennemskue hvordan der skrives om, og prøv at formulere en generel regel på baggrund af dine observationer.

a) $3x+3y=3(x+y)$

b) $6a+3b=3(2a+b)$

c) $7c+14=7(c+2)$

d) $14y+7=7(2y+1)$

e) $2x+4y^2+18z=2(x+2y^2+9z)$

f) $3ab+6ab^2+9a^2b=3ab(1+2b+3a)$

Øvelse 3.4
Sæt så meget som muligt uden for parentes.

a) $3x-x^2$

b) $12p^2-6pq$

c) $a^2b-3a+7ab^2$

d) $4xy-6x^2y+2xy^2$

Øvelse 3.5
Reducer udtrykkene så meget som muligt.

a) $4(2x+7y)-5(-2y+4x)+3(-3x-5y)$

b) $6(4a+7b-5)-3(8a+8b-2)+(a-2b+3)\cdot 9$

c) $\dfrac{a}{2}+\dfrac{5a}{8}+\dfrac{3a}{4}$.

d) $\dfrac{18x+2}{4y}-\dfrac{5x-1}{3y}$.

e) $\dfrac{14a^2b^3c}{21a^5bc^4}$

Øvelse 3.6
Reducer følgende udtryk så meget som muligt.

a) $4x-6y+2(x+3y)$

b) $x(x+2y)-(x+y)^2$

c) $\dfrac{12x^2y^4}{3xy}$

Øvelse 3.7
Reducer udtrykkene mest muligt.

a) $(2x-3)\cdot 5+9\cdot(y-x)+3\cdot(5-3y)$

b) $\dfrac{25x^2-5x}{10x^2}$

c) $4b\cdot\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\dfrac{5a}{b}$

Øvelse 3.8
Reducer brøkerne så meget som muligt.

a) $\dfrac{10a^2bc^3}{4a^4b^2c}$

b) $\dfrac{7x^2y^4z}{49x^3yz^2}$

Øvelse 3.9
Sæt på fælles brøkstreg og reducer mest muligt.

a) $\dfrac{11x}{18}+\dfrac{5x}{6}+\dfrac{2x}{9}$

b) $\dfrac{3p}{3q}+\dfrac{p}{8q}-3$

c) $\dfrac{a-(2b-9)}{a-2b}-\dfrac{a-(b-5)}{a-2b}+\dfrac{a+(b-4)}{a-2b}$

Øvelse 3.10
Udregn vha. kvadratet på en to-leddet størrelse

a) $(x+7)^2$

b) $(2x-3)^2$

c) $(3q+2)^2$

d) $(5p^2-3x)^2$

4 Ligninger

En ligning består af to regnestykker adskilt af et lighedstegn. Lighedstegnet skal forstås som en påstand om at de to regnestykker giver samme resultat.

I mindst ét af de to regnestykker indgår et ukendt tal (den ubekendte).[1] En *løsning* til ligningen er et tal som gør påstanden sand når det står på den ubekendtes plads.

[1] Der kan godt være flere ubekendte i en ligning; men i det simpleste tilfælde er der kun én.

Eksempel 4.1 Et eksempel på en ligning er

$$5x - 9 = 2x \ .$$

Ligningen består af de to regnestykker $5x - 9$ og $2x$. Påstanden er at disse to giver samme resultat.

$x = 3$ er en løsning til ligningen idet de to sider af ligningen giver

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3 - 9 &= 6 \quad \text{(venstre side, } 5x - 9\text{)}, \\ 2 \cdot 3 &= 6 \quad \text{(højre side, } 2x\text{)}, \end{aligned}$$

når man sætter 3 ind på x's plads. De to regnestykker giver altså samme resultat når $x = 3$.

$x = 7$ er derimod ikke en løsning fordi

$$\begin{aligned} 5 \cdot 7 - 9 &= 36 \ , \\ 2 \cdot 7 &= 14 \ . \end{aligned}$$

Her giver de to sider altså ikke samme resultat.

4.1 Ligningsløsning

At løse en ligning består i at finde frem til de tal som er løsninger til ligningen.[2] Dette findes der forskellige teknikker til.

[2] Man kan sagtens have ligninger som har mere end én løsning; ligesom man også kan have ligninger som slet ikke har løsninger.

De to sider af ligningen er to regnestykker som giver samme resultat hvis man indsætter en løsning på den ubekendtes plads.

F.eks. er

$$2 \cdot 4 + 3 = 11 \qquad \text{og} \qquad 5 \cdot 4 - 9 = 11 \ ,$$

hvilket vil sige at $x = 4$ er en løsning til ligningen[3]

[3] Begge sider giver 11, når man sætter 4 ind på x's plads.

$$2x + 3 = 5x - 9 \ . \tag{4.1}$$

Men ligningen

$$2x + 3 + 9 = 5x - 9 + 9$$

må have den samme løsning. Det er godt nok ikke de samme to regnestykker som før, så resultatet på hver side er ikke længere 11; men de to sider må stadig være ens da det er det samme tal der er blevet lagt til på begge sider. Når man sætter $x = 4$ får man

$$2 \cdot 4 + 3 + 9 = 20 \qquad \text{og} \qquad 5 \cdot 4 - 9 + 9 = 20 \; .$$

Hvis man lægger det samme tal til på begge sider af en ligning, får man altså en ny ligning; men det er én der har den samme løsning som den gamle.

Generelt gælder der følgende sætning.

Sætning 4.2

Hvis man udfører den samme regneoperation på begge sider af en ligning, får man en ny ligning med samme løsning.

Så ligningen (4.1) kan f.eks. løses ved at udføre følgende omformninger:

$$\begin{aligned}
2x + 3 &= 5x - 9 && \text{Ligning (4.1)} \\
2x + 3 + 9 &= 5x - 9 + 9 && \text{Der er lagt 9 til på begge sider.} \\
2x + 12 &= 5x && \text{Begge sider er reduceret} \\
2x + 12 - 2x &= 5x - 2x && \text{$2x$ er trukket fra på begge sider.} \\
12 &= 3x && \text{Begge sider er reduceret.} \\
\frac{12}{3} &= \frac{3x}{3} && \text{Der er delt med 3 på begge sider.} \\
4 &= x && \text{Begge sider er reduceret.}
\end{aligned}$$

Den sidste linje er i princippet også en ligning; men det er en ligning som det er nemt at finde løsningen til. Løsningen til ligningen $4 = x$ er nemlig $x = 4$ – og dette er så også løsningen til den oprindelige ligning.[4]

Man må udføre præcis den regneoperation man har lyst til; man skal blot huske at gøre det samme på begge sider.[5]

Når man udfører en regneoperation på begge sider af en ligning, er det vigtigt at huske at man skal udføre regneoperationen på *hele* siden, og ikke kun på en del af den. Et par eksempler følger:

Eksempel 4.3 Hvis ligningen $\frac{1}{2}x + 3 = 8$ skal ganges med 2 på begge sider, skal man huske at sætte en parentes:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}x + 3 &= 8 && \Leftrightarrow^{6} \\
2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}x + 3\right) &= 2 \cdot 8 && \Leftrightarrow \\
x + 6 &= 16 \; .
\end{aligned}$$

Regner man færdig, finder man løsningen $x = 10$.

[4] Hele pointen med omformningerne er altså at komme frem til en ligning der giver løsningerne direkte.

[5] Man må dog ikke gange med 0 idet ligningen så reduceres til $0 = 0$ hvilket altid er rigtigt – og dermed er muligheden for at finde løsninger til den oprindelige ligning forsvundet.

[6] Tegnet $\Leftrightarrow$ viser at de to påstande som står på hver side af pilen, betyder det samme; dvs. at det ene er sandt hvis det andet er sandt og omvendt.

Eksempel 4.4 Vil man løse ligningen $x^2 + 4 = 13$, kunne man fristes til at forsøge at tage kvadratroden først. Herved får man

$$x^2 + 4 = 13 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{13} \ .$$

Her kan man ikke reducere venstre side idet man skal lægge sammen inden man tager kvadratroden — og det kan man ikke fordi man jo ikke kender x.

I stedet er det god idé at trække 4 fra først, så man får:

$$x^2 + 4 = 13 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 = 9 \ .$$

Denne ligning kan nemmere løses. Den har de to løsninger $x = -3$ og $x = 3$.[7]

[7] Husk at $(-3)^2 = 9$ idet produktet af to negative tal er positivt. Derfor er $x = -3$ også en løsning til ligningen.

At gøre prøve

Hvis man får en løsning til en ligning serveret, eller man har løst en ligning og gerne vil checke om der nu også *er* tale om en løsning, kan man »gøre prøve«.

At gøre prøve består i al sin enkelhed i at indsætte den løsning man vil efterprøve, på hver side af ligningen og se om man får samme resultat.

Eksempel 4.5 Er $x = 2$ en løsning til $x^3 - 3 = 2 \cdot x + 1$?

Venstre side af ligningen giver

$$2^3 - 3 = 8 - 3 = 5 \ .$$

Højre side giver

$$2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5 \ .$$

Da de to sider giver samme resultat når $x = 2$, er det en løsning til ligningen.

Eksempel 4.6 Er $x = 3$ en løsning til ligningen $\frac{4x}{x+1} = 5$?

Venstre side giver

$$\frac{4 \cdot 3}{3 + 1} = \frac{12}{4} = 3 \ .$$

Da dette ikke er lig 5 som højre side gav, er $x = 3$ ikke en løsning.

Hvad så med $x = -5$? Her giver venstre side

$$\frac{4 \cdot (-5)}{-5 + 1} = \frac{-20}{-4} = 5 \ .$$

Dette er lig med højre side, så $x = 5$ er en løsning til ligningen.

4.2 Nulreglen

Hvis man ganger med 0 bliver resultatet altid 0. Men man kan omvendt ikke gange to tal som begge er forskellige fra 0, med hinanden og få 0 som resultat.

Er resultatet af et gangestykke 0, må mindst et af tallene der indgår i gangestykket, derfor være 0. Dette kan formuleres som en sætning.

Sætning 4.7: Nulreglen

Hvis et produkt giver 0, er mindst én af faktorerne 0:[8]

$$a \cdot b = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a = 0 \ \vee \ b = 0 \ .$$

[8]Tegnet $\vee$, som benyttes herunder, betyder »eller«.

Hvis den ene side af en ligning er 0, og den anden er produktet af to størrelser, kan man bruge nulreglen til at løse ligningen.

Eksempel 4.8 Hvad er løsningerne til ligningen $(x-3)\cdot(x+2) = 0$?

På højre side står der 0, og på venstre side produktet af de to størrelser $x-3$ og $x+2$. Ifølge nulreglen er mindst én af disse to størrelser 0, dvs.

$$x - 3 = 0 \quad \text{eller} \quad x + 2 = 0 \ ,$$

hvilket giver de to løsninger

$$x = 3 \quad \text{eller} \quad x = -2 \ .$$

Eksempel 4.9 Ligningen $(x+2)(x-4)(x+1) = 0$ løses på følgende måde:

$$\begin{aligned} (x+2)(x-4)(x+1) = 0 \qquad & \Leftrightarrow \\ x+2 = 0 \quad \vee \quad x-4 = 0 \quad \vee \quad x+1 = 0 \qquad & \Leftrightarrow \\ x = -2 \quad \vee \quad x = 4 \quad \vee \quad x = -1 \ . & \end{aligned}$$

Med lidt øvelse kan man hurtigt finde disse løsninger ud fra den oprindelige ligning.

Det er nogle gange muligt at bruge nulreglen hvis man kan skrive den ene side af ligningen om til et produkt.

Eksempel 4.10 Ligningen $x^2 - 5x = 0$ kan løses på følgende måde:

Først sættes x uden for en parentes

$$x \cdot (x-5) = 0 \ ,$$

og derefter bruger man nulreglen

$$x = 0 \quad \vee \quad x - 5 = 0 \ .$$

Ligningen har altså de to løsninger

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 5 \ .$$

4.3 To ligninger med to ubekendte

I de foregående to afsnit er der kun set på ligninger der indeholder én ubekendt. Et eksempel på en ligning, der indeholder flere ubekendte, kunne være

$$3x - y = 4 \ .$$

Her er der to ubekendte, x og y. Hvis man har én ligning med to ubekendte, er der i princippet uendeligt mange par (x, y) af løsninger til ligningen.

F.eks.

$$x = 5, y = 11 : \qquad 3 \cdot 5 - 11 = 4$$
$$x = 1, y = -1 : \qquad 3 \cdot 1 - (-1) = 4 .$$

Hvis man har *to* ligninger med to ubekendte, er der derimod ét talpar som løser begge ligninger.[9]

[9] Der er enkelte undtagelser, disse er beskrevet nedenfor.

Eksempel 4.11 De to ligninger

$$5x - y = 3 \quad \text{og} \quad 2x + 4y = 10$$

har løsningen $x = 1$ og $y = 2$, fordi

$$5 \cdot 1 - 2 = 3 \quad \text{og} \quad 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 10 .$$

Der findes ingen andre værdier af x og y der løser begge ligninger samtidig.

To ligninger med to ubekendte kaldes også et *ligningssystem*. Ligningssystemet i eksemplet ovenfor havde én løsning. Man kan godt komme ud for ligningssystemer som har flere løsninger.

Eksempel 4.12 De to ligninger

$$x + y = 2 \quad \text{og} \quad 3x + 3y = 6 ,$$

har ikke én løsning.

Det skyldes, at man kan komme fra den første ligning til den anden ved at gange med 3 på begge sider. De to ligninger har derfor præcis de samme løsninger, og et par (x, y), der opfylder første ligning, opfylder derfor også den anden.

I eksemplet sås et ligningssystem, som havde uendeligt mange løsninger. Man kan også have et ligningssystem hvor der ingen løsninger er.

At løse to ligninger med to ubekendte består i at finde frem til de(t) talpar der løser ligningssystemet. Her findes der to metoder.

Substitutionsmetoden

At løse to ligninger med to ubekendte vha. substitutionsmetoden består i det følgende: Man finder et udtryk for den ene ubekendte vha. den ene ligning som man derpå indsætter i den anden ligning. Herved opstår der en ligning med kun én ubekendt.

Eksempel 4.13 For at løse dette ligningssystem

$$2x + y = 7 \quad \text{og} \quad 5x - 3y = 12$$

kan man isolere y i den første ligning. Det giver

$$2x + y = 7 \quad \Leftrightarrow \quad y = 7 - 2x . \tag{4.2}$$

Dette udtryk indsætter man i den anden ligning

$$5x - 3y = 12 \quad \Rightarrow \quad 5x - 3\big(7 - 2x\big) = 12\ .$$

Den ligning kan man nu løse:

$$\begin{aligned} 5x - 3(7 - 2x) &= 12 \\ 5x - 21 + 6x &= 12 \\ 11x - 21 &= 12 \\ 11x &= 12 + 21 \\ 11x &= 33 \\ x &= 3\ . \end{aligned}$$

Fra (4.2) har man at $y = 7 - 2x$, dvs.

$$y = 7 - 2 \cdot 3 = 1\ .$$

Løsningen til ligningssystemet er altså $x = 3$ og $y = 1$.

Eksempel 4.14 Ligningssystemet[10]

[10] Tegnet $\wedge$ som bruges nedenfor, betyder »og«. Dette skal forstås som »både og«, dvs. de to ligninger på hver side af $\wedge$ skal gælde på samme tid.

$$x + y = 5 \quad \wedge \quad y^2 = 9\ ,$$

kan løses ved først at løse den sidste ligning:

$$y^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad y = -3 \vee y = 3\ .$$

Til hver af disse værdier af y hører en værdi af x.

Den første ligning i ligningssystemet kan omskrives til $x = 5 - y$ hvilket giver disse to x-værdier:

$$\begin{aligned} y = -3 \quad &\Rightarrow \quad x = 5 - (-3) = 8 \\ y = 3 \quad &\Rightarrow \quad x = 5 - 3 = 2\ . \end{aligned}$$

Ligningssystemet har altså løsningerne

$$\big(x = 2 \ \wedge\ y = 3\big) \quad \vee \quad \big(x = 8 \ \wedge\ y = -3\big)\ .$$

Lige store koefficienters metode

En anden metode til at løse to ligninger med to ubekendte er »lige store koefficienters metode«. Denne metode virker kun hvis de to ligninger kan skrives på formen

$$ax + by = c\ ,$$

hvor a, b og c er tre tal.[11]

[11] Tallene a og b kaldes *koefficienter* til x og y – deraf navnet på metoden.

Ideen i metoden er at omskrive ligningssystemet sådan at enten x eller y har samme koefficient i de to ligninger. Herefter kan man trække ligningerne fra hinanden og få en ny ligning hvori kun den ene ubekendte optræder.

Metoden illustreres bedst med et eksempel.

Eksempel 4.15 Her ses på ligningssystemet

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ -2x + 5y = 21 \end{cases} .$$

For at finde en løsning ganger man først den øverste ligning med 5 på begge sider. Så får man

$$\begin{cases} 15x + 5y = 55 \\ -2x + 5y = 21 \end{cases} .$$

Trækker man disse to ligninger fra hinanden,[12] fås den nye ligning

$$(15x + 5y) - (-2x + 5y) = 55 - 21$$

som kan reduceres til

$$17x = 34 .$$

Løsningen til denne ligning er $x = 2$.

Når man kender x, kan dette indsættes i én af ligningerne fra det oprindelige ligningssystem, her vælges $3x + y = 11$:

$$3 \cdot 2 + y = 11 \quad \Leftrightarrow \quad y = 5 .$$

Løsningen til ligningssystemet er derfor $x = 2$ og $y = 5$.

I ovenstående eksempel var det nok at omskrive den ene ligning. Nogle gange er det nødvendigt at omskrive begge.

Eksempel 4.16 Ligningssystemet

$$\begin{cases} 5x - 4y = 22 \\ -2x + 8y = 4 \end{cases}$$

omskrives ved at forlænge den øverste ligning med 2 og den nederste med 5: [13]

$$\begin{cases} 10x - 8y = 44 \\ -10x + 40y = 20 \end{cases} .$$

Her har koefficienterne til x modsat fortegn, så derfor lægger man ligningerne sammen i stedet for at trække fra:

$$(10x - 8y) + (-10x + 40y) = 44 + 20 .$$

Ligningen reduceres og løses:

$$32y = 64 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2 .$$

Dette indsættes i den første af de oprindelige ligninger, $5x - 4y = 22$:

$$5x - 4 \cdot 2 = 22 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 30 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 .$$

Løsningen til ligningssystemet er altså $x = 6$ og $y = 2$.

[12] Grunden til at man må trække to ligninger fra hinanden, er at højre og venstre side af en ligning er samme tal. Man trækker derfor det samme tal fra på begge sider.

[13] Bemærk, at man forlænger hver ligning med koefficienten til x fra den anden ligning.

4.4 Øvelser

Øvelse 4.1
Løs ligningerne

a) $7x - 3 = 9 + x.$
b) $4 \cdot (2x - 3) = 12.$
c) $4x - 3 = 8x - 19.$
d) $-x + 12 = \frac{x}{3}.$
e) $\frac{x-1}{4} = x + 5.$
f) $2(3x + 4) = 4x - 2.$

Øvelse 4.2
Løs ligningerne

a) $(3x + 18) - 7 = (5x + 1) - 4$
b) $6x - (x + 5) = 3x + (x - 8)$
c) $3(t - 4) = 2t + 6$
d) $8(x - 8) = 2x + 8$
e) $3 + (2s - 5) = 6$
f) $3(q + 3) = 2(4 + q)$
g) $5 - (8x - 7) + 18x = 31x - (90 + 28x) - 45$

Øvelse 4.3
Løs ligningerne

a) $\frac{20}{x} = 5$
b) $\frac{10}{x} + 3 = 8$
c) $\frac{8}{x} - 7 = 17$
d) $\frac{20}{x+1} = 5$
e) $\frac{9}{x-1} = 3$
f) $\frac{16}{x+5} - 3 = 1$

Øvelse 4.4
Løs ligningerne

a) $\frac{x}{3} + 4 = 7$
b) $7 - \frac{y}{2} = 8$
c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$
d) $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 14$
e) $\frac{2y}{3} - \frac{y}{4} = 15$
f) $\frac{3y}{5} - \frac{y}{10} = 15$

Øvelse 4.5
Isoler q i formlen $a = 3q - qa + 5$. For hvilken værdi af a kan det ikke lade sig gøre?

Øvelse 4.6
Løs ligningerne

a) $x^3 = 27$
b) $x^2 = 64$
c) $x^5 = 1{,}61051$
d) $x^7 = -1$
e) $x^4 = 67$
f) $x^3 = -13$

Øvelse 4.7
Løs ligningerne

a) $x^5 - 3 = 29$
b) $x^2 + 4 = 20$
c) $5x^3 = 320$
d) $0{,}1x^4 = 240{,}1$
e) $2x^3 - 5 = 11$
f) $6x^2 + 4 = 76$

Øvelse 4.8
Løs følgende ligninger:

a) $x(x + 2) = 0$
b) $(x + 3)(x - 1) = 0$
c) $2(x + 7)x = 0$
d) $(2x - 4)(3x + 12) = 0$
e) $(x + 6)(x - 1)(3x + 6)x = 0$
f) $x^2 - 6x = 0$

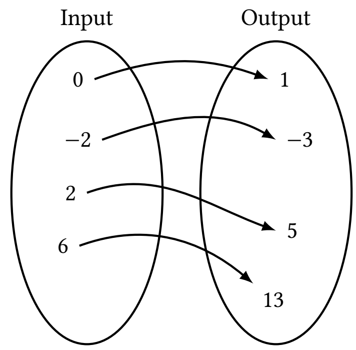
Øvelse 4.9
Løs hvert af følgende ligningssystemer:

a) $\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + y &= 10 \end{aligned}$
b) $\begin{aligned} x + 5y &= 5 \\ y &= 2 \end{aligned}$
c) $\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ 2x - 4y &= -2 \end{aligned}$
d) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ -3x + 2y &= -1 \end{aligned}$
e) $\begin{aligned} 3x + 4y &= 7 \\ 2x - 4y &= -2 \end{aligned}$
f) $\begin{aligned} 2a + 4b &= -2 \\ 7a - 3b &= 44 \end{aligned}$

Øvelse 4.10
Hvilket tal giver det samme resultat ved at lægges til 7, som ved at ganges med 7?

5 Funktioner

En *funktion* i matematik er en form for regneoperation. Man kan beskrive en funktion som en slags maskine der til ethvert input giver et bestemt output – dvs. en funktion er en sammenhæng mellem tal.



Figur 5.1: Funktionen »gang tallet med 2 og læg 1 til«.

På figur 5.1 er det vist hvordan funktionen »gang tallet med 2 og læg 1 til« opfører sig. Man kan se hvilket output man får for 4 forskellige tal.

Fordi det er besværligt at beskrive funktioner på denne måde, har man fundet på en matematisk notation der gør det nemmere. Funktionen selv betegnes med et bogstav, f.eks. f. I stedet for »gang tallet med 2 og læg 1 til« kan man altså skrive f. Bogstavet f indeholder i sig selv ingen information om hvad funktionen f gør. Hvis man vil forklare det, kan man skrive en såkaldt *forskrift* op:

$$f(x) = 2 \cdot x + 1 \ .$$

Denne notation betyder, at hvis man sender et tal, x, gennem funktionen f, skal man gøre det ved tallet som er beskrevet på højre side. $f(x)$ læses »f af x«, og parentesen skal altså ikke forstås som en regneparentes, men en angivelse af at det er tallet x som sendes gennem funktionen f. Det tal man får ud af regneoperationen kaldes funktions*værdien*.

Eksempel 5.1 Her ses på funktionen $f(x) = 3 \cdot x - 7$.

Funktionsværdierne $f(-1)$ og $f(4)$ beregnes således:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 3 \cdot (-1) - 7 = -3 - 7 = -10 \\ f(4) &= 3 \cdot 4 - 7 = 12 - 7 = 5 \ . \end{aligned}$$

Det er her vigtigt at bemærke at x'et i funktionsudtrykket $f(x)$ egentlig bare er en »pladsholder«, dvs. det viser hvor man skal erstatte med tal når man beregner en funktionsværdi. Faktisk kan man ikke kun sætte tal ind på x'ets plads, man kan også sætte andre variable ind – eller hele regneudtryk.

Eksempel 5.2 Her ses igen på funktionen $f(x) = 3 \cdot x - 7$. Men nu beregnes $f(t)$ og $f(x-1)$, dvs. man skal sætte hhv. t og $x-1$ ind i stedet for x:

$$\begin{aligned} f(t) &= 3 \cdot t - 7 \\ f(x-1) &= 3 \cdot (x-1) - 7 = 3 \cdot x - 3 \cdot 1 - 7 = 3 \cdot x - 10 \ . \end{aligned}$$

Hvis man sender et variabeludtryk gennem en funktion, får man altså et variabeludtryk ud igen.

Hvis man omvendt kender funktionsværdien, kan man finde ud af hvilken værdi af den uafhængige variabel der giver denne funktionsværdi. Dette kan man gøre ved at løse en ligning som i følgende eksempel.

Eksempel 5.3 Hvornår antager funktionen $g(x) = 2x + 1$ værdien 17?

Svaret på dette spørgsmål finder man frem til ved at løse ligningen $g(x) = 17$. Det gøres på følgende måde:

$$\begin{aligned} g(x) &= 17 \quad &\Leftrightarrow \\ 2x + 1 &= 17 \quad &\Leftrightarrow \\ 2x &= 16 \quad &\Leftrightarrow \\ x &= 8 \ . \end{aligned}$$

Svaret på spørgsmålet er altså, at $g(x) = 17$ når $x = 8$.

5.1 Variable og grafer

En funktion er altså en regneoperation der tager et input x og giver et output $f(x)$. Fordi tallet x kan variere, kalder man dette tal for en *variabel.* Da det kan variere frit kaldes det også en *uafhængig variabel.* Output fra funktionen, dvs. $f(x)$, er også en variabel, men da denne variabels værdi afhænger af det valgte input, kalder man den for en *afhængig variabel* (idet dens værdi afhænger af den valgte værdi af x).

En funktion viser altså på sin vis sammenhængen mellem en uafhængig og en afhængig variabel. En sådan sammenhæng kan illustreres på flere forskellige måder, nemlig vha.

- en tabel hvor sammenhørende værdier af to (eller flere) variable vises side om side,
- en model, dvs. en funktionsforskrift der beskriver sammenhængen, eller
- en graf som kan vise hvordan værdien af en variabel afhænger af en anden.

Eksempel 5.4 Tabel 5.2 viser nogle værdier af den uafhængige variabel, og de tilhørende funktionsværdier for funktionen h.

Tabel 5.2: En tabel over funktionen h.

x	$h(x)$
-3	14
-1	6
2	-6
5	-18

Det er klart at en sådan tabel ikke kan give al information omkring funktionen h, for hvad er f.eks. $h(1)$ eller $h(7)$? En funktionsforskrift vil give mere information. Det er dog ikke sikkert at en sådan altid kan findes.

I dette tilfælde er det dog muligt at finde en funktionsforskrift der passer på tabellen, nemlig

$$h(x) = -4 \cdot x + 2 \ .$$

Når man har denne kan man nemt beregne f.eks.

$$h(1) = -4 \cdot 1 + 2 = -2 \quad \text{og} \quad h(7) = -4 \cdot 7 + 2 = -26 \ .$$

På denne måde kan man udvide tabellen med alle de værdier man vil.

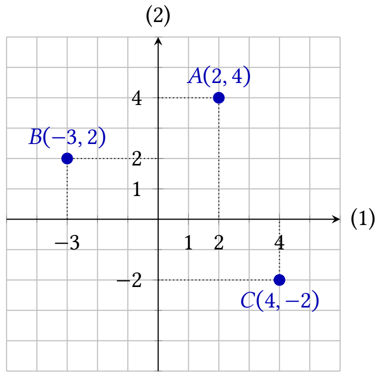
Hvis man har en funktion kan sammenhængen altså illustreres med en forskrift eller en tabel, men man kan også tegne en graf.

Koordinatsystemer

Et koordinatsystem kan forstås som en slags net der lægges ud over planen, og som man bruger til at beskrive hvor punkter befinder sig.

Man starter med at tegne to akser, første- og andenaksen (ofte kaldet x- og y-aksen), der står vinkelret på hinanden. De to akser er tallinjer der skærer hinanden i deres nulpunkter, jf. figur 5.3. Skæringspunktet mellem de to akser kaldes *origo*.

Et punkt i et koordinatsystem befinder sig altid lodret ud for et tal på førsteaksen og vandret ud for et tal på andenaksen. Disse to værdier kaldes punktets *første*- og *andenkoordinat*. Et punkt består altså af et såkaldt koordinat*sæt* (x, y), der fortæller, hvor punktet befinder sig i koordinatsystemet (se figur 5.3). Origo har f.eks. koordinaterne $(0, 0)$.



Figur 5.3: De tre punkter $A(2, 4)$, $B(-3, 2)$ og $C(4, -2)$ indtegnet i et koordinatsystem.

Fra forskrifter til grafer

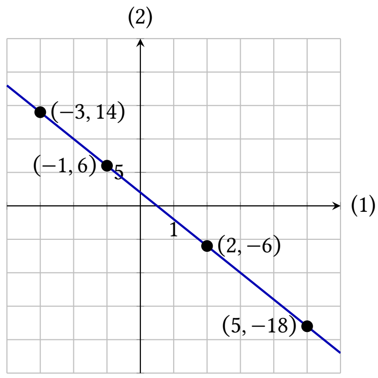
En tabel kan indtegnes i et koordinatsystem som en række punkter ved at lade førstekoordinaten svare til den uafhængige variabel og andenkoordinaten svare til den tilhørende værdi af den afhængige variabel.

Eksempel 5.5 Tabellen over funktionen h fra eksempel 5.4 viser sammenhængen mellem elforbrug og pris. Tallene fra tabel 5.2 kan omskrives til en række punkter:

$$(-3, 14)\ ,\quad (-1, 6)\ ,\quad (2, -6) \quad \text{og} \quad (5, -18)$$

hvor førstekoordinaten x, og andenkoordinaten er $h(x)$. Disse punkter kan derefter indsættes i et koordinatsystem, se figur 5.4.

Punkterne skal herefter forbindes med en blød kurve. I dette tilfælde kan man dog se at punkterne ligger på en ret linje, så grafen bliver den rette linje der går gennem de fire punkter.



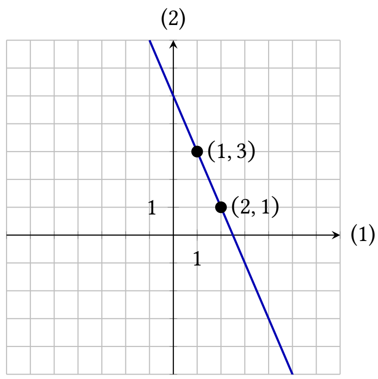
Figur 5.4: Data fra tabel 5.2 indsat i et koordinatsystem. Grafen er herefter tegnet ud fra punkterne.

Når man tegner grafen for en funktion, udregner man i princippet alle punkter (x, y) på grafen ved at beregne $y = f(x)$ for alle x-værdierne, og derefter afsætter man disse punkter i et koordinatsystem. I praksis vil man dog nøjes med at beregne nogle af punkterne og forbinde disse med en blød kurve, som i eksemplet ovenfor. Hvis man ved at grafen er en ret linje, behøver man dog kun to punkter for at kunne tegne grafen.

Eksempel 5.6 Grafen for funktionen $f(x) = -2 \cdot x + 5$ er en ret linje. Hvis man vil tegne denne graf skal man derfor bruge to punkter på grafen. Man kan beregne

$$f(1) = -2 \cdot 1 + 5 = 3$$
$$f(2) = -2 \cdot 2 + 5 = -1\ .$$

Ud fra disse to beregninger kan man se at punkterne $(1, 3)$ og $(2, 1)$ ligger på grafen. Man kan så tegne grafen vha. disse to punkter, se figur 5.5.



Figur 5.5: Grafen for $y = -2 \cdot x + 5$.

Vil man have et overblik over hvordan en funktion opfører sig, kan det altså være nyttigt at tegne dens graf.

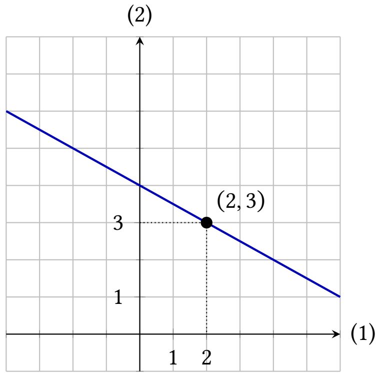
Eksempel 5.7 Her ses på en funktion

$$f(x) = -\tfrac{1}{2} \cdot x + 4 \,.$$

Grafen for funktionen kan tegnes ved at beregne y-værdierne

$$y = -\tfrac{1}{2} \cdot x + 4 \,,$$

og den kan ses på figur 5.6.



Figur 5.6: Grafen for $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 4$.

Som det kan ses på figuren går funktionens graf igennem punktet $(2, 3)$, dvs.

$$f(2) = 3 \,.$$

Dette kunne man også have regnet ud ved at indsætte 2 i funktionen f:

$$f(2) = -\tfrac{1}{2} \cdot 2 + 4 = -1 + 4 = 3 \,.$$

Men det kan altså også aflæses direkte på grafen.

5.2 Øvelser

Øvelse 5.1
»Oversæt« følgende regneopskrifter til en funktionsforskrift.

a) Læg fire til tallet.
b) Gang tallet med to, og læg fem til.
c) Gang tallet med en tredjedel og træk én fra.
d) Gang tallet med -7 og læg 9 til.

Øvelse 5.2
En funktion f er givet ved

$$f(x) = 3 \cdot x - 2 \,.$$

Beregn følgende funktionsværdier

a) $f(0)$ b) $f(4)$ c) $f(-1)$
d) $f(\frac{1}{3})$ e) $f(t)$ f) $f(u+4)$

Øvelse 5.3
En funktion g er givet ved

$$g(x) = -x + 6 \,.$$

Løs følgende ligninger

a) $g(x) = 5$ b) $g(x) = 0$
c) $g(x) = -7$ d) $g(x) = \frac{2}{3}$

Øvelse 5.4
En sammenhæng mellem x og y er givet ved tabellen

x:	-2	-1	0	1	3	6
y:	11	9	7	5	1	-5

a) Afsæt tabellens data som punkter i et koordinatsystem.
b) Tegn den graf der ser ud til bedst at passe på punkterne.
c) Brug grafen til at bestemme $f(4)$.
d) Brug grafen til at løse $f(x) = 15$.

Øvelse 5.5
En lineær sammenhæng mellem x og y er givet ved ligningen

$$y = 2 \cdot x - 3 \,.$$

a) Bestem på baggrund af ligningen to punkter der ligger på grafen.
b) Afsæt de to punkter i et koordinatsystem og tegn grafen.

Lineære funktioner 6

De funktioner der blev omtalt i det foregående kapitel, er alle såkaldt *lineære* funktioner. Graferne for denne type funktioner er altid rette linjer. Den følgende definition angiver hvad der skal gælde for at en funktion kaldes lineær.

Definition 6.1

En *lineær* funktion er en funktion af typen

$$f(x) = a \cdot x + b \ ,$$

hvor a og b er to konstanter.[1]

[1]En *konstant* er en størrelse hvis værdi ikke ændrer sig, dvs. der er tale om et fast tal.

Grafen for en lineær funktion er en ret linje. Der er en direkte sammenhæng mellem de to tal a og b og linjens udseende.

6.1 Hældning og skæring med akserne

Det er muligt at aflæse værdierne af tallene a og b ved at se på funktionens graf. Der gælder nemlig følgende sætning.

Sætning 6.2

For den lineære funktion $f(x) = a \cdot x + b$ gælder:

1. Hvis x vokser med 1, vil funktionsværdien vokse med a.
2. Funktionens graf skærer andenaksen i b.

Bevis
Når x vokser med 1, vokser funktionsværdien fra $f(x)$ til $f(x+1)$. Funktionsværdiens tilvækst bliver så

$$f(x+1) - f(x) = (a \cdot (x+1) + b) - (a \cdot x + b) = a \cdot x + a + b - a \cdot x - b = a \ .$$

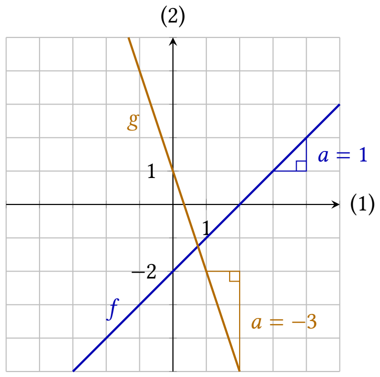
På andenaksen er $x = 0$, dvs. grafens skæring med andenaksen er

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b \ . \qquad \blacksquare$$

For grafen for en lineær funktion f gælder altså at $f(x)$ vokser med et fast tal (a) hver gang x vokser med 1. Dette er årsagen til at denne type funktion har en graf som er en ret linje. Jo større a er, jo hurtigere vokser $f(x)$, og linjen bliver så mere stejl. Tallet a kalder man derfor for funktionens *hældning* eller *hældningskoefficient*.[2]

[2]En *koefficient* er en konstant, som er ganget på en variabel.

Hvis a er et negativt tal, aftager $f(x)$ når x vokser, og linjen vil derfor hælde den anden vej; dvs. der er tale om en aftagende graf.



Figur 6.1: Aflæsning af tallene a og b.

Sætning 6.3

For den lineære funktion $f(x) = a \cdot x + b$ fortæller *hældningskoefficienten a* følgende:

1. Hvis $a > 0$ er linjen voksende.
2. Hvis $a < 0$ er linjen aftagende.

Eksempel 6.4 På figur 6.1 ses graferne for to lineære funktioner f og g.

Grafen for f skærer andenaksen i -2, og når man går 1 til højre, skal man gå 1 op for at finde grafen igen, dvs. hældningskoefficienten er $a = 1$.

Funktionen f har derfor forskriften $f(x) = 1 \cdot x + (-2)$, hvilket reduceres til

$$f(x) = x - 2 \ .$$

Grafen for g skærer andenaksen i 1, og går man 1 ud langs førsteaksen, skal man gå 3 ned ad andenaksen, dvs. hældningen er -3. Funktionens forskrift er derfor

$$g(x) = -3 \cdot x + 1 \ .$$

I det specielle tilfælde hvor hældningskoefficienten for en lineær funktion er 0, er funktionen konstant; dvs. grafen er parallel med førsteaksen. En sådan graf har af gode grunde ingen skæringspunkter med førsteaksen.[3]

[3]Med mindre linjen falder sammen med førsteaksen, for så har den uendeligt mange punkter fælles med denne.

En lineær funktion med en hældningskoefficient der ikke er 0, skærer til gengæld førsteaksen. Dette skæringspunkt kan man regne sig frem til ud fra forskriften ved at sætte funktionsværdien lig med 0. Man kan dog også udlede en formel for skæringen med førsteaksen.

Sætning 6.5

Grafen for den lineære funktion $f(x) = a \cdot x + b$ skærer førsteaksen i punktet $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Bevis

På førsteaksen er andenkoordinaten 0.[4] Grafen for f skærer derfor førsteaksen, hvor

[4]Husk at alle punkter på førsteaksen har formen $(x, 0)$, og alle punkter på andenaksen har formen $(0, y)$.

$$f(x) = 0 \ ,$$

dvs.

$$a \cdot x + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot x = -b \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a} \ .$$

Grafen skærer altså førsteaksen i punktet $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$. ∎

Eksempel 6.6 Den lineære funktion $h(x) = 4 \cdot x - 12$ skærer andenaksen i $b = -12$ og har hældningen $a = 4$. Den skærer derfor førsteaksen i

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{-12}{4} = 3 \ .$$

Grafen for den lineære funktion h skærer altså førsteaksen i punktet $(3, 0)$ og andenaksen i punktet $(0, -12)$.

6.2 Beregning af hældningskoefficienten

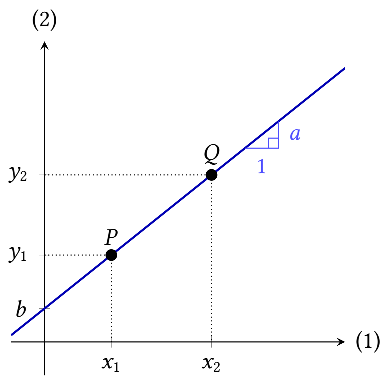
Hvis man kender to punkter på en ret linje, er linjen entydigt bestemt.[5] Da grafen for en lineær funktion er en ret linje vil der være derfor være en sammenhæng mellem koordinatsættene til to punkter på linjen og de to tal a og b. Det viser sig, at man kan finde en simpel formel for tallet a.

[5]Der går nemlig kun én bestemt ret linje gennem to givne punkter.

Sætning 6.7: To-punkts-formlen

Hvis grafen for den lineære funktion $f(x) = a \cdot x + b$ går gennem de to punkter $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$, er

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ .$$



Figur 6.2: De to punkter P og Q på grafen for $f(x) = a \cdot x + b$.

Bevis
På figur 6.2 ses grafen for $f(x) = a \cdot x + b$ og de to punkter $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$.

Da punkterne P og Q ligger på grafen, gælder de to ligninger

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{og} \quad f(x_2) = y_2$$

som også kan skrives som

$$\begin{aligned} y_2 &= a \cdot x_2 + b \ , \\ y_1 &= a \cdot x_1 + b \ . \end{aligned}$$

Trækker man den nederste ligning fra den øverste, får man

$$y_2 - y_1 = (a \cdot x_2 + b) - (a \cdot x_1 + b) \ ,$$

som kan reduceres til

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 - a \cdot x_1 \ .$$

Nu sættes a uden for parentes, og man får

$$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a \ ,$$

og formlen er så bevist. ■

Eksempel 6.8 Grafen for en lineær funktion f går gennem punkterne $P(3, 5)$ og $Q(6, -7)$. Hvad er funktionens forskrift?

For at svare på dette spørgsmål ser man på de to punkter. Heraf fremgår det at

$$x_1 = 3 , \quad y_1 = 5 , \quad x_2 = 6 \quad \text{og} \quad y_2 = -7 .$$

Nu kan man bruge formlerne i sætning 6.7, og man får

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7 - 5}{6 - 3} = \frac{-12}{3} = -4 .$$

Den rette linje har altså ligningen $y = -4 \cdot x + b$, hvor b endnu er ukendt.

Tallet b kan man finde ved at sætte koordinaterne til ét af de kendte punkter ind i forskriften. Idet grafen går gennem $P(3, 5)$, ved man at $f(3) = 5$ hvilket giver

$$-4 \cdot 3 + b = 5 \quad \Leftrightarrow \quad b = 5 + 4 \cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad b = 17 .$$

Funktionen har derfor forskriften $f(x) = -4 \cdot x + 17$.

Man kan også udlede følgende sætning der giver forskriften direkte når man kender hældningskoefficienten:

Sætning 6.9

Hvis en lineær funktion f har hældningskoefficienten a, og dens graf går gennem punktet (x_1, y_1) så er funktionens forskrift

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) + y_1 .$$

Bevis
Funktionen f er lineær, så den har forskriften $f(x) = a \cdot x + b$. Hvis punktet (x_1, y_1) ligger på grafen, må $f(x_1) = y_1$, dvs.

$$y_1 = a \cdot x_1 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = y_1 - a \cdot x_1 .$$

Dette udtryk for b indsættes i forskriften:

$$f(x) = a \cdot x + (y_1 - a \cdot x_1) .$$

Omformer denne forskrift, får man

$$f(x) = a \cdot x + y_1 - a \cdot x_1 = a \cdot x - a \cdot x_1 + y_1 = a \cdot (x - x_1) + y_1 ,$$

hvorved sætningen er bevist. ■

Eksempel 6.10 Hvis grafen for en lineær funktion f går gennem punkterne $P(3, 5)$ og $Q(6, -7)$, er hældningskoefficienten $a = -4$ (se eksempel 6.8).

Forskriften for funktionen kan så findes ved at indsætte én af de to punkter i forskriften fra sætning 6.9. Her vælges punktet $Q(6, -7)$:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) + y_1 = -4 \cdot (x - 6) - 7 = -4 \cdot x + 24 - 7 = -4 \cdot x + 17 .$$

Man finder altså den samme forskrift som i eksempel 6.8.

Eksempel 6.11 Om den lineære funktion f gælder at

$$f(2) = 6 \quad \text{og} \quad f(5) = 18 \ .$$

Hvad er funktionens forskrift?

Her skal man først gennemskue at når $f(2) = 6$, betyder det at grafen går gennem punktet $(2, 6)$. Den anden oplysning fortæller at grafen også går gennem punktet $(5, 18)$. Man kender altså to punkter på funktionens graf, og dette er tilstrækkeligt til at bestemme ligningen for grafen som jo er en ret linje.

For at bestemme linjens hældningskoefficient kan man anvende to-punkts-formlen (sætning 6.7):

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{18 - 6}{5 - 2} = \frac{12}{3} = 4 \ .$$

Man kan herefter bruge formlen i sætning 6.9 hvorved man finder funktionens forskrift

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) + y_1 = 4 \cdot (x - 2) + 6 = 4 \cdot x - 8 + 6 = 4 \cdot x - 2 \ .$$

Dvs. funktionen har forskriften

$$f(x) = 4 \cdot x - 2 \ .$$

6.3 Skæringspunkter

Hvis to linjer ikke er parallelle, vil de have et skæringspunkt. Man kan finde skæringspunktet mellem graferne for to lineære funktioner ved at sætte funktionernes forskrifter lig hinanden. Dette skyldes at linjerne skærer hinanden i et punkt der ligger på begge linjer, dvs. et punkt der skal passe ind i begge forskrifterne samtidig.

Fremgangsmåden illustreres nemmest ved et eksempel.

Eksempel 6.12 Graferne for de to lineære funktioner

$$f(x) = x - 5 \qquad \text{og} \qquad g(x) = -2x + 1$$

skærer hinanden (se figur 6.3).

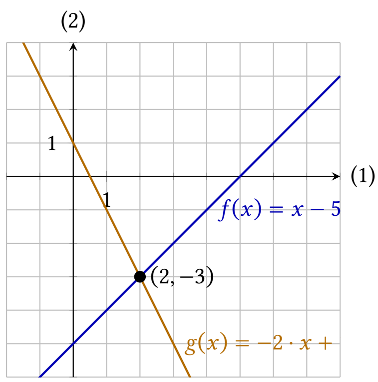
Koordinaterne til skæringspunktet bestemmer man ved at sætte $f(x) = g(x)$. Herved får man

$$\begin{aligned} x - 5 &= -2x + 1 && \Leftrightarrow \\ 3x &= 6 && \Leftrightarrow \\ x &= 2 \ . \end{aligned}$$

Nu er førstekoordinaten x bestemt. For at finde punktet skal man også kende andenkoordinaten y. Den bestemmer man ved at sætte den fundne førstekoordinat ind i én af linjernes ligninger:

$$y = f(2) = 2 - 5 = -3 \ .$$

De to linjer skærer altså hinanden i $(2, -3)$, som det også fremgår af figur 6.3.



Figur 6.3: Skæringspunktet mellem graferne for $f(x) = x - 5$ og $g(x) = -2 \cdot x + 1$.

6.4 Lineær vækst

Lineære funktioner vokser på følgende måde[6]

[6] Denne sætning kan man også argumentere for ud fra sætning 6.2.

> **Sætning 6.13**
>
> For en lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$ gælder, at når x vokser med h, så vokser funktionsværdien med $a \cdot h$.

Bevis
Hvis x vokser fra x_1 til x_2, hvor $x_2 = x_1 + h$, så vil funktionsværdien vokse fra

$$y_1 = f(x_1) = a \cdot x_1 + b$$

til

$$y_2 = f(x_2) = f(x_1 + h) = a \cdot (x_1 + h) + b = a \cdot x_1 + a \cdot h + b \ .$$

Funktionsværdien er så vokset med

$$y_2 - y_1 = (a \cdot x_1 + a \cdot h + b) - (a \cdot x_1 + b) = a \cdot h \ .$$

Hermed er sætningen bevist. ■

Eksempel 6.14 I tabel 6.4 ses et eksempel på væksten af en lineær funktion.

Tabel 6.4: Vækst af $f(x) = 3 \cdot x + 7$.

	x	y	
	-2	1	
$+2$			$+3 \cdot 2$
	0	7	
$+2$			$+3 \cdot 2$
	2	13	
$+2$			$+3 \cdot 2$
	4	19	

Funktionen $f(x) = 3 \cdot x + 7$ vokser således, at hver gang x vokser med 2, vokser funktionsværdien med $3 \cdot 2$.

Eksempel 6.15 Her ses på funktionen $f(x) = 3 \cdot x - 4$, som har hældningskoefficienten $a = 3$. Hvis x vokser med $h = 5$, vil funktionsværdien vokse med

$$a \cdot h = 3 \cdot 5 = 15 \ .$$

Hver gang, x vokser med 5, vokser funktionsværdien altså med 15.

Omvendt kan man spørge, hvor meget x skal vokse, for at funktionsværdien vokser med 60? I dette tilfælde er $a \cdot h = 60$, dvs.

$$3 \cdot h = 60 \qquad \Leftrightarrow \qquad h = 20 \ .$$

x skal altså vokse med 20, for at funktionsværdien vokser med 60.

Eksempel 6.16 For funktionen $f(x) = -2 \cdot x + 7$ gælder, at når x vokser med $h = 3$, vokser funktionsværdien med

$$a \cdot h = -2 \cdot 3 = -6 \ .$$

At funktionsværdien vokser med -6, betyder at funktionsværdien *aftager* med 6 hver gang x vokser med 3.[7]

[7] En negativ stigning svarer altid til et fald. I mange matematiske modeller, hvor man regner på vækst, kan det betale sig at regne med fortegn hele vejen igennem og først til sidst angive, om der er tale om stigning eller fald, afhængig af om resultatet er positivt eller negativt.

6.5 Lineære modeller

Hvis to virkelige størrelser afhænger af hinanden, kan denne sammenhæng beskrives vha. en funktion. Funktionen der beskriver sammenhængen, kaldes så en *matematisk model*. Er funktionen lineær, er der tale om en lineær model. Her følger nogle eksempler på lineære modeller.

Eksempel 6.17 Hvis man får »NaturEl« fra Energi Fyn, betaler man 150 kr. om året i abonnement og 0,4993 kr. pr. kWh, der bliver brugt.[1]

Man kan også opstille en matematisk model for denne sammenhæng, nemlig

$$p(x) = 0{,}4993 \cdot x + 150 \ ,$$

hvor $p(x)$ er den pris, man skal betale om året, og x er det forbrugte antal kWh.

Eksempel 6.18 Sammenhængen mellem temperaturen når man måler den i °C (grader celsius), og når man måler den i °F (grader fahrenheit), kan ses i 6.5.[4]

Tabel 6.5: Sammenhængen mellem temperaturen målt i °C og temperaturen i °F.

x (°C)	y (°F)
0	32
10	50
20	68
30	86
40	104

En matematisk analyse af disse data viser, at sammenhængen kan beskrives ved modellen

$$y = 1{,}8 \cdot x + 32 \ ,$$

hvor x er temperaturen målt i °C, og y er temperaturen målt i °F.

Bemærk i øvrigt, at i modellen fra eksempel 6.17 er elforbruget den uafhængige variabel, mens prisen er den afhængige. Det skyldes at prisen man betaler afhænger af hvor meget el man forbruger – det er ikke sådan at man starter med at betale en pris og så får man et antal kWh der passer til.

I eksempel 6.18 kan man omvendt sagtens skrive sammenhængen om, så det er temperaturen i °C der er den afhængige variabel. I eksemplet er det i stedet temperaturen i °F der er den afhængige variabel, dvs. formlen kan bruges til at regne °C om til °F; men der er intet til hinder for at man skriver sammenhængen om, så man kan bruge den til at regne den modsatte vej.

Her følger flere eksempler på hvordan en matematisk beskrivelse af lineær vækst kan give svar på forskellige spørgsmål.

Eksempel 6.19 I en bestemt by er antallet af indbyggere givet ved

$$N(x) = 213x + 14\,752 \ ,$$

hvor $N(x)$ er antallet af indbyggere x år efter år 2000.

I forskriften er der to konstanter,[8] 213 og 14 752. Funktionen $N(x)$ er en lineær funktion, dvs. tallet 213 kan betragtes som en hældningskoefficient: Hver gang x vokser med 1, vokser funktionsværdien med 213. Da x måles i år, og funktionsværdien beskriver antallet af indbyggere, kan man altså sige, at antallet af indbyggere vokser med 213, hver gang x vokser med 1 år. Væksten i indbyggertallet er altså på 213 indbyggere om året.

14 752 er skæringen med andenaksen. Den opnås, når $x = 0$. Dette sker i år 2000,[9] og man kan derfor udlede, at indbyggertallet i byen var på 14 752 i år 2000.

[8] Husk, at en konstant er et fast tal.

[9] Idet år 2000 er 0 år efter år 2000.

Eksempel 6.20 Her ses på samme udvikling som i eksempel 6.19,

$$N(x) = 213x + 14\,752\ .$$

Hvor meget vokser byens indbyggertal over en 10-års periode?

Ud fra forskriften kan man se, at indbyggertallet vokser med 213 om året. Over en 10-års periode kommer der derfor

$$10 \cdot 213 = 2130$$

nye indbyggere.

Eksempel 6.21 Et firma producerer et antal varer. Omkostningerne ved produktionen er 2000 kr. i startomkostninger og 17 kr. pr. produceret vare.

Omkostningerne er altså en funktion af antallet af producerede varer. Denne funktion har forskriften

$$o(x) = 17x + 2000\ ,$$

hvor x er antallet af varer, og $o(x)$ er de samlede omkostninger.

Eksempel 6.22 Det viser sig, at middeltemperaturen i Vestgrønland er afhængig af breddegraden,[2] sådan at

$$T(x) = -0{,}732x + 46{,}1\ ,$$

hvor T er middeltemperaturen (i °C) og x er breddegraden.

Dvs. at middeltemperaturen i Vestgrønland aftager med 0,732°C, hver gang breddegraden vokser med 1 grad.

Den umiddelbare fortolkning af tallet 46,1 er, at det er temperaturen ved breddegraden 0, dvs. ækvator. Denne fortolkning giver dog ikke mening, idet modellen kun gælder for Vestgrønland.

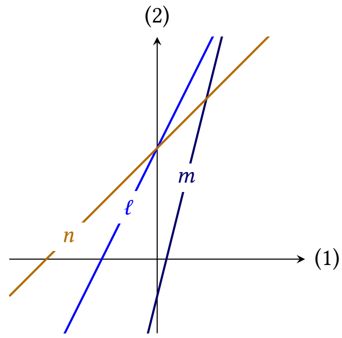
Det er således ikke muligt at give en fysisk fortolkning af tallet 46,1.

6.6 Øvelser

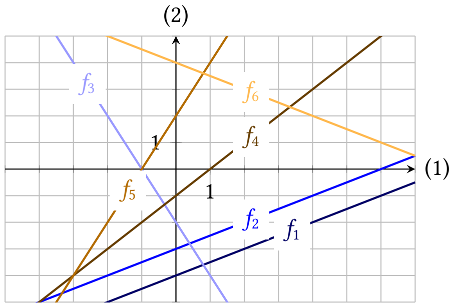
Øvelse 6.1
På tegningen til højre ses graferne for de rette linjer ℓ, m og n. De er grafer for tre lineære funktioner med forskrifterne

$$f(x) = 4x - 1\ ,$$
$$g(x) = 2x + 3 \quad \text{og}$$
$$h(x) = x + 3\ .$$

Hvilken linje er graf for hvilken funktion?



Øvelse 6.2
Bestem ved aflæsning en forskrift for hver af funktionerne $f_1, \dots, f_6$, hvis grafer ses på billedet herunder.



Øvelse 6.3
Opskriv forskrift for den lineære funktion hvis graf går gennem punktet P, og som har hældningskoefficient a:

a) $P(0, 4)$ og $a = 2$.
b) $P(2, 1)$ og $a = -\frac{1}{2}$.

Øvelse 6.4
Bestem en forskrift for den lineære funktion hvis graf går gennem punkterne:

a) $A(2, 3)$ og $B(-1, 9)$
b) $C(-3, 2)$ og $D(-4, 1)$

Øvelse 6.5
Den rette linje ℓ går gennem punkterne $A(-4, 2)$ og $B(5, 5)$.

Bestem ved beregning en forskrift for den lineære funktion hvis graf går gennem $C(3, -2)$ og er parallel med ℓ.

Øvelse 6.6
Grafen for en lineær funktion m går gennem punkterne $P(3, -7)$ og $Q(8, 8)$.

a) Bestem en forskrift for m.
b) Bestem grafens skæringspunkt med førsteaksen.

Øvelse 6.7
Afgør ved beregning, om punkterne A, B og C ligger på en ret linje, når

a) $A(19, 12)$, $B(27, 25)$ og $C(40, 46)$.
b) $A(-6, -3)$, $B(-1, 5)$ og $C(7, 18)$.

Øvelse 6.8
For den lineære funktion $h(x)$ gælder $h(-1) = -13$ og $h(4) = 32$.

a) Bestem en forskrift for funktionen.
b) Løs ligningen $h(x) = 23$.

Øvelse 6.9
Bestem skæringspunktet mellem graferne for de to funktioner

$$h(x) = 2x - 1 \quad \text{og} \quad k(x) = 3x + 7 \,.$$

Øvelse 6.10
Grafen for den lineære funktion g har hældningen 4 og går gennem punktet $(2, 5)$.

a) Bestem en forskrift for g.
b) Hvor meget vokser funktionsværdien når x vokser med 12?

Øvelse 6.11
Grafen for den lineære funktion g har hældningen -2 og går gennem punktet $(3, 1)$.

a) Bestem en forskrift for g.
b) Hvor meget er x vokset, hvis funktionsværdien er vokset med 38?

Øvelse 6.12
En bestemt vares pris vokser lineært med tiden. Prisen i 2010 var 66 kr. og i 2015 var prisen 76 kr.

a) Hvad vil prisen være i 2019?
b) Hvornår vil prisen være 100 kr?

Øvelse 6.13
Medlemstallet i en idrætsklub kan beskrives ved funktionen

$$m(t) = -6 \cdot t + 253$$

hvor $m(t)$ er medlemstallet, og t er antal år efter 2010.

a) Beregn medlemstallet i år 2020.
b) I hvilket år kommer medlemstallet ned på 139?
c) Giv en fortolkning af konstanterne -6 og 253 i modellen.

Lineær regression 7

Når man beskriver vækst ud fra målte data, kan man komme ud for, at man har en række målepunkter, som ikke ligger præcist på en ret linje, men dog gør det med god tilnærmelse.

Da punkterne ikke ligger præcist på en linje, vil det være forkert at bruge sætning 6.7 til at beregne en forskrift. Afhængig af, hvilke to punkter, man sætter ind i formlerne, vil man nemlig få vidt forskellige resultater for forskriften.

I stedet bruger man en metode, der kaldes *lineær regression* til at bestemme den rette linje, der ligger tættest muligt på alle punkterne. Denne metode er indbygget i de fleste regneark og matematikprogrammer, således at man blot skal indskrive punkterne i programmet, så får man at vide hvilken ligning, linjen har.

Tabel 7.1: Sammenhørende målte værdier af x og y.

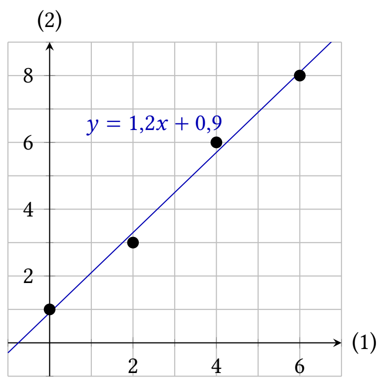
x	y
0	1
2	3
4	6
6	8

Eksempel 7.1 Tabel 7.1 viser sammenhørende værdier af den uafhængige variabel x og den uafhængige variabel y.

Anvender man et CAS-værktøj til at udføre lineær regression, finder man at den bedste rette linje har ligningen

$$y = 1{,}2x + 0{,}9 \ .$$

Punkterne og linjen kan ses på figur 7.2.



Figur 7.2: Den bedste rette linje gennem de 4 punkter.

Når man har en lineær model for en række datapunkter, vil grafen som regel ikke gå præcist gennem alle punkterne. Til hvert punkt hører der derfor et såkaldt *residual* som er den lodrette afstand fra punktet til den rette linje.

Definition 7.2

Hvis man har en række datapunkter $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ og en lineær model $y = ax + b$ for punkterne, så er *residualet* af det i'te punkt givet ved

$$r_i = y_i - (ax_i + b) \ .$$

Denne definition siger at man finder residualet ved at trække linjens y-værdi fra datapunktets y-værdi.

Eksempel 7.3 I eksempel 7.1 blev der fundet en regressionsligning ud fra de fire datapunkter

$$(0, 1) \ , \quad (2, 3) \ , \quad (4, 6) \quad \text{og} \quad (6, 8) \ .$$

Regressionsmodellen var givet ved ligningen

$$y = 1{,}2x + 0{,}9 \ .$$

Residualet for det første punkt $(0, 1)$ kan derfor beregnes som

$$r_1 = y_1 - (ax_1 + b) = 1 - (1{,}2 \cdot 0 + 0{,}9) = 0{,}1 \ .$$

For det andet punkt $(2, 3)$ får man

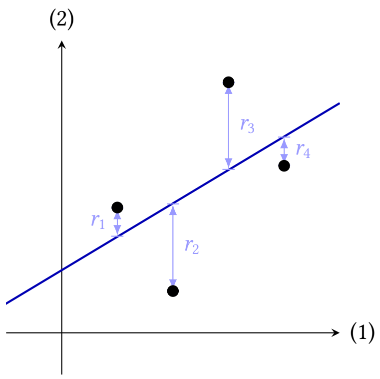
$$r_2 = y_2 - (ax_2 + b) = 3 - (1{,}2 \cdot 2 + 0{,}9) = -0{,}3 \ .$$

Disse to tal viser at det første punkt ligger 0,1 over linjen, mens det andet punkt ligger 0,3 under linjen.

Residualerne spiller en vigtig rolle i forbindelse med lineær regression, idet det er residualerne der bliver brugt til at vurdere hvornår en ret linje er »tættest« på punkterne. Metoden fungerer i praksis på den måde at man finder den linje der har den mindste afstand til alle punkterne. Afstanden defineres her som *kvadratsummen SSE*[1] af residualerne. På figur 7.3 er denne afstand givet ved

$$SSE = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 \ .$$

[1] *SSE* er en forkortelse for »sum of squares of errors of prediction«, altså kvadratsummen af fejlene/afvigelserne. »Afvigelsen« skal her forstås som residualerne, altså afstandene fra datapunkterne til linjen.



Figur 7.3: Man minimerer kvadratsummen $SSE = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2$.

Denne sum indeholder flere led, jo flere målepunkter der er. Den rette linje der passer bedst på punkterne, defineres så til at være den der gør *SSE* mindst mulig.

Hvis man har n forskellige punkter med koordinaterne

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \ ,$$

så kan man finde frem til to formler, der giver linjens hældningskoefficient a og dens skæring med andenaksen b ud fra alle x-værdierne $x_1, \dots, x_n$ og alle y-værdierne $y_1, \dots, y_n$.

Det kræver ret avanceret matematik at udlede de to formler for a og b, og formlerne er i sig selv også ret komplicerede, så derfor bliver formlerne ikke præsenteret her. Man behøver nemlig slet ikke kende formlerne for at kunne bruge dem da de er indbygget i alle regneark og CAS-værktøjer.

7.1 Residualplot

Hvis den rette linje er en god model for den undersøgte sammenhæng, så er residualerne små i forhold til de målte y-værdier, og de ligger tilfældigt fordelt. Om dette er tilfældet kan man undersøge ved at lave et *residualplot* som er en afbildning af residualerne som funktion af x-værdierne.

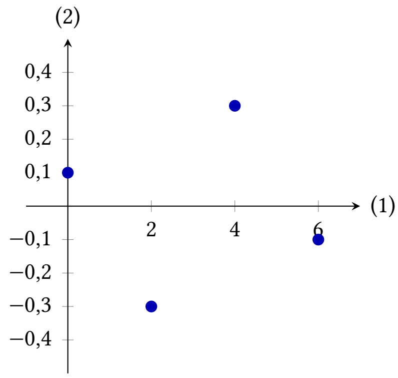
I eksempel 7.1 fandt man den rette linje, der passede bedst på en række sammenhørende værdier af x og y. Den rette linje havde ligningen

$$y = 1{,}2x + 0{,}9 \ ,$$

og i eksempel 7.3 blev nogle af residualerne beregnet. En samlet oversigt over punkterne og residualerne ses i tabel 7.4.

Tabel 7.4: De sammenhørende værdier af x og y samt residualerne r.

x	y	r
0	1	0,1
2	3	−0,3
4	6	0,3
6	8	−0,1



Figur 7.5: Residualplot over værdierne i tabel 7.4.

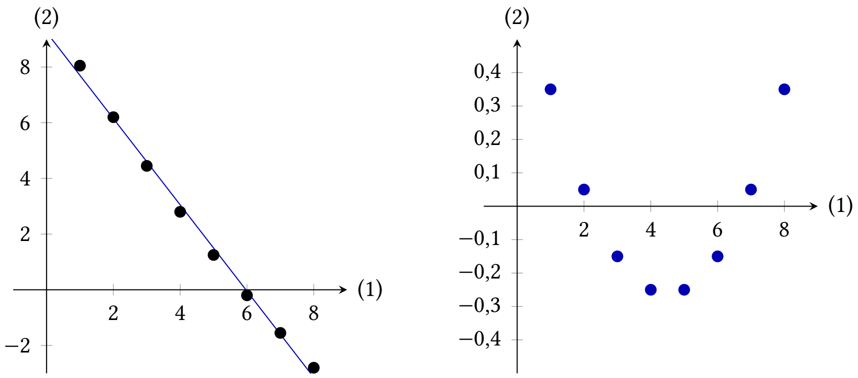
Residualplottet kan ses på figur 7.5. Her ses det på andenaksen, at residualernes værdier er små i forhold til de målte y-værdier. Plottet viser også, at residualerne ligger nogenlunde tilfældigt omkring førsteaksen. Det virker derfor rimeligt at anvende den lineære model i dette tilfælde.

Retfærdigvis skal det dog tilføjes at det ikke er helt rimeligt at argumentere for modellens anvendelighed ud fra dette residualplot. Det skyldes at man kun har fire målepunkter. Hvis man skal argumentere for en models gyldighed ud fra et residualplot, skal man helst have nok datapunkter til at man kan genkende et evt. mønster i residualerne.

Grunden til at man skal kunne afgøre om der er et mønster i residualerne er at en række målepunkter i nogle tilfælde kan se ud til at kunne modelleres med en ret linje, selvom det i virkeligheden er en anden type model der ligger bag. Dette vil typisk afsløre sig ved at residualplottet ikke ser tilfældigt ud, men viser en eller anden form for regelmæssighed.

Eksempel 7.4 Figur 7.6(a) viser et koordinatsystem med indsatte punkter samt en regressionslinje. Ved første øjekast ser punkterne ud til med rigtigt god tilnærmelse at ligge på en ret linje.

Men ser man på residualplottet 7.6(b) bliver det tydeligt at den rette linje ikke er en god model i forhold til disse punkter. Man kan nemlig se at residualerne ikke ligger tilfældigt, men på en form for kurve. Dette kunne tyde på at den model der ligger til grund for målingerne, slet ikke er lineær. Man skal derfor lede efter en anden type model.



(a) Målepunkter og regressionslinje.

(b) Residualplot.

Figur 7.6: En række målepunkter med regressionslinje samt residualplottet. Regressionslinjen ser ud til at passe godt på målepunkterne, men residualplottet afslører at modellen faktisk ikke passer ret godt.

7.2 Forklaringsgrad

Hvis man beregner den bedste rette linje vha. et CAS-værktøj, kan man som regel også få beregnet en størrelse kaldet *determinationskoefficienten* eller *forklaringsgraden*, normalt betegnet med R^2. Det er et tal mellem 0 og 1 som fortæller hvor godt den rette linje passer på punkterne. Jo tættere tallet er på 1, jo bedre er overensstemmelsen mellem punkterne og linjen.

Med målepunkterne fra eksempel 7.1 ovenfor bliver $R^2 = 0{,}9931$ Dette tal er meget tæt på 1 så den rette linje passer altså ret godt på punkterne, hvilket også fremgår af grafen på figur 7.2.

Man skal dog passe på med alene at vurdere ud fra forklaringsgraden idet man godt kan finde eksempler hvor R^2 ligger tæt på 1, men punkterne tydeligvis ikke kan modelleres med en ret linje. Det er derfor *altid* en god idé at tegne grafen (og evt. residualplottet) for at få et visuelt indtryk af om en linje er en god model.

7.3 Øvelser

Øvelse 7.1
Der er målt en sammenhæng mellem de to variable x og y. De målte tal kan ses i tabellen herunder:

x:	1	2	3	4
y:	5	7	8	11

a) Bestem vha. lineær regression a og b for den bedste rette linje.

b) Beregn residualerne.

Øvelse 7.2
De følgende 3 tabeller viser 3 forskellige sammenhænge mellem de variable x og y.

x:	1	2	3	4	5	6
y:	3,2	4,9	7,3	8,8	10,9	13,4

x:	1	2	3	4	5	6
y:	1,4	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8

x:	1	2	3	4	5	6
y:	0,1	1,4	2,9	4,6	6,5	8,6

a) Bestem den bedste rette linje og tegn residualplottene for hver af de tre sammenhænge.

b) Brug residualplottene til at vurdere for hvilke(n) af de tre sammenhænge, den rette linje er en god model.

Øvelse 7.3
For en kobbertråd er der med god tilnærmelse en lineær sammenhæng mellem modstand, målt i Ω, og temperaturen, målt i °C. Ved en række målinger har man fundet følgende data:

Temperatur (°C):	0	15	30	45	60
Modstand (Ω) :	54,9	58,4	61,9	66,2	69,0

a) Bestem en lineær model, der beskriver sammenhængen.

b) Ved hvilken temperatur er modstanden 75 Ω?

Øvelse 7.4
En række målinger giver følgende sammenhæng mellem vindhastigheden og den støj, som en vindmølle udsender:

Vindhastighed (m/s):	6,3	7,2	8,5	9,4
Støj (dB) :	51	56	65	71

Med god tilnærmelse kan denne beskrives ved ligningen $y = ax + b$, hvor x er vindhastigheden, og y er støjen.

a) Bestem tallene a og b i ligningen.

b) Forklar, hvad konstanterne a og b beskriver i denne model.

c) Bestem den vindhastighed, der giver en støj på 75 dB.

d) Hvor meget skal vindhastigheden falde, for at støjen aftager med 10 dB?

Bibliografi

[1] Energi Fyn. *NaturEl*. URL: https://www.energifyn.dk/ (hentet 09.08.2019).

[2] Jesper Ruggaard Mehus og Svend Erik Nielsen. *Klimaforandringer i arktis*. Biofag nr. 6/2012. Særnummer. Forlaget Nucleus, 2012.

[3] Leo Rogers. *The History of Negative Numbers*. University of Cambridge. URL: http://nrich.maths.org/5961 (hentet 24.06.2014).

[4] Ib Wessel. »Fahrenheit«. I: *Den Store Danske* (2017). URL: http://denstoredanske.dk/ (hentet 09.08.2019).

Regningsarternes hierarki

Regnestykker i parentes udføres før alt andet. Regnestykker regnes derefter i denne rækkefølge:

1. Først udføres potensopløftning og roduddragning.
2. Dernæst udføres multiplikation (gange) og division.
3. Til sidst lægger man sammen og trækker fra.

Brøkregning

Forkorte	(1)	$\frac{a}{b} = \frac{a/k}{b/k}$
Forlænge	(2)	$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}$
Addition	(3)	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$
Subtraktion	(4)	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$
Multiplikation	(5)	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
Division	(6)	$\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

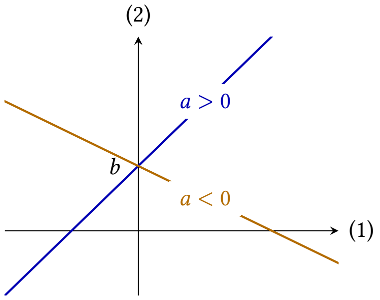
Algebra

Den associative lov	(7)	$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$
	(8)	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$
Den distributive lov	(9)	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Kvadratet på en sum	(10)	$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$
Kvadratet på en differens	(11)	$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$
To tals sum gange de samme to tals differens	(12)	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Ligninger

Nulreglen	(13)	$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$ eller $b = 0$

Lineære funktioner



Lineær funktion	(14)	$f(x) = a \cdot x + b$
Hældningskoefficient ud fra to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) på grafen	(15)	$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Skæring med andenaksen	(16)	$b = y_1 - ax_1$
Forskrift	(17)	$f(x) = a \cdot (x - x_1) + y_1$

Lineær regression

Residual	(18)	$r_i = y_i - (a \cdot x_i + b)$