Den naturlige logaritme

Mike Auerbach

mathematicus.dk

2015

I denne note gennemgås den naturlige logaritme, defineret som en ganske bestemt stamfunktion til $\frac{1}{t}$. Det viser sig, at man ved denne behandling kan udlede nogle af både den naturlige logaritmes og den naturlige eksponentialfunktions egenskaber ud fra egenskaber ved stamfunktioner og afledte funktioner.

1 DEFINITION OG EGENSKABER

Den naturlige logaritme ln defineres som den stamfunktion til $\frac{1}{t}$, som opfylder, at $\ln(1) = 0$.

Definition 1

Definer funktionen $\ln : \,]0;\infty[\, \to \mathbb{R}$ ved

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Funktionen ln kaldes *den naturlige logaritme*.

En af de mest anvendte regneregler for logaritmer kan nu bevises ud fra almindelig integralregning:

Sætning 2

For alle $r \in \mathbb{R}$ og $a > 0$ gælder

$$\ln(a^r) = r \cdot \ln(a)\,,$$

Bevis

For $r = 0$ har man

$$\ln(a^0) = \ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0 = 0 \cdot \ln(a)\,,$$

dvs. sætningen gælder for $r = 0$.

Hvis $r \neq 0$, så er

$$\ln(a^r) = \int_1^{a^r} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

For at bestemme værdien af dette integral sættes $u = t^{1/r}$. Så er $\mathrm{d}u = \frac{1}{r} t^{1/r-1}\,\mathrm{d}t$, dvs.

$$r \cdot \frac{1}{t^{1/r-1}}\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}t\,,$$

og

$$\begin{aligned}\int_{t=1}^{t=a^r} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{u=1}^{u=a} \frac{1}{t} \cdot r \cdot \frac{1}{t^{1/r-1}}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{u=1}^{u=a} r \cdot \frac{1}{t^{1/r}}\,\mathrm{d}u \\ &= r \cdot \int_1^a \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = r \cdot \ln(a)\,.\end{aligned}$$

Sætningen er hermed vist. ■

De næste par regneregler for ln følger også af almindelig integralregning:

Sætning 3

For alle $a, b > 0$ gælder

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Bevis

Første del af sætningen bevises ved at beregne

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(a) + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

For at beregne andet led af denne sum sættes $u = \frac{t}{a}$, så er $\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}t$ eller $a\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$. Man får så

$$\int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^b \frac{1}{au} \cdot a\,\mathrm{d}u = \int_1^b \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln(b)\,.$$

Derfor er

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)\,.$$

Anden del af sætningen bevises ved at omskrive $\frac{a}{b}$ til ab^{-1}. Så er

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(ab^{-1}) = \ln(a) + \ln(b^{-1})$$

ifølge første del af sætningen.

Ifølge sætning 2 er

$$\ln(a) + \ln(b^{-1}) = \ln(a) + (-1) \cdot \ln(b) = \ln(a) - \ln(b)\,,$$

og sætningen er dermed bevist. ■

2 DEN INVERSE FUNKTION

Den inverse funktion til den naturlige logaritme er som bekendt den naturlige eksponentialfunktion. Denne funktion har en masse egenskaber, som her ikke kan tages for givet. Først definerer man altså blot den inverse funktion.

Definition 4

Den inverse funktion til ln betegnes med exp, dvs. for exp gælder

$$\exp(\ln(x)) = \ln(\exp(x)) = x\,.$$

Rigtigt mange af denne funktions egenskaber kan udledes ud fra de regneregler for den naturlige logaritme, som blev udledt i sidste afsnit. Bl.a. gælder der følgende for funktionen exp.

Sætning 5

exp er en eksponentialfunktion med grundtal $\mathrm{e} = \exp(1)$.

Bevis

Idet $\ln(\exp(x)) = x$ er

$$\exp(x) = \exp(x \cdot 1) = \exp(x \cdot \ln(\exp(1)))\,.$$

Ifølge sætning 2 er

$$\exp(x \cdot \ln(\exp(1))) = \exp(\ln(\exp(1)^x)) = \exp(1)^x\,.$$

Dvs. $\exp(x) = \exp(1)^x$, og exp er altså en eksponentialfunktion med grundtal $\exp(1)$. ■

Idet $\exp(x)$ er en eksponentialfunktion skrives den også ofte som e^x, hvor $\mathrm{e} = \exp(1)$ er grundtallet. For dette grundtal gælder, at

$$\mathrm{e} = \exp(1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(\mathrm{e}) = 1\,.$$

Grundtallets værdi kan altså findes ved at løse ligningen $\ln(\mathrm{e}) = 1$ eller

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 1\,.$$

3 DE AFLEDTE FUNKTIONER AF LN OG EXP

Idet $\ln(x)$ er defineret som en stamfunktion til $\frac{1}{x}$, følger denne sætning om den afledte funktion til $\ln(x)$ direkte af definitionen:

Sætning 6

Den afledte funktion af $\ln(x)$ er $\frac{1}{x}$.

For at bestemme den afledte funktion af exp er det dog nødvendigt med en hjælpesætning om den afledte af inverse funktioner.

Sætning 7

Hvis f^{-1} er den inverse funktion til f, så er

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \,.$$

Bevis

Pr. definition er

$$f(f^{-1}(x)) = x \,.$$

Hvis man differentierer begge sider af denne ligning, får man

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \,. \qquad \blacksquare$$

Da exp er den inverse funktion til $\ln(x)$ kan man nu bruge sætning 7 til at bevise følgende sætning:

Sætning 8

Den afledte funktion af $\exp(x)$ er $\exp(x)$.

Bevis

Da ln er den inverse funktion til exp, er (iflg. sætning 7)

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x) \,. \qquad \blacksquare$$