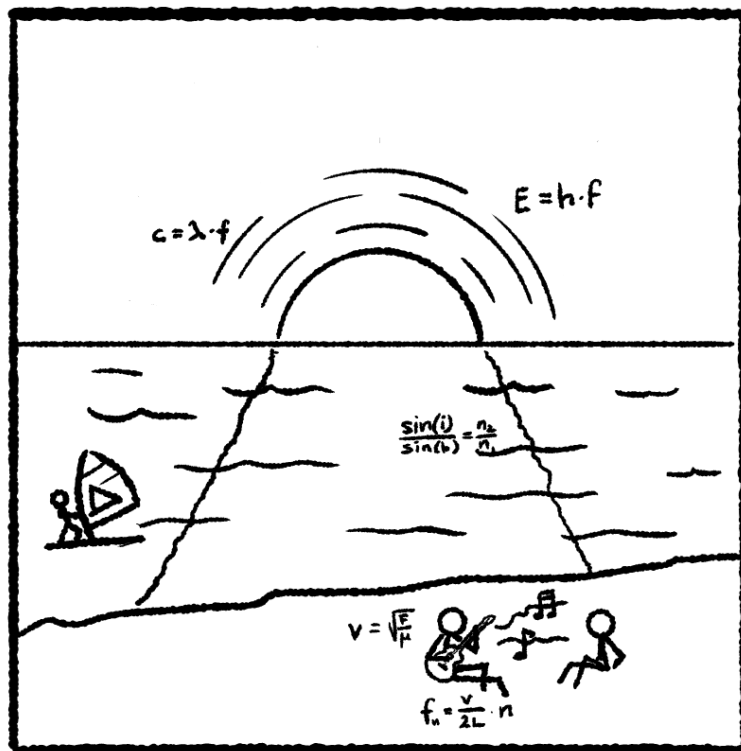


Mike Vandal Auerbach

BØLGER

Version 1.0

19. maj 2022



Bølger

Version 1.0, 2022

I disse noter gives en generel gennemgang af bølgefænomener og bølgers egenskaber. Herefter gennemgås lyd og lys som konkrete eksempler.

Værdien af forskellige konstanter er, med mindre andet er angivet, taget fra Databog Fysik Kemi, 11. udgave.[1] Billeder uden kildeangivelse er egne billeder.

Enkelte grafer/figurer er markeret med symbolet  der fungerer som link til et interaktivt GeoGebra-arbejdsark. Se også www.geogebra.org.

Disse noter er skrevet til fysikundervisning på stx og må frit anvendes til ikke-kommercielle formål.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet $\text{\LaTeX}$, se www.tug.org og www.miktex.org.
Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.



Materialet er udgivet under en »Kreditering-Ikkekommerciel-Deling på samme vilkår 4.0 International«-licens (CC BY-NC-SA 4.0).

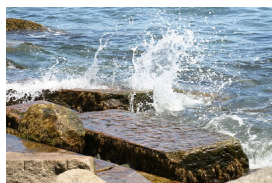
Mike Vandal Auerbach, 2022.

Indhold

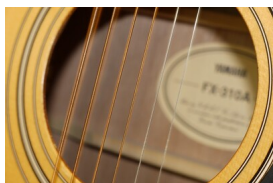
1	Bølger	5
1-1	Tvær- og længdebølger	5
1-2	Harmoniske bølger	6
1-3	Matematisk beskrivelse af bølger	7
2	Interferens og diffraktion	9
2-1	Huygens' princip	10
2-2	Stående bølger	10
2-3	Matematikken bag stående bølger	11
3	Refleksion og brydning	13
3-1	Brydningsloven for lys	15
3-2	Totalrefleksion	16
3-3	Udledning af brydningsloven	18
4	Lyd	19
4-1	Lydstyrke	20
4-2	Stående bølger på strenge	22
4-3	Stående bølger i rør	25
5	Lys	29
5-1	Fotoner og energi	29
5-2	Optisk gitter	30
5-3	Udledning af gitterligningen	33
6	Dopplereffekt	35
	Bibliografi	39
	Billedkilder	39

Bølger

Når man taler om bølger, er vandbølger måske en af de eksempler mange vil tænke på, men bølger kan også bruges til at beskrive rigtig mange andre fænomener; nogle af disse er vist på figur 1.1. Vandbølgerne på det første billede er selvfølgelig bølger, men det samme er de svingninger der dannes når en guitarstreng slås an. Det sidste af billederne viser et fyrværkerishow; her er der to slags bølger i spil: Lyden fra fyrværkeriet spredes som bølger gennem luften, og lyset fra fyrværkeriet er også en bølge.



(a) Vandbølger.[24]



(b) Svingende strenge.[18]



(c) Lys og lyd.[11]

Figur 1.1: Tre forskellige fænomener der alle involverer bølger.

De fleste af bølgerne på figur 1.1 er såkaldt *mekaniske* bølger. Mekaniske bølger udbreder sig i et *medium*, sådan at bølgen skabes af svingninger i mediet. Vandbølger udbreder sig således i vand, lydbølger i luft, osv. Lys udbreder sig også som en bølge, men dette er en *elektromagnetisk* bølge der består af svingende elektriske og magnetiske felter. I modsætning til mekaniske bølger kan elektromagnetiske bølger udbrede sig i vacuum.

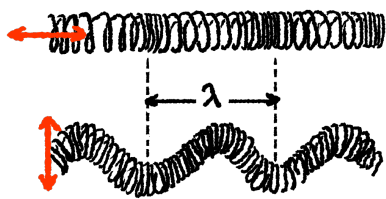
Uanset om man kigger på mekaniske eller elektromagnetiske bølger, har bølgerne dog det tilfælles at de transporterer energi, men ikke stof. Tænk på korn der bølger i vinden på en mark: Bølgen bevæger sig gennem marken, men det enkelte kornstrå bliver stående på sin plads. Bølgens udbredelse skyldes at kornstråene svinger frem og tilbage på deres plads, og det er denne bevægelse der forplanter sig gennem marken.

1-1 Tvær- og længdebølger

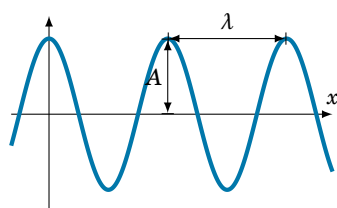
Mekaniske bølger er altså udbredning af svingninger i et medium. Disse svingninger kan foregå enten på tværs eller på langs af bølgens bevægelsesretning. I det første tilfælde taler man om *tværbølger* (også kaldet *transversale* bølger), i det andet om *længdebølger* (eller *longitudinale* bølger).¹

Eksempler på tværbølger er bølgerne på en guitarstreng der slås an, eller de bølger man ser hvis man kaster en sten i en sø. Lydbølger

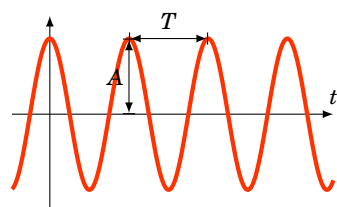
¹Elektromagnetiske bølger er altid tværbølger.



Figur 1.2: Bølger på en fjeder kan være både længdebølger (øverst) og tværbølger (nederst).



(a) Fast tid.



(b) Fast position

Figur 1.3: En harmonisk bølge med amplitude A , bølgelængde λ og periode T .



Figur 1.4: Heinrich Rudolf Hertz.[17]

er derimod et eksempel på en længdebølge; udbredelsen af lyd skyldes at luften sættes i svingninger langs lydets udbredelsesretning.

Figur 1.2 viser hvordan bølger på en fjeder kan udbredes både som længde- og som tværbølger. Hvis fjederen bevæges op og ned, vil der dannes tværbølger der udbreder sig på tværs af bølgens retning, mens der kan dannes længdebølger hvis fjederen skiftevis presses sammen og strækkes ud.

1-2 Harmoniske bølger

Figur 1.3 viser en harmonisk bølge. Enhver bølge der udbreder sig, er en bølge i både tid og sted; når man tegner grafen, kan man enten tegne bølgen for en fast tid (altså et snapshot af bølgen hvor tiden står stille) eller for en fast position (hvor man følger bevægelsen i tid af en enkelt partikel, mens bølgen passerer). Det er derfor der er to grafer på figur 1.3.

Harmoniske bølger kan beskrives ved forskellige størrelser:

Amplituden, A , er det maksimale udsving (se figur 1.3). For lys har dette noget at gøre med udsvinget af de elektriske og magnetiske felter, bølgen består af. For lyd er amplituden relateret til de trykforskelle i luften som bølgen skaber (dvs. jo større amplituden er, jo større er også trykforskellene, og jo større bliver lydstyrken).

Bølgelængden, λ , (se figur 1.3) er afstanden fra bølgetop til bølgetop (denne er også den samme som afstanden fra bølgedal til bølgedal). Dette er en virkelig afstand, den måles oftest i meter.

Perioden, T , (også kaldet svingningstiden) er den tid der går mellem at to på hinanden følgende bølgetoppe passerer et punkt.

Frekvensen, f , er antallet af svingninger pr. tid (ofte pr. sekund).

Da frekvensen ofte måles som antal svingninger pr. sekund, har denne enhed fået sit eget navn *hertz* (Hz) efter Heinrich Hertz (1857–1894), en tysk fysiker der i slutningen af 1800-tallet frembragte elektromagnetisk stråling (radiobølger) og målte at farten af denne stråling var lig lysets fart.[4] Der gælder

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1},$$

dvs. en bølge med en frekvens på 1 Hz udfører 1 svingning pr. sekund.

Hvis en bølge har en frekvens på 2 Hz, udfører den 2 svingninger pr. sekund. En svingning må derfor være

$$T = \frac{1}{2 \text{ Hz}} = 0,5 \text{ s},$$

og hvis en bølge har en frekvens på 4 Hz, må 1 svingning være

$$T = \frac{1}{4 \text{ Hz}} = 0,25 \text{ s}.$$

Generelt må det derfor gælde at

$$T = \frac{1}{f} \quad \Leftrightarrow \quad f = \frac{1}{T}.$$

Idet bølgen bevæger sig distancen λ på tiden T , kan man beregne bølgens udbredelsesfart som

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{1}{T} = \lambda \cdot f.$$

Dette er den såkaldte bølgeligning der gælder for alle harmoniske bølger:

Bølgeligningen

$$v = \lambda \cdot f,$$

hvor v er bølgens fart, λ er bølgelængden, og f er bølgens frekvens.

Eksempel 1.1

Nogle vandbølger slår ind mod en strand. En ny bølgetop rammer stranden for hver 0,27 s. Afstanden mellem bølgetoppene er 1,4 m. Her kender man altså bølgenes periode og bølgelængden:

$$T = 0,27 \text{ s} \quad \text{og} \quad \lambda = 1,4 \text{ m}.$$

Man kan så beregne frekvensen,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,27 \text{ s}} = 3,7 \text{ Hz},$$

og farten af bølgerne,

$$v = \lambda \cdot f = 1,4 \text{ m} \cdot 3,7 \text{ Hz} = 5,2 \text{ m/s}.$$

Øvelse 1.2

Nogle bølger bevæger sig på en snor med en frekvens på 19 Hz. Bølgelængden er 0,63 m.

- Bestem bølgenes periode.
- Bestem bølgenes fart.

Øvelse 1.3

Nogle bølger bevæger sig langs en snor. Bølgenes frekvens øges, mens udbredelsesfarten er konstant.

- Hvad sker der med perioden?
- Hvad sker der med bølgelængden.

1-3 Matematisk beskrivelse af bølger

Hvis en harmonisk bølge skal beskrives med en matematisk funktion, skal funktionen være periodisk. Ser man på bølgen til en fast tid,

kan bølgens udsving fra ligevægtsstillingen beskrives med en sinusfunktion

$$u(x) = A \cdot \sin(kx),$$

hvor A er amplituden og k er et positivt tal der kaldes *bølgetallet*. For funktionen $\sin(x)$ er afstanden mellem bølgetoppene 2π . Hvis $f(x)$ skal have en afstand på λ mellem bølgetoppene, skal det derfor gælde at

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Bølgen bevæger sig langs med førsteaksen med hastigheden v . Til tiden t har bølgen derfor flyttet sig stykket vt mod højre. Man kan derfor inddrage tiden i beskrivelsen ved at parallelforskyde funktionen ovenfor med stykket vt :

$$u(x, t) = A \cdot \sin(k(x - vt)) = A \cdot \sin(kx - kv t) = A \cdot \sin(kx - \omega t),$$

hvor $\omega = kv$ kaldes *vinkelfrekvensen*.

Ser man nærmere på vinkelfrekvensen, finder man at

$$\omega = kv = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v = 2\pi \cdot \frac{v}{\lambda} = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{T}.$$

Den fundne funktion $u(x, t) = A \cdot \sin(kx - \omega t)$ opfylder at $u(0, 0) = 0$, dvs. bølgen skal have udsving 0 til tiden $t = 0$ ved positionen $x = 0$. Hvis dette ikke er tilfældet skal der tilføjes en konstant, og man får denne funktion:

Matematisk beskrivelse af en harmonisk bølge

$$u(x, t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi),$$

hvor A er amplituden, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ er bølgetallet, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ er vinkelfrekvensen, og φ er fasen.

Fasen φ er det tal der opfylder at bølgens udsving til tiden $t = 0$ ved positionen $x = 0$ er $A \cdot \sin(\varphi)$.

Øvelse 1.4

En bølges udsving kan beskrives med funktionen

$$u(x, t) = 5,2 \text{ m} \cdot \sin(3,7 \text{ m}^{-1} \cdot x - 42 \text{ s}^{-1} \cdot t).$$

- Bestem amplituden, bølgelængden og perioden.
- Bestem frekvensen.
- Bestem bølgens fart.

Interferens og diffraktion

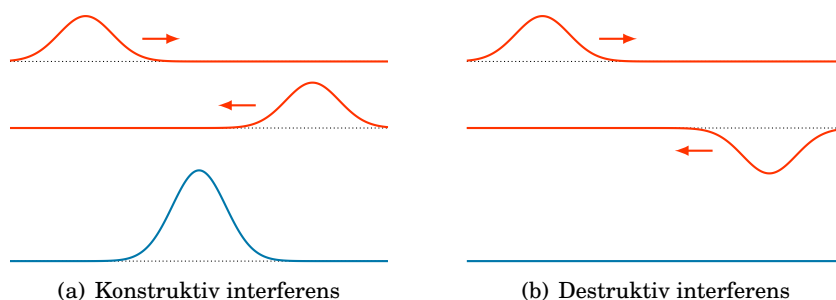
Bølger transporterer som nævnt energi, men ikke stof. Det betyder at når to bølger møder hinanden, kan de faktisk passere igennem hinanden. Figur 2.1 viser regn på en vandoverflade. Her kan man tydeligt se at der dannes ringbølger hvor de enkelte regndråber rammer vandoverfladen, og at disse bølger passerer gennem hinanden.



Figur 2.1: Regn på en vandoverflade.[14]

Der hvor to bølger møder hinanden opstår der *interferens*. I dette tilfælde bliver udsvinget på det pågældende sted *summen* af udsvingene fra hver af de to bølger. Hvis bølgerne mødes så man har bølgetoppe ud for hinanden (så er bølgedalene det selvfølgelig også), får man *konstruktiv interferens*. Her skal amplituderne af de to bølger lægges sammen for at finde amplituden af den resulterende bølge. Hvis bølgerne mødes med bølgetop ud for bølgedal får man i stedet *destruktiv interferens*. Her vil de to bølger udslukke hinanden.

Figur 2.2 herunder viser hvad der sker når to bølgepulser møder hinanden. Hvis de to bølgepulser har samme amplitude og udsving i samme retning, bliver resultatet en bølgepuls med en dobbelt så stor amplitude. Har bølgepulserne derimod udsving i modsat retning, bliver amplituden af den resulterende bølge 0, dvs. de to bølger udslukker hinanden.



Figur 2.2: Billedet viser to bølgepulser der bevæger sig mod hinanden. Der kan så være enten konstruktiv eller destruktiv interferens, afhængig af om de to bølgepulser har udsving i samme eller i modsat retning.

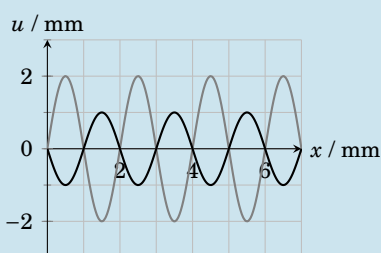
Den resulterende bølge er vist nederst på hver af de to figurer.



Øvelse 2.1

Figuren til højre viser to harmoniske bølger der bevæger sig i samme retning.

- Hvad bliver amplituden af den resulterende bølge?
- Hvad er bølgelængden af den resulterende bølge?





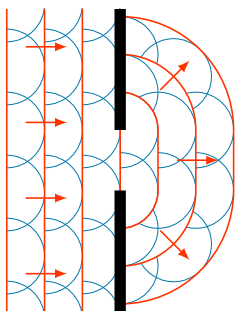
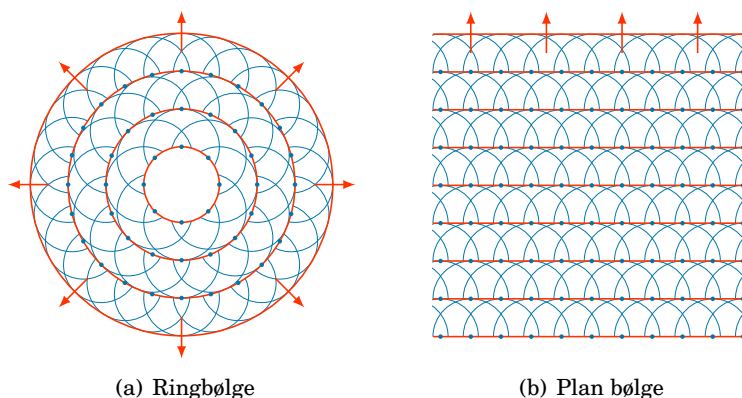
Figur 2.3: Christiaan Huygens.[20]

2-1 Huygens' princip

I 1690 formulerede den hollandske matematiker, astronom og fysiker Christiaan Huygens (1629–1695) et princip for bølgeudbredelse.[6] Ifølge Huygens' princip er ethvert punkt på en bølgefront kilde til en ny bølge der udbreder sig som en ringbølge. Efter et stykke tid vil bølgefrontens position have flyttet sig således at den tangerer det ydre af alle disse *sekundære* bølger.

Figur 2.4 viser hvordan en ringbølge og en plan bølge udbreder sig ifølge Huygens' princip. Fra hvert eneste punkt på bølgefronten udbreder der sig en ringbølge i bølgens retning. Nogle af disse uendeligt mange ringbølger er tegnet på figuren. Efter et stykke tid har bølgen flyttet sig til en ny bølgefront, der indhyller det ydre af de sekundære bølger; man siger at bølgefronten er en *indhyldningskurve* til alle sekundærbølgerne.

Figur 2.4: Udbredelsen af en ringbølge og en plan bølge ifølge Huygens' princip. Pilene viser bølgens udbredelsesretning. Hvert eneste punkt på bølgefronten er centrum for en lille ringbølge, på figurene er nogle af disse ringbølger tegnet.



Figur 2.5: En plan bølge der passerer en spalte.

Huygens' princip kan forklare hvorfor bølger kan »gå rundt om hjørner«, et fænomen der kaldes *diffraction*. Figur 2.5 viser en plan bølge der bevæger sig gennem en spalte. Når bølgefronten passerer spalten vil der dannes ringbølger i kanterne, sådan at bølgen ikke længere er en plan bølge efter den har passeret spalten.

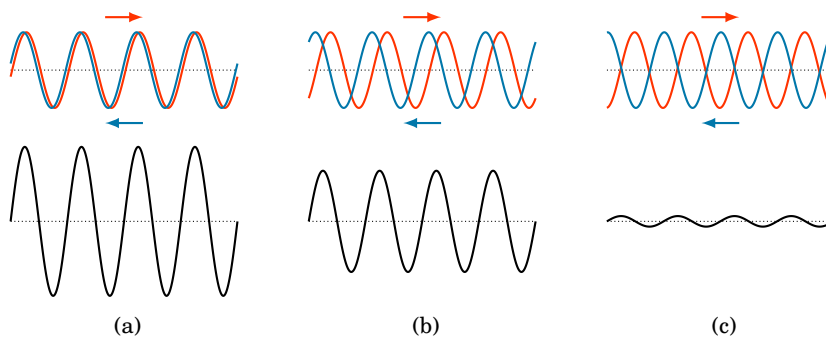
Som det fremgår af billedet vil den resulterende bølge være tæt på at være en ringbølge hvis spalten er smal i forhold til bølgelængden. Dvs. hvis en plan bølge passerer en smal spalte, dannes der ringbølger på den anden side. Omvendt vil bølgen fortsætte som en plan bølge hvis spalten er meget stor.

2-2 Stående bølger

Hvis to bølger med samme bølgelængde og fart bevæger sig mod hinanden, vil der være konstruktiv interferens til de tidspunkter hvor bølgerne har bølgetoppene ud for hinanden, og destruktiv interferens til de tidspunkter hvor den ene bølges bølgetoppe er ud for den anden bølges bølgedale.

Figur 2.6 viser to bølger der udbreder sig modsat hinanden, til tre forskellige tidspunkter. Som man kan se bevæger den resulterende bøl-

ge sig hverken frem eller tilbage, men dens amplitude bliver skiftevis større og mindre. Dette fænomen kalder man en *stående bølge*.



Figur 2.6: To bølger der bevæger sig i hver sin retning set til tre forskellige tidspunkter. Den resulterende bølge ses nederst på figurene.



En stående bølge svinger altså mellem at have et maksimalt udsving når de to interfererende bølger har bølgetoppene ud for hinanden, og et udsving på 0 når de to interfererende bølger har bølgetop og bølgedal ud for hinanden. De steder hvor den stående bølge har maksimale udsving kaldes *svingningsbuge*, og de steder hvor der intet udsving er, kaldes *knudepunkter*. Disse er illustreret på figur 2.7 som viser en opspændt streng der er sat i svingninger af en vibrator. Bølgerne der løber frem og tilbage på strengen danner en stående bølge.

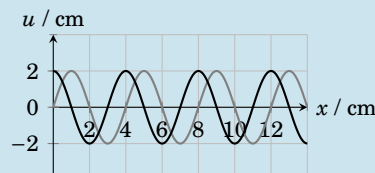


Figur 2.7: Stående bølger på en streng. Svingningsbugene er markeret med pile, knudepunkterne med prikker

Øvelse 2.2

Figuren til højre viser to harmoniske bølger med samme bølgelængde der bevæger sig i hver sin retning.

- a) Hvad bliver det maksimale udsving af den resulterende stående bølge?



2-3 Matematikken bag stående bølger

Hvis to bølger har samme amplitude, bølgelængde og fart, men bevæger sig i modsatte retning, kan de beskrives med de to funktioner

$$u_1(x, t) = A \cdot \sin(kx + \omega t)$$

$$u_2(x, t) = A \cdot \sin(kx - \omega t),$$

hvor leddet ωt skifter fortegn fra den ene bølge til den anden, netop fordi hastigheden skifter retning.

Den resulterende bølge finder man ved at lægge disse to funktioner sammen; den resulterende bølge kan derfor beskrives med funktionen

$$u(x, t) = A \cdot \sin(kx + \omega t) + A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

$$= A \cdot (\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)) .$$

Dette kan reduceres ved at anvende de såkaldte *additionsformler* for sinus. Der gælder nemlig¹

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

Heraf får man at

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A \cdot (\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)) \\ &= A \cdot (\sin(kx)\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\cos(kx) \\ &\quad + \sin(kx)\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\cos(kx)) \\ &= A \cdot (\sin(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\cos(\omega t)) \\ &= 2A \cdot \sin(kx) \cdot \cos(\omega t) . \end{aligned}$$

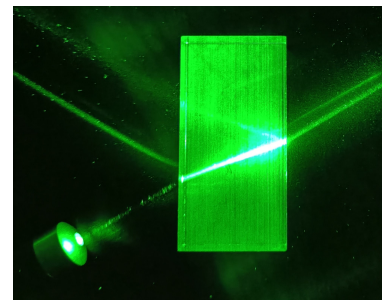
Den resulterende bølges form følger altså funktionen $\sin(kx)$, mens amplituden af denne bølge varierer som $\cos(\omega t)$. Derfor vil bølgen ikke bevæge sig frem og tilbage, men derimod op og ned.

¹Formlerne og en udledning af dem kan ses på [9].

Refleksion og brydning

Bølger udbreder sig ikke med samme hastighed i alle materialer. F.eks. er lydens fart i luft og i vand ikke den samme (se tabel 4.1). Når en bølge bevæger sig fra ét materiale ind i et andet, kan der derfor opstå både *refleksion* og *brydning*. Figur 3.1 viser refleksion og brydning for en laser der bevæger sig fra luft ind i plexiglas. Noget af lyset reflekteres fra vandoverfladen, mens den del af lyset der bevæger sig fra luften ind i klodsen skifter retning – det er dette fænomen der kaldes brydning.

Figur 3.2 viser en skitse af de to fænomener. Indfaldsvinklen i er den vinkel bølgen danner med midtnormalen til overgangen mellem de to materialer. Ser man nærmere på billedet på figur 3.1, kan man se at ved udfaldsvinklen for det reflekterede lys er den samme som indfaldsvinklen. Dette gælder generelt.



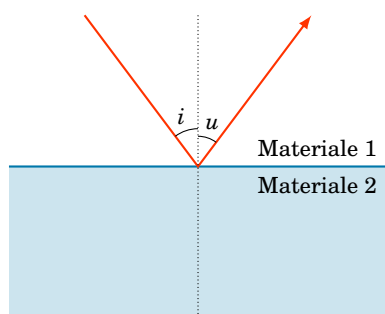
Figur 3.1: En grøn laser sendes ind i en plexiglasclods. Ved overgangen mellem luft og plexiglas ses både refleksion og brydning.

Refleksion

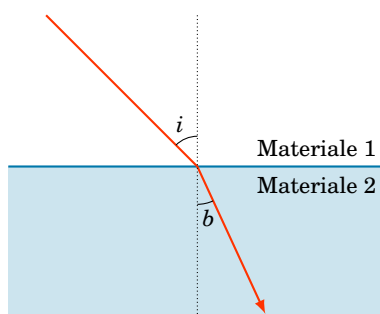
Når en bølge reflekteres, gælder der

$$i = u ,$$

hvor i er indfaldsvinklen, og u er udfaldsvinklen.



(a) Refleksion



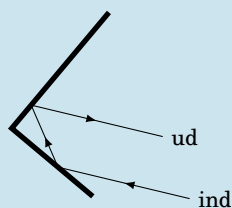
(b) Brydning

Figur 3.2: Refleksion og brydning. Når man skal undersøge refleksion og brydning, kigger man på bølgens vinkel med midtnormalen til overfladen.

Øvelse 3.1

De to kraftige sorte linjer på figuren til højre er spejle der står vinkelret på hinanden. En lysstråle kommer ind fra venstre (følg pilene) og bliver reflekteret to gange.

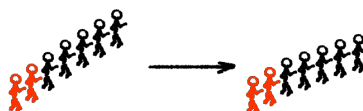
- a) Argumentér for at den indgående og den udgående lysstråle er parallelle.



Bølgers brydning er lidt mere kompliceret at analysere. Årsagen til at bølger brydes, er at bølgens hastighed er forskellig i de to materialer. Hvorfor der er brydning i dette tilfælde, illustreres måske bedst med et eksempel.

Eksempel 3.2

En bølgefront kan simuleres med en kæde af mennesker der går hånd i hånd. Hvis nogle af menneskene i den ene ende af kæden pludselig begynder at gå langsommere, vil hele kæden ændre retning.



Billedet viser hvilken vej menneskekæden skifter retning når de to personer yderst til venstre pludselig begynder at gå langsommere.

Når en bølge bevæger sig fra ét materiale ind i et andet, vil den ene ende af bølgefronten bevæge sig ind i det andet materiale før den anden. Den ene ende af bølgefronten begynder derfor at bevæge sig med en anden hastighed end den anden ende, hvilket får hele bølgen til at dreje. Sammenhængen mellem indfaldsvinklen i og brydningsvinklen b afhænger derfor af bølgens hastighed i de to materialer. Det viser sig at der gælder

Brydningsloven

$$\frac{\sin(i)}{\sin(b)} = \frac{v_1}{v_2},$$

hvor v_1 er bølgens fart i materiale 1, og v_2 er bølgens fart i materiale 2.

Brydningsloven skrives også somme tider

$$\frac{\sin(i)}{\sin(b)} = n_{1,2},$$

hvor $n_{1,2} = \frac{v_1}{v_2}$ er det såkaldte brydningsforhold mellem de to materialer.

Eksempel 3.3

Lydbølger bevæger sig med en hastighed på 340 m/s i luft og 1480 m/s i vand. Hvis en lydbølge rammer vandet med en indfaldsvinkel på 10° , giver brydningsloven at

$$\frac{\sin(10^\circ)}{\sin(b)} = \frac{340 \text{ m/s}}{1480 \text{ m/s}}.$$

Dvs.

$$\sin(b) = \frac{1480 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s}} \cdot \sin(10^\circ) = 0,756,$$

så brydningsvinklen er

$$b = \sin^{-1}(0,756) = 49,1^\circ.$$

Lyden ændrer altså sin retning betragteligt ved overgangen fra luft til vand. En dykker vil derfor normalt ikke kunne bedømme hvilken retning en lyd kommer fra hvis den stammer fra et sted oven for vandoverfladen.

Øvelse 3.4

Nogle vandbølger passerer hen over en revle og ud på dybt vand. Bølgéhastigheden på lavt vand (over revlen) er 0,25 m/s, og på det dybe vand er den 0,35 m/s. Bølgerne rammer det dybe vand med en indfaldsvinkel på 27° .

- a) Beregn brydningsvinklen ved overgangen til dybt vand.

3-1 Brydningsloven for lys

Lys bevæger sig med meget stor fart. Bl.a. derfor vil man sjældent kunne slå lysets fart i forskellige materialer op direkte. I stedet kan man finde det såkaldte *brydningsindeks*, for materialet; dette er defineret som

Brydningsindeks

$$n = \frac{c}{v},$$

hvor $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s er lysets fart i vacuum, og v er lysets fart i det pågældende materiale.

Tabel 3.3 viser brydningsindeks for nogle materialer.

Hvis man kender brydningsindeks for et materiale, kan man beregne lysets fart i materialet som

$$v = \frac{c}{n}.$$

For brydningsforholdet mellem to materialer gælder der derfor

$$n_{1,2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Altså kan brydningsloven også skrives på denne måde:

Brydningsloven for lys

Ved overgangen fra et materiale med brydningsindeks n_1 til et materiale med brydningsindeks n_2 er

$$\frac{\sin(i)}{\sin(b)} = \frac{n_2}{n_1},$$

hvor i er indfaldsvinklen, og b er brydningsvinklen.

Tabel 3.3: Brydningsindeks n for forskellige materialer.

Materiale	n
Atm. luft	1,00
Vand	1,34
Laboratorieglas	1,474
Rudeglas	1,510
Polystyren	1,59
PVC	1,52

Eksempel 3.5

Hvis en lysstråle bevæger sig fra luft til vand med en indfaldsvinkel på 40° , er $n_1 = 1,00$ og $n_2 = 1,34$, dvs.

$$\frac{\sin(40^\circ)}{\sin(b)} = \frac{1,34}{1,00},$$

så

$$\sin(b) = \frac{\sin(40^\circ)}{1,34} = 0,480.$$

Brydningsvinklen er derfor

$$b = \sin^{-1}(0,480) = 28,7^\circ.$$

Øvelse 3.6

En lysstråle kommer fra atmosfærisk luft (med brydningsindeks 1,00) til glas med brydningsindeks 1,34. Indfaldsvinklen er 31° .

- a) Beregn brydningsvinklen.

Øvelse 3.7

En lysstråle bevæger sig fra et materiale med brydningsindeks 1,34 til et materiale med brydningsindeks 1,55. Brydningsvinklen måles til 47° .

- a) Bestem indfaldsvinklen.

Øvelse 3.8

En lysstråle går fra et materiale til et andet. Indfaldsvinklen er 26° og brydningsvinklen er 34° . Det første materiale har brydningsindeks 1,58.

- a) Hvad er brydningsindekset af det andet materiale?

3-2 Totalrefleksion

Ser man på brydningsloven

$$\frac{\sin(i)}{\sin(b)} = \frac{v_1}{v_2},$$

kan man se at når bølgens hastighed er højere i materiale 2 end i materiale 1, bliver brydningsvinklen større end indfaldsvinklen. Det betyder at hvis indfaldsvinklen bliver tilstrækkeligt stor, kan bølgen slet ikke passere ind i det andet materiale. Hele bølgen bliver således reflekteret. Dette fænomen kaldes *totalrefleksion*.

Kigger man på brydningsloven, kan man isolere vinklen b :

$$\frac{\sin(i)}{\sin(b)} = \frac{v_1}{v_2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(b) = \frac{v_2}{v_1} \cdot \sin(i).$$

Idet $\sin(b)$ højst kan give 1, har denne ligning kun løsninger for

$$\frac{v_2}{v_1} \cdot \sin(i) \leq 1.$$

Den maksimale indfaldsvinkel $i_{\text{grænse}}$ (kaldet *grænsevinklen*) der stadig tillader bølgen at passere fra det ene materiale ind i det andet, vil så opfylde

$$\frac{v_2}{v_1} \cdot \sin(i_{\text{grænse}}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad i_{\text{grænse}} = \sin^{-1}\left(\frac{v_1}{v_2}\right).$$

Denne beregning kan kun lade sig gøre hvis $\frac{v_1}{v_2} \leq 1$, dvs. hvis $v_2 \geq v_1$. I de tilfælde hvor $v_2 \geq v_1$, er det altså sådan at hvis indfaldsvinklen i er større end grænsevinklen $i_{\text{grænse}}$, så kan bølgen ikke passere fra det ene materiale ind i det andet. Derfor forekommer der totalrefleksion.

Totalrefleksion

Hvis en bølge har hastigheden v_1 i materiale 1 og $v_2 > v_1$ i materiale 2, vil der forekomme totalrefleksion når indfaldsvinklen er større end grænsevinklen

$$i_{\text{grænse}} = \sin^{-1}\left(\frac{v_1}{v_2}\right).$$

Eksempel 3.9

Lydens hastighed i luft er 340 m/s, og i vand er den 1480 m/s. Grænsevinklen for totalrefleksion når lydbølger går fra luft til vand er derfor

$$i_{\text{grænse}} = \sin^{-1}\left(\frac{340 \text{ m/s}}{1480 \text{ m/s}}\right) = 13,3^\circ.$$

Denne grænsevinkel er ret lille; det betyder at stort set alle lydbølger vil blive reflekteret fra en vandoverflade. De eneste lydbølger der passerer overgangen er dem hvor indfaldsvinklen er under $13,3^\circ$.

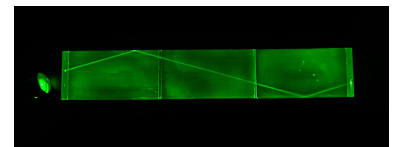
Figur 3.4 viser hvordan totalrefleksion ser ud i praksis. Ved overgangen mellem plexiglasklodserne og luften er indfaldsvinklen så stor at der er totalrefleksion, dvs. laserlyset holdes inde i plexiglasklodserne.

Det er dette princip man udnytter i lyslederkabler, se figur 3.5. Kernen af kablet består af et plastikmateriale med et højt brydningsindeks; denne kerne er indhyllet i et materiale med lavt brydningsindeks. Herved vil lys der sendes ind i kablet, forblive inde i kablet pga. totalrefleksion.

Øvelse 3.10

Bestem grænsevinklerne for lys der bevæger sig fra

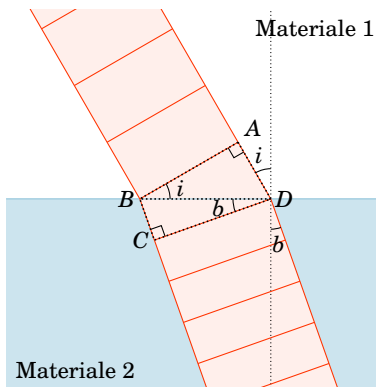
- vand til luft,
- PVC til luft, og
- PVC til vand.



Figur 3.4: En grøn laser sendes ind i en række plexiglasklodser. Ved overgangen mellem plexiglas og luft er der totalrefleksion af lyset.



Figur 3.5: Lyslederkabel. Det venstre stik på kablet bliver belyst med en rød laser; lyset bevæger sig gennem kablet og ud ad det højre stik.[16]



Figur 3.6: En bølge bevæger sig fra ét materiale ind i et andet.

3-3 Udledning af brydningsloven

Figur 3.6 viser hvad der sker med en bølge når den bevæger sig fra ét materiale ind i et andet. Frekvensen af bølgen ændrer sig ikke, men farten ændrer sig. Ifølge bølgeligningen

$$v = \lambda \cdot f$$

vil bølgelængden λ derfor ændre sig.

Figuren viser en situation hvor bølgens fart bliver mindre ved overgangen. Derved bliver bølgelængden også mindre. På figuren er afstanden $|AD| = \lambda_1$, dvs. bølgelængden i materiale 1. På samme måde er $|BC| = \lambda_2$, idet bølgen bevæger sig et kortere stykke på den samme tid i materiale 2, netop fordi farten er mindre.

Indfaldsvinklen og brydningsvinklen kan genfindes i de optegnede trekanter ABD og BCD . Heraf følger ved trigonometriske beregninger at

$$\sin(i) = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{\lambda_1}{|BD|} \quad \text{og} \quad \sin(b) = \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{\lambda_2}{|BD|}.$$

Af dette følger så at

$$\frac{\sin(i)}{\sin(b)} = \frac{\frac{\lambda_1}{|BD|}}{\frac{\lambda_2}{|BD|}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1 \cdot f}{\lambda_2 \cdot f} = \frac{v_1}{v_2},$$

hvilket netop er brydningsloven.

Lyd

Lydbølger udbreder sig ved at luftens molekyler sættes i svingninger. Molekylerne svinger frem og tilbage i bølgens udbredelsesretning, og der dannes herved en længdebølge der består af skiftevist højt og lavt tryk. Lyd udbreder sig med forskellig fart i forskellige materialer, se tabel 4.1.

Som man kan se af tabellen, afhænger lydens fart også af temperaturen. For lydens fart i atmosfærisk luft gælder den følgende sammenhæng:[10]

Lydens fart i luft

Lydens fart i tør luft ved standardtryk er

$$v_{\text{lyd}} = 331 \text{ m/s} \cdot \sqrt{\frac{T}{273,15 \text{ K}}},$$

hvor T er luftens temperatur i kelvin.

Tabel 4.1: Lydens fart v_{lyd} i forskellige materialer.

Materiale	$v_{\text{lyd}} / \text{m/s}$
<i>Gasser</i>	
Atm. luft (0°C)	331,46
Atm. luft (20°C)	343,37
CO ₂	259
Helium	965
<i>Væsker</i>	
Vand (0°C)	1401,0
Vand (20°C)	1483,2
Ethanol	1160

Eksempel 4.1

En dag hvor temperaturen er 9°C, er

$$T = (9 + 273,15) \text{ K} = 282,15 \text{ K},$$

og lydens hastighed er så

$$v_{\text{lyd}} = 331 \text{ m/s} \cdot \sqrt{\frac{282,15 \text{ K}}{273,15 \text{ K}}} = 336 \text{ m/s}.$$

Øvelse 4.2

Bestem lydens hastighed på en varm sommerdag hvor temperaturen er 26°C og på en kold vinterdag hvor lydens hastighed er −12°C.

Øvelse 4.3

Hvad er temperaturen i et lokale når lydens hastighed måles til 345 m/s?

Hvordan en lyd opfattes, afhænger bl.a. af frekvensen. Lyde med lav frekvens svarer til dybe toner, mens lydbøger med høj frekvens svarer til lyse toner. Det menneskelige øre kan opfange lydbølger hvis frekvensen ligger mellem ca. 20 Hz og 20 kHz. Lyde med frekvenser under 20 Hz kaldes *infralyd*, og lyde med frekvenser over 20 kHz kaldes *ultralyd*; disse lyde kan mennesker ikke høre.

Andre dyr har dog andre høreområder, f.eks. kan hunde høre lyde med frekvenser mellem 67 Hz og 45 kHz, og flagermus kan høre lyde med frekvenser mellem 2 kHz og 110 kHz.[8] Hunde og flagermus kan altså høre ultralyd, men de kan ikke høre helt så dybe toner som mennesker – faktisk vil meget af menneskers tale ligge under flagermus' høreområde (se figur 4.3).

Øvelse 4.4

Flagermus lever af insekter, og de fanger deres bytte ved ekkolokation, dvs. de udsender lyde og bestemmer hvor byttet er, baseret på ekkot. Regn i det følgende med at lydens hastighed er 343 m/s.

- a) Hvis et insekt befinder sig 52 cm fra en flagermus, hvor lang tid går der så fra flagermusen udsender lyden og til at ekkot kommer tilbage?

En flagermus kan høre lyde med frekvenser mellem 2 kHz og 110 kHz.

- b) Bestem bølgelængden for den dybeste og højeste lyd en flagermus kan høre.

Hvis man skal kunne bestemme retningen til et objekt vha. refleksion af lyd, skal bølgelængden af den reflekterede lydbølge være af nogenlunde samme størrelse som objektet (eller mindre).

- c) Vurdér hvor små insekter flagermus kan fange hvis de skriger med en frekvens på 60 kHz.

4-1 Lydstyrke

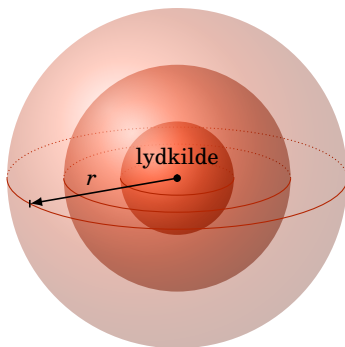
Bølger transporterer energi. Dvs. en lydbølge der bevæger sig afsted transporterer en bestemt mængde energi pr. tid. Bølgen har altså en bestemt effekt, P . Men idet lydbølger udbreder sig som ringbølger, vil denne effekt spredes over et større og større areal. Derfor vil en lyd altid høres højere jo tættere man er på lydkilden.

Det giver derfor mening at kigge på lydbølgens effekt pr. areal, denne størrelse kaldes *intensiteten*. Hvis lydbølgens bølgefront ligger på en kugleskal med radius r (se figur 4.2), finder man intensiteten ved at dividere effekten med arealet af denne kugleskal, dvs. intensiteten bliver

Intensiteten af en bølge

$$I = \frac{P}{4\pi r^2},$$

hvor P er bølgens effekt, og r er afstanden til lydkilden.



Figur 4.2: En lydbølge bevæger sig udad fra lydkilden som en sfærisk bølge.

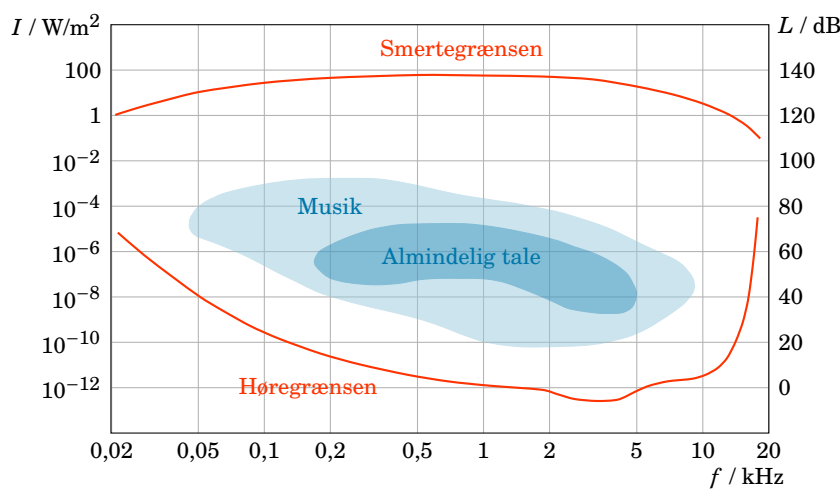
Eksempel 4.5

En højttaler spiller med en effekt på 10 W. I en afstand af 3,2 m

fra højttaleren er lydets intensitet

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{10 \text{ W}}{4\pi \cdot (3,2 \text{ m})^2} = 0,24 \text{ W/m}^2.$$

Intensiteten af en lydbølge afgør hvor høj lyden opfattes. Hvis intensiteten er meget lav, kan lyden slet ikke opfattes af det menneskelige øre. Figur 4.3 herunder viser høreområdet for det menneskelige øre. Som det fremgår af figuren er den laveste intensitet man kan opfatte, afhængig af lydets frekvens. Mennesker kan høre lyde med frekvenser mellem ca. 20 Hz og 20 kHz, men inden for dette frekvensområde er der en del forskel på hvor høj lydets intensitet skal være for at man kan høre den. En generel tommelfingerregel er dog at den laveste intensitet øret kan opfatte, er $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.



Figur 4.3: Høreområdet for det menneskelige øre. Lyde med en intensitet under høregrænsen kan ikke opfattes af det menneskelige øre.

På figurens højre side er lydstyrken angivet i enheden decibel (dB). Denne beregnes ud fra intensiteten vha. den følgende formel:

Lydstyrke

Lydstyrken i dB af en lydbølge er

$$L = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \text{ dB},$$

hvor I er intensiteten af lydbølgen, og $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

Eksempel 4.6

En lyd der lige nøjagtigt kan høres af det menneskelige øre har en lydstyrke på

$$L = 10 \cdot \log \left(\frac{10^{-12} \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} \right) \text{ dB} = 0 \text{ dB}.$$

Hvis intensiteten er 10 gange så høj, er $I = 10^{-11} \text{ W/m}^2$, så

$$L = 10 \cdot \log \left(\frac{10^{-11} \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} \right) \text{ dB} = 10 \text{ dB}.$$

Som det fremgår af figur 4.3 og eksemplet ovenfor bliver lydstyrken 10 dB større hver gang intensiteten af lyden bliver 10 gange så høj. Lydstyrken af nogle forskellige fænomener kan ses på figur 4.4 herunder.

Figur 4.4: Lydstyrken i decibel af forskellige fænomener.[2]

		L / dB	
		140	
		130	Jetfly, motorløb
	Smertegrænsen	120	Trykluftbor, kædesav
		110	Symfoniorkester, stiksav
		100	
		90	Lastbil
	Trafikstøj	80	
		70	Fjernsyn, græsslåmaskine
	Normal samtale	60	Gruppesamtale
	Baggrundsløyd i et hus	50	Regn, køleskab
		40	Stille musik
	Hvisken	30	
	Armbåndsur der tikker	20	
	Åndedrag, raslende blad	10	
		0	

Øvelse 4.7

Intensiteten af en bestemt lyd måles til $I = 5,3 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$.

- a) Bestem lydstyrken.

Øvelse 4.8

En kraftig maskine afgiver lyd med en lydstyrke på $L = 113 \text{ dB}$.

- a) Bestem lydens intensitet.

4-2 Stående bølger på strenge

Hvis man skal frembringe lyd, kan det f.eks. gøres vha. et musikinstrument. Der findes mange forskellige typer musikinstrumenter, men de kan alle grupperes efter nogle enkelte grundlæggende principper. I dette afsnit gennemgås princippet bag de såkaldte *strengeinstrumenter* der alle frembringer lyd ved at strenge sættes i svingninger.

Strengeinstrumenter består af en række strenge der er spændt fast i begge ender og en resonanskasse der kan forstærke lyden.¹ Strenge kan sættes i svingninger på forskellig måde, alt efter hvilket instrument det drejer sig om (se figur 4.5), men princippet i lydannelsen er det samme.

Når en streng sættes i svingninger, skabes der bølger der løber frem og tilbage på strengen mellem de to endepunkter. Der dannes bølger

¹Ved elektriske strengeinstrumenter bliver lyden i stedet samlet op af en mikrofon og forstærket elektronisk.



(a) Ukulele.[13]



(b) Klaver.[19]



(c) Violin.[21]

Figur 4.5: Forskellige strengeinstrumenter. På en ukulele knipses strengene, på et klaver slås de an med en lille hammer, og på en violin stryges strengene.

med alle tænkelige bølgelængder; de fleste af disse vil dog interferere destruktivt med hinanden. Men i lige præcis de tilfælde hvor snorens længde L er et helt antal halve bølgelængder, dvs. når

$$L = \frac{n}{2} \lambda, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

vil bølgerne interferere konstruktivt hvorved der dannes en stående bølge med knude i hver ende af strengen, se figur 4.6. Bølgen hvor $n = 1$ kaldes den 1. *partialsvingning*, bølgen hvor $n = 2$ kaldes den 2. *partialsvingning*, osv.

De stående bølger der dannes, når en streng sættes i svingninger, opfylder altså at

$$L = \frac{n}{2} \cdot \lambda = \frac{n}{2} \cdot \frac{v}{f},$$

hvor v er bølgerens hastighed på strengen, og f er frekvensen. Isolierer man f i denne ligning, finder man at frekvensen for den n 'te partialsvingning er

Stående bølger på strenge

$$f_n = \frac{v}{2L} \cdot n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

hvor v er bølgerens hastighed på strengen, og L er strengens længde.

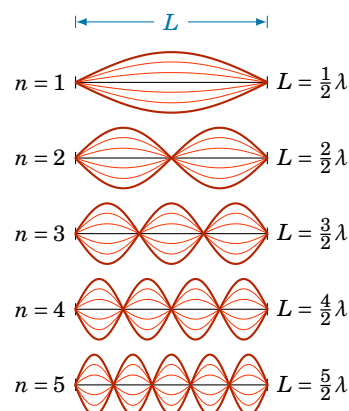
Eksempel 4.9

Hvis bølgerne på en 42 cm lang streng bevæger sig med en hastighed på 215 m/s, bliver frekvenserne for de første tre partialsvingninger

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{v}{2L} = \frac{215 \text{ m/s}}{2 \cdot 0,42 \text{ m}} = 256 \text{ Hz} \\ f_2 &= \frac{v}{2L} \cdot 2 = 256 \text{ Hz} \cdot 2 = 512 \text{ Hz} \\ f_3 &= \frac{v}{2L} \cdot 3 = 256 \text{ Hz} \cdot 3 = 768 \text{ Hz} . \end{aligned}$$

Når en streng sættes i svingninger, vil den sætte luften udenom i svingninger; herved dannes der en lydbølge. Den dannede lydbølge vil have samme frekvens som bølgerne på strengen.² Den laveste frekvens der dannes vil være

$$f_1 = \frac{v}{2L} \cdot 1 = \frac{v}{2L} . \quad (4.1)$$



Figur 4.6: Partialsvingninger for stående bølger på en streng med længde L .

²Men den vil ikke have den samme bølgelængde idet bølgerens hastighed på strengen og i luften ikke er den samme.

Den tone der har denne frekvens, kaldes *grundtonen*, og det er den der lyder kraftigst af alle de dannede toner. Tonen der dannes ved 2. partialsvingning, kaldes den 1. overtone; den tone der dannes ved 3. partialsvingning, kaldes den 2. overtone, osv.

Når en streng slås an på et strenginstrument, vil man både kunne høre grundtonen og overtonerne. Grundtonen vil have den største amplitude og er den der definerer hvilken tone instrumentet spiller. Overtonernes amplituder afhænger af instrumentets opbygning, og det er bl.a. forholdet mellem overtonernes amplituder der gør at de forskellige strenginstrumenter ikke lyder ens – altså at man kan høre forskel på f.eks. en guitar og en banjo.

Øvelse 4.10

På en streng med en længde på 37 cm er bølgehastigheden 183 m/s.

- a) Bestem frekvenserne for de første 4 partialsvingninger, altså for grundtonen og de første 3 overtoner.

Øvelse 4.11

En svingende streng med en længde på 57 cm har en grundtone på 243 Hz.

- a) Bestem bølgenes hastighed på strengen.

Tabel 4.7: Grundtonefrekvenserne for strengene på en guitar.[5]

Tone	f / Hz
E2	82,41
A2	110
D3	146,83
G3	196
H3	246,94
E4	329,63

Tabel 4.7 viser frekvenserne for grundtonerne for de seks strenge på en guitar. Som man kan se er frekvensen for den nederste streng 4 gange så høj som frekvensen for den øverste streng. Ifølge formel 4.1 er grundtonens frekvens omvendt proportional med længden, dvs. den øverste streng skulle så være 4 gange så lang som den nederste. Sådan ser en guitar jo ikke ud; alle strengene på en guitar er faktisk omtrent lige lange. Altså må der være andet der bestemmer grundtonen end blot længden af strengen.

Ifølge formel 4.1 er grundtonens frekvens faktisk proportional med farten af bølgerne på strengen. Dvs. hvis det ikke er længden af strengen der ændrer sig når frekvensen vokser, må det være farten af bølgerne. Ser man på en guitar, vil man opdage at strengene ikke alle er lige tykke. Bølgenes udbredelsesfart på en streng afhænger nemlig af tykkelsen af strengen og hvor hårdt den er spændt op. Man kan altså ændre tonerne fra strengen ved at gøre den tykkere eller stramme den op.

Det viser sig at farten af bølgerne på en streng er givet ved formelen[10]

Farten af bølger på en streng

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

hvor F er den kraft strengen er spændt op med, og μ er snorens masse pr. længde.³

Ifølge denne formel kan man altså øge farten af bølgerne på strengen ved at spænde den mere op. Det er det der sker når man stiller på skruerne på en guitar (eller et andet strengeinstrument) – når man strammer strengen, bliver bølgenes hastighed højere, og derved bliver tonen lysere. Eller man kan erstatte strengen af én der er tyndere idet μ så bliver mindre, og herved bliver v også større.

³Masse pr. længde af en snor måles typisk i g/m; det er altså et mål for hvor meget 1 m af snoren vejer. Tykkere snore har derfor en større masse pr. længde idet 1 m af en tyk snor vejer mere end 1 m af en tynd snor.

Eksempel 4.12

En guitarstreng er 65 cm lang og spændt op med en kraft på 85 N. Snorens masse pr. længde er 1,31 g/m.

Man har altså

$$L = 65 \text{ cm}, \quad F = 85 \text{ N} \quad \text{og} \quad \mu = 1,31 \text{ g/m}.$$

Derfor bliver bølgenes hastighed på strengen

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{85 \text{ N}}{1,31 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}}} = 255 \text{ m/s},$$

og grundtonens frekvens er så

$$f_1 = \frac{2v}{L} = \frac{255 \text{ m/s}}{2 \cdot 0,65 \text{ m}} = 196 \text{ Hz}.$$

Øvelse 4.13

En streng er 45 cm lang og spændt op med en kraft på 76 N. Snoren vejer 1,06 g/m.

- Bestem bølgehastigheden på strengen.
- Hvad er grundtonens frekvens?

Øvelse 4.14

En 53 cm lang streng der vejer 1,21 g/m har en grundtone på 276 Hz.

- Hvilken kraft er snoren spændt op med?
- Hvor meget skal kraften øges hvis tonen skal ændres til 295 Hz?

4-3 Stående bølger i rør

I dette afsnit gennemgås princippet bag de såkaldte blæseinstrumenter. Det er musikinstrumenter der giver lyd ved at luften i et rør sættes i svingninger. Røret kan enten være åbent i begge ender eller lukket i den ene ende – et såkaldt *halvåbent* rør. Figur 4.8 viser nogle eksempler på blæseinstrumenter.

Åbne rør

Hvis et rør er åbent i begge ender, kan luften svinge frit i enderne af røret. Der dannes derfor en stående bølge med svingningsbug i hver

Figur 4.8: Forskellige blæseinstrumenter. En blokfløjte fungerer som et åbent rør, en klarinet som et halvåbent, og i et kirkeorgel findes der både åbne og halvåbne rør.



(a) Blokfløjte.[23]

(b) Klarinet.[15]

(c) Orgel.[12]

ende af røret.

De første 5 partialsvingninger i et åbent rør kan ses på figur 4.9. Det ses tydeligt at sammenhængen mellem bølgelængden af svingningen og længden af røret er præcis den samme som for svingende strenge. Man kan derfor uden videre konkludere at for åbne rør er frekvensen af partialsvingningerne givet ved formlen

Stående bølger i åbne rør

$$f_n = \frac{2v_{\text{lyd}}}{L} \cdot n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

hvor v_{lyd} er lydens hastighed i luft, og L er rørets længde.

Det er dog her værd at bemærke at den hastighed der indgår i formelen, er lydens hastighed i luft – i modsætning til formelen for svingende strenge hvor det var bølgens hastighed på strengen. Det skyldes at det i dette tilfælde rent faktisk er luft der svinger inde i røret.

Øvelse 4.15

En fløjte er konstrueret som et åbent rør. Fløjten er 14 cm lang.

- a) Bestem frekvensen af den første partialsvingning, dvs. grundtonen.

Øvelse 4.16

En orgelpibe der er konstrueret som et åbent rør, er 1,53 m lang. Orglet står i en stor kirke.

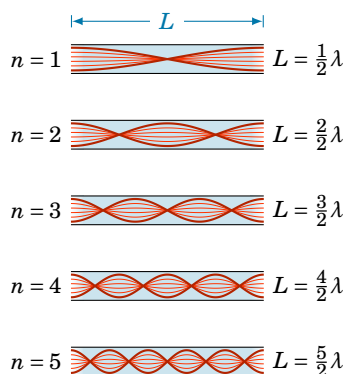
- a) Hvad er orgelpibens grundtone hvis temperaturen i kirken er 15°C ?
b) Hvor meget vokser grundtonens frekvens hvis temperaturen stiger til 20°C ?

Halvåbne rør

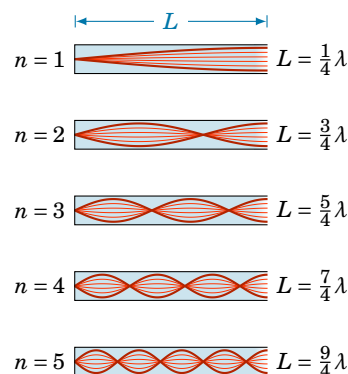
Hvis røret er halvåbent – dvs. lukket i den ene ende – kan luften ikke svinge frit i den lukkede ende. Derfor må svingningerne have svingningsbug i den åbne ende og knudepunkt i den lukkede. Partialsvingningerne kommer derfor til at se ud som på figur 4.10.

Som det fremgår af figuren, vil der dannes stående bølger hvor længden af røret er

$$L = \frac{1}{4}\lambda, \quad L = \frac{3}{4}\lambda, \quad L = \frac{5}{4}\lambda, \quad \text{osv.}$$



Figur 4.9: Partialsvingninger for stående bølger i et åbent rør med længde L .



Figur 4.10: Partialsvingninger for stående bølger i et halvåbent rør med længde L .

hvilket kan skrives som⁴

$$L = \frac{2n-1}{4} \lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

For stående bølger i et halvåbent rør har man derfor at sammenhængen mellem længden af røret og frekvensen af tonerne er

$$L = \frac{2n-1}{4} \cdot \lambda = \frac{2n-1}{4} \cdot \frac{v}{f},$$

så frekvensen af den n 'te partialsvingning bliver

Stående bølger i halvåbne rør

$$f_n = \frac{v_{\text{lyd}}}{4L} \cdot (2n-1), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

hvor v_{lyd} er lydens hastighed i luft, og L er rørets længde.

I halvåbne rør vil grundtonen derfor have frekvensen

$$f_1 = \frac{v_{\text{lyd}}}{4L} \cdot (2 \cdot 1 - 1) = \frac{v_{\text{lyd}}}{4L}. \quad (4.2)$$

Eksempel 4.17

Ved en temperatur på 20°C er lydens hastighed 343 m/s. Et halvåbent rør med en længde på 57,2 cm vil så have en grundtone med en frekvens på

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343 \text{ m/s}}{4 \cdot 0,572 \text{ m}} = 150 \text{ Hz}.$$

Øvelse 4.18

Et halvåbent rør har en længde på 61 cm. Lydens hastighed er 343 m/s.

- a) Bestem frekvenserne for de første 4 partialsvingninger.

Øvelse 4.19

Et halvåbent rør med en længde på 49 cm spiller en grundtone med frekvensen 173 Hz.

- a) Hvad er temperaturen i lokalet?

Øvelse 4.20

I luft hvor lydens hastighed er 343 m/s, har et bestemt halvåbent rør en grundtone på 440 Hz.

- a) Hvad bliver grundtonens frekvens hvis røret fyldes med helium hvor lydens hastighed er 965 m/s?

Øvelse 4.21

Når man fylder en kande med vand, kan man høre når kanden er ved at være fuld.

- a) Hvorfor kan man det?

⁴Bemærk at $2n-1$ netop giver de ulige tal 1, 3, 5, ... når $n = 1, 2, 3, \dots$

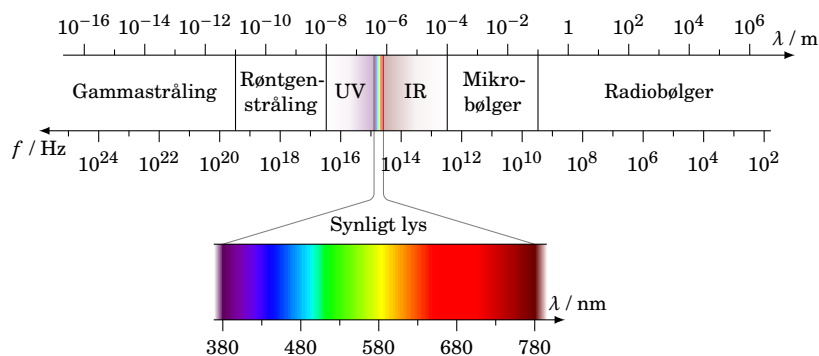
Lys

Lys er, som tidligere nævnt, en elektromagnetisk bølge. I vacuum bevæger denne bølge sig med farten

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 3,00\text{e}8 \text{ m/s}.$$

Når man taler om lys i fysik mener man i virkeligheden alle elektromagnetiske bølger og ikke kun dem vi mennesker kan se. Det lys mennesker kan se, kalder man så *synligt lys*.

De forskellige bølgelængder af lys opsummeres i det *elektromagnetiske spektrum* (se figur 5.1). Som man kan se dækker det elektromagnetiske spektrum over mange størrelsesordener af bølgelængder, og kun en meget lille del af disse (bølgelængder mellem 380 nm og 780 nm) er synligt lys.



Figur 5.1: Det elektromagnetiske spektrum.

Som man kan se, svarer den ene ende af det synlige spektrum (380 nm) til violet lys; lys der har bølgelængder under 380 nm kaldes *ultraviolet* lys (UV). I den anden ende af det synlige spektrum finder man rødt lys med bølgelængder op til 780 nm; lys med bølgelængder over 780 nm kaldes *infrarødt* lys (IR). Hvidt lys findes ikke på spektret idet hvidt lys er en blanding af alle de synlige bølgelængder.

5-1 Fotoner og energi

Det viser sig at lys er et ret kompliceret fænomen. Christiaan Huygens mente at lys er en længdebølge (analogt med lyd), mens Isaac Newton mente at lys er en strøm af partikler. Senere viste Thomas Young at lys er en tværbølge, og James Clerk Maxwell formodede at lys var en elektromagnetisk bølge, hvilket Heinrich Hertz bekræftede i 1886.[7]

Man skulle tro at det så var afgjort at lys var en bølge, men resultatet af mange eksperimenter viste at lys også kunne opføre sig som en

strøm af partikler. I en artikel i 1905 beskrev Albert Einstein hvordan lys *både* var en bølge og bestod af partikler; om lys er det ene eller det andet afhænger af hvilket eksperiment man udfører.[7]

De partikler lyset består af, kaldes *fotoner*.¹ Energien af en enkelt foton afhænger af lysets frekvens, således at energien af en foton er

Energien af en foton

$$E = h \cdot f ,$$

hvor f er lysets frekvens og $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ er Plancks konstant.

Bølgeligningen for lys er

$$c = \lambda \cdot f .$$

Heraf fås at energien af en foton også kan beregnes som

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda} .$$

Energien af en foton bliver altså mindre, jo større bølgelængden er. Det betyder at på figur 5.1 aftager energien når man går fra venstre mod højre. Radiobølger indeholder således langt mindre energi end gammastråling.

Eksempel 5.1

Fotonenergien af UV-stråling med en bølgelængde på 200 nm er

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{200 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 9,95 \cdot 10^{-19} \text{ J} .$$

Som man kan se er energien af en enkelt foton ikke ret høj.

Øvelse 5.2

Bestem fotonenergien for grønt lys med en bølgelængde på 520 nm.

Øvelse 5.3

En laser udsender blåt lys med en frekvens på 430 nm.

- Hvad er lysets frekvens?
- Hvad er fotonenergien?

5-2 Optisk gitter

Et optisk gitter er et gitter hvor bredden af spalterne er så lille at den er på størrelse med lysets bølgelængde. Sender man lys gennem et sådant gitter vil det afbøjes i alle retninger, men kun i enkelte retninger vil der være konstruktiv interferens, og man får således et karakteristisk *interferensmønster*. Figur 5.2 viser en rød laser der sendes gennem et

¹Ordet *foton* er afledt af det græske *phos* »lys«.

optisk gitter med 300 linjer pr. mm. Efter passagen af gitteret ses et interferensmønster.

Man kan ikke se på det optiske gitter på figuren at det er et gitter. Dette skyldes at linjerne i gitteret sidder tættere end det menneskelige øje kan se. Når der er 300 linjer pr. mm, kan man finde afstanden mellem de enkelte linjer ved at dividere 1 mm med 300:

$$d = \frac{1 \text{ mm}}{300} = 0,00333 \text{ mm} = 3,33 \mu\text{m}.$$

Linjerne i et optisk gitter sidder altså utrolig tæt. Tallet d (afstanden mellem linjerne i gitteret) kaldes *gitterkonstanten*. Hvis man øger antallet af linjer i gitteret bliver dette tal mindre (idet linjerne kommer til at sidde tættere hvis der skal være flere af dem pr. mm).

Som man kan se på billedet på figur 5.2, er der én prik der hvor laseren rammer gitteret, men efter passagen af gitteret er der en hel række prikker. Figur 5.3 viser en skitse af situationen. Det afbøjede lys kaldes hhv. 1. orden, 2. orden, 3. orden, osv. Det viser sig at sammenhængen mellem afbøjningsvinklen θ_n og ordenen n er givet ved denne formel:

Gitterligningen

Når lys sendes gennem et optisk gitter, vil afbøjningsvinklerne θ_n opfylde

$$\sin(\theta_n) = \frac{n \cdot \lambda}{d}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

hvor λ er lysets bølgelængde, d er gitterkonstanten, og n er ordenen.

Eksempel 5.4

Et optisk gitter med 100 linjer pr. mm har en gitterkonstant på

$$d = \frac{1 \text{ mm}}{100} = 0,01 \text{ mm} = 10\,000 \text{ nm}.$$

Hvis en grøn laser med en bølgelængde på 523 nm sendes gennem dette gitter, vil det afbøjede lys opfylde gitterligningen

$$\sin(\theta_n) = \frac{n \cdot 523 \text{ nm}}{10\,000 \text{ nm}} = 0,0523 \cdot n.$$

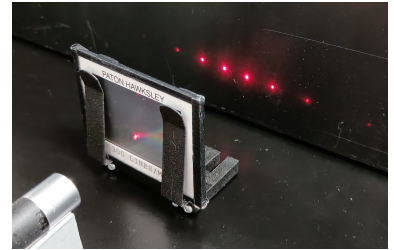
De første 3 ordner har derfor afbøjningsvinklerne

$$\theta_1 = \sin^{-1}(0,0523 \cdot 1) = 2,98^\circ$$

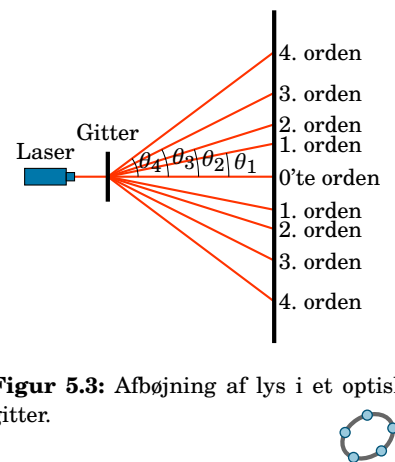
$$\theta_2 = \sin^{-1}(0,0523 \cdot 2) = 5,96^\circ$$

$$\theta_3 = \sin^{-1}(0,0523 \cdot 3) = 8,94^\circ$$

Brøken på højre side af gitterligningen er proportional med lysets bølgelængde. Derfor vil afbøjningsvinklerne bliver mindre når bølgelængden af lyset er mindre – således vil rødt lys afbøjes mere end blåt lys.

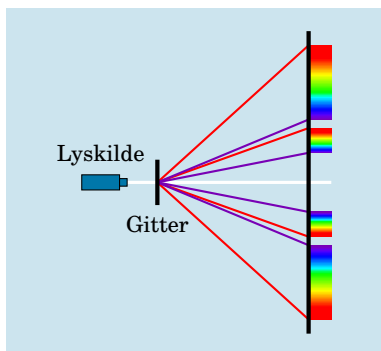


Figur 5.2: Lyset fra en rød laser sendes gennem et optisk gitter.



Figur 5.3: Afbøjning af lys i et optisk gitter.





Figur 5.4: Hvidt lys der sendes gennem et optisk gitter bliver splittet op i et spektrum.

Sender man hvidt lys der består af alle bølgelængder af synligt lys, gennem et optisk gitter vil man derfor opleve at de enkelte bølgelængder afbøjes med forskellige vinkler, og lyset derfor bliver splittet op i et spektrum (se figur 5.4). Undtagelsen herfra er 0'te orden hvor afbøjningsvinklen er 0° for alle bølgelængder. Den midterste plet vil derfor stadig være hvidt lys, mens de andre ordner er spektrer.

Øvelse 5.5

En rød laser med en bølgelængde på 623 nm sendes gennem et optisk gitter med 300 linjer pr. mm.

- a) Bestem afbøjningsvinklerne for 1., 2. og 3. orden.

Øvelse 5.6

En blå laser med en bølgelængde på 463 nm sendes gennem et optisk gitter. Afbøjningsvinklen for 1. orden måles til $6,93^\circ$.

- a) Bestem gitterkonstanten for dette gitter.
b) Hvor mange linjer har gitteret pr. mm?

Maksimal orden

Ser man nærmere på gitterligningen, vil man opdage at lys ikke kan afbøjes til en vilkårligt stor orden. Ifølge gitterligningen er

$$\sin(\theta_n) = \frac{n \cdot \lambda}{d},$$

og idet $\sin(\theta_n) \leq 1$, kan denne ligning kun løses hvis n er tilstrækkeligt lille til at

$$\frac{n \cdot \lambda}{d} \leq 1,$$

hvilket kan omskrives til en formel for den maksimale orden n_{maks} :

Maksimal orden

Den maksimale orden for lys der afbøjes i et optisk gitter, er det største hele tal n_{maks} der opfylder

$$n_{\text{maks}} \leq \frac{d}{\lambda},$$

hvor d er gitterkonstanten, og λ er lysets bølgelængde.

Eksempel 5.7

En rød laser med bølgelængden $\lambda = 652$ nm sendes gennem et optisk gitter med 300 linjer pr. mm. Gitterkonstanten er i dette tilfælde

$$d = \frac{1}{300 \text{ mm}^{-1}} = 0,003333 \text{ mm} = 3333 \text{ nm}.$$

Man kan så beregne

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{3333 \text{ nm}}{652 \text{ nm}} = 5,11.$$

Herved kan man konstatere at den røde laser maksimalt kan afbøjes til 5. orden.

Det er i øvrigt værd at bemærke at hvis $\frac{d}{\lambda} < 1$, er den maksimale orden 0, dvs. hvis gitterkonstanten er mindre end lysets bølgelængde så forekommer der slet ikke afbøjning af lyset – i dette tilfælde vil langt det meste af lyset faktisk reflekteres og slet ikke komme gennem gitteret.

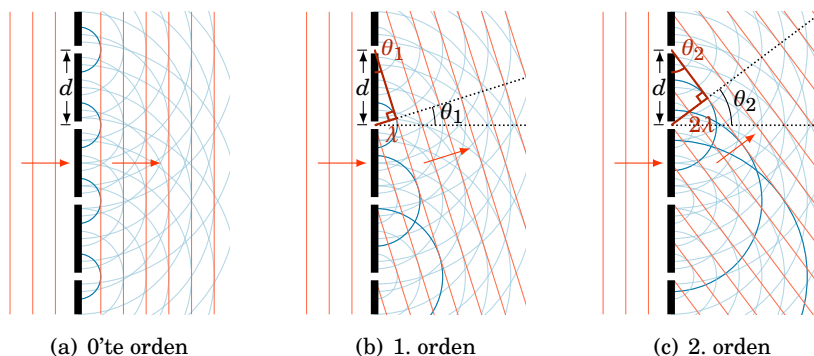
Øvelse 5.8

En grøn laser med en bølgelængde på 532 nm sendes igennem et optisk gitter med 300 linjer pr. mm.

- Bestem gitterkonstanten.
- Bestem den maksimale orden for afbøjningen af lyset.

5-3 Udledning af gitterligningen

Når en lysbølge sendes gennem et optisk gitter, vil bølgen udbrede sig som ringbølger fra hver eneste spalte i gitteret efter passagen. Dette er illustreret på figur 5.5. På figuren er nogle af ringbølgernes bølgefronter tegnet kraftigere op, således at man kan se hvordan lysbølgen udbreder sig i retningen af den indhyldningskurve der tangerer ringbølgerne.



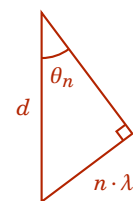
Figur 5.5: Lys der passerer et optisk gitter vil udbrede sig som ringbølger fra hver spalte. Ifølge Huygens' princip vil bølgefronterne svare til indhyldningskurverne for disse ringbølger. Pilene på figurerne viser lysbølgens retning.



Som man kan se på figuren, svarer afbøjningerne af 0'te, 1. og 2. orden til at ringbølgen fra en spalte er forskudt med hhv. 0, 1 og 2 bølgelængder i forhold til bølgen fra den foregående spalte. Den lille trekant der er markeret på figurerne for 1. og 2. orden, kan man generalisere til trekanten på figur 5.6. I en retvinklet trekant er sinus til en vinkel lig med forholdet mellem den modstående katete og hypotenusen; ud fra trekanten på figur 5.6 finder man derfor at

$$\sin(\theta_n) = \frac{n \cdot \lambda}{d},$$

hvilket netop er gitterligningen.



Figur 5.6: Denne trekant er en generalisering af de to trekanten på figur 5.5.

Dopplereffekt

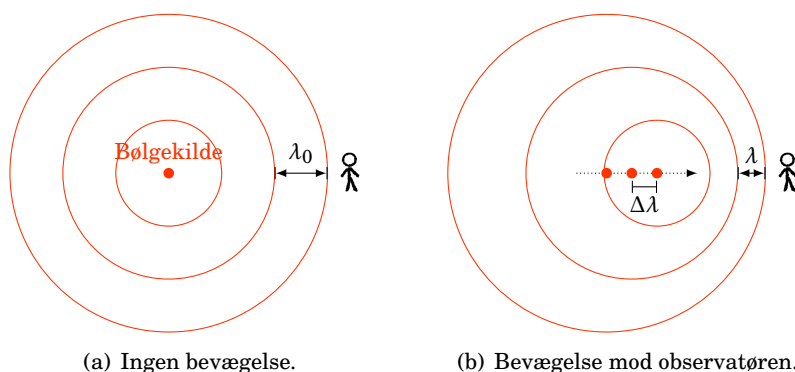
Hvis man står på gaden mens en ambulance kører forbi, vil man opleve at lyden fra udrykningen har en lysere tone når ambulancen kommer henimod en, end når den er på vej væk. Det samme gør sig gældende ved motorløb; en racerbil på vej imod en tilskuer har en anden lyd end en racerbil på vej væk.

Denne forskel skyldes den såkaldte *dopplereffekt*, opkaldt efter den østrigske fysiker Christian Doppler (1803–1853) der første gang beskrev effekten i 1842.[3] Dopplereffekten er den effekt der gør, at en observatør vil observere en anden bølgelængde end den der udsendes, hvis bølgekilden er i bevægelse i forhold til observatøren.

På figur 6.2 ses to situationer. I den første situation står bølgekilden stille i forhold til observatøren. Her modtages en bølge med bølgelængden λ_0 . I den anden situation er bølgekilden på vej hen mod observatøren. Det medfører at bølgetoppene vil være tættere på hinanden i forhold til observatøren idet bølgekilden har nået at bevæge sig stykket $\Delta\lambda$ før en ny bølgetop udsendes. Der modtages derfor en bølge med en anden bølgelængde, λ .



Figur 6.1: Christian Doppler.[22]



Figur 6.2: Hvis en bølgekilde er i bevægelse i forhold til observatøren, så vil den observerede bølgelængde λ ændre sig i forhold til den oprindelige bølgelængde λ_0 .



Den tid der går mellem udsendelsen af to bølgetoppe er perioden

$$T = \frac{1}{f_0}.$$

hvor f_0 er bølgens observerede frekvens når bølgekilden er i hvile. Ifølge bølgeligningen er $v = \lambda_0 \cdot f_0$, dvs.

$$T = \frac{1}{\frac{v}{\lambda_0}} = \frac{\lambda_0}{v},$$

hvor λ_0 er bølgens oprindelige bølgelængde, og v er bølgenes udbredelseshastighed. Hvis bølgekilden bevæger sig hen mod observatøren med

hastigheden u så vil kilden på tiden T bevæge sig stykket

$$\Delta\lambda = u \cdot T = u \cdot \frac{\lambda_0}{v} = \frac{u}{v} \cdot \lambda_0.$$

Afstanden mellem bølgetoppene ændrer sig altså med denne størrelse; dvs. sammenhængen mellem den udsendte bølgelængde λ_0 og den modtagne λ er

$$\lambda = \lambda_0 - \Delta\lambda = \lambda_0 - \frac{u}{v} \cdot \lambda_0 = \left(1 - \frac{u}{v}\right) \cdot \lambda_0.$$

Hvis bølgekilden i stedet er på vej væk fra observatøren vil bølgelængden øges med $\Delta\lambda$; her skal man derfor regne hastigheden u med negativt fortegn.

I nogle situationer er man dog mere interesseret i frekvensen end i bølgelængden. Men frekvensen kan beregnes ud fra bølgeligningen:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\left(1 - \frac{u}{v}\right) \cdot \lambda_0} = \frac{1}{\left(1 - \frac{u}{v}\right)} \cdot f_0 = \frac{v}{v - u} \cdot f_0.$$

Dopplereffekt

Hvis en bølgekilde er i bevægelse med hastigheden u i forhold til en observatør, vil den observerede bølgelængde og frekvens være

$$\lambda = \left(1 - \frac{u}{v}\right) \cdot \lambda_0 \quad \text{og} \quad f = \frac{v}{v - u} \cdot f_0,$$

hvor λ_0 er bølgelængden og f_0 er frekvensen for en stillestående bølgekilde, og u regnes med positivt fortegn når kilden er på vej henimod observatøren og negativt fortegn når den er på vej væk.

Eksempel 6.1

En politibil kommer kørende for fuld udrykning med en fart på 150 km/h. Politibilens sirene udsender en lyd med frekvensen 1720 Hz.

Politibilens fart er

$$u = 150 \text{ km/h} = 150 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 41,7 \text{ m/s}.$$

Når politibilen er på vej henimod en observatør, vil vedkommende derfor høre frekvensen

$$f = \frac{v}{v - u} \cdot f_0 = \frac{343 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 41,7 \text{ m/s}} \cdot 1720 \text{ Hz} = 1958 \text{ Hz},$$

og når politibilen er på vej væk fra observatøren, vil vedkommende modtage lyd med frekvensen

$$f = \frac{v}{v + u} \cdot f_0 = \frac{343 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} + 41,7 \text{ m/s}} \cdot 1720 \text{ Hz} = 1534 \text{ Hz}.$$

Øvelse 6.2

En stemmegaffel der udsender en lyd med frekvensen 450 Hz, bevæger sig væk fra en observatør med farten 10 m/s. Lydens fart er 343 m/s.

- a) Bestem den observerede bølgelængde.
- b) Bestem den observerede frekvens.

Øvelse 6.3

Et lyntog nærmer sig en station. Et togfløjt med frekvensen 435 Hz høres som 510 Hz af en person på perronen.

- a) Bestem farten af toget når lydens fart er 340 m/s.

Øvelse 6.4

Udrykningshornet i en ambulance har frekvensen 1530 Hz. En ambulance kommer kørende med 120 km/h.

- a) Beregn frekvensen af lyden når ambulancen nærmer sig, og når den fjerner sig.
- b) Beregn ambulancens fart hvis ændringen i frekvens er 170 Hz.

Øvelse 6.5

Hvor hurtigt skal man bevæge sig henimod en lyskilde der udsender rødt lys med bølgelængden 620 nm, hvis lyset skal observeres som grønt lys med en bølgelængde på 550 nm?

Bibliografi

- [1] Erik Strandgaard Andersen, Paul Jespersgaard og Ove Grønbæk Østergaard, red. *Databog fysik kemi*. 11. udg. F & K forlaget, 2012.
- [2] *Geräusche in Dezibel: Vom Ticken der Uhr bis zum Presslufthammer*. Die Welt. 14. aug. 2004. URL: <https://www.welt.de/print-welt/article334313/Vom-Ticken-der-Uhr-bis-zum-Presslufthammer.html> (bes. 14.05.2022).
- [3] *Lebenslauf Christian Andreas Doppler (1803-1853)*. Christian Doppler Fonds. URL: <https://www.christian-doppler.net/lebenslauf/> (bes. 18.05.2022).
- [4] Jesper Lützen. »Heinrich Rudolf Hertz«. I: *Den Store Danske* på *lex.dk*. 7. maj 2020. URL: https://denstoredanske.lex.dk/Anders_Celsius (bes. 08.05.2022).
- [5] Peter Mitchell. *What Are the Guitar String Frequencies? Explanation and Sound Samples*. URL: <https://soundadventurer.com/what-are-the-guitar-string-frequencies/> (bes. 16.05.2022).
- [6] Kurt Møller Pedersen. »Christiaan Huygens«. I: *Den Store Danske* på *lex.dk*. 7. maj 2020. URL: https://denstoredanske.lex.dk/Christiaan_Huygens (bes. 10.05.2022).
- [7] Wolfgang Rößler. *Eine kleine Nachtphysik – Große Ideen und ihre Entdecker*. 7. udg. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag, 2013.
- [8] George M. Strain. *Hearing frequency ranges for dogs & other species*. Louisiana State University. 27. apr. 2021. URL: <https://www.lsu.edu/deafness/HearingRange.html> (bes. 17.05.2022).
- [9] Eric W. Weisstein. »Trigonometric Addition Formulas«. I: *Mathworld – A Wolfram Web Resource*. URL: <https://mathworld.wolfram.com/TrigonometricAdditionFormulas.html> (bes. 11.05.2022).
- [10] Hugh D. Young og Roger A. Freedman. *Sears and Zemansky's university physics*. 13. udg. Addison-Wesley, 2012.

Billedkilder

- [11] Dominic Alves. *Thames Festival Finale Fireworks*. 11. sep. 2011. URL: <https://www.flickr.com/photos/64097751@N00/6149188264>.
- [12] Arnoldius. *Die Orgel im Dom in Bardowick bei Lüneburg*. 16. jul. 2009. URL: <https://commons.wikimedia.org/>.
- [13] Keith Cooper. *Mahalo U-320C Concert size Ukulele*. 15. feb. 2013. URL: <https://commons.wikimedia.org/>.

- [14] Patrick Feller. *Rain puddle, earlier this week, Humble, Texas*. 12. aug. 2009. URL: <https://www.flickr.com/photos/nakrnsn/3814916578>.
- [15] Petrus Glas. *Cundy Bettoney Silva Bet clarinet S5047*. 2. maj 2015. URL: <https://commons.wikimedia.org/>.
- [16] Hustvedt. *Patchkabel mit TOSLINK-Steckern, auf einer Steckerseite (links) mit einem Laser (rot) bestrahlt*. 2. aug. 2011. URL: <https://commons.wikimedia.org/>.
- [17] Robert Krewaldt. *Heinrich Rudolf Hertz, fotografi*. 1890. URL: <https://commons.wikimedia.org/>.
- [18] MDV. *Vibrating Guitar Strings*. 7. feb. 2011. URL: https://www.flickr.com/photos/m_d_v_c_a/5440265473/in/photostream/.
- [19] Moreau. *View of the interior of a Kawai model UST-7 studio upright piano*. 2021. URL: <https://commons.wikimedia.org/>.
- [20] Caspar Netscher. *Christiaan Huygens*. Maleri. Kunstmuseum Den Haag.
- [21] David Schou. *Baroque violin Walter Mahr, 2010*. 14. aug. 2016. URL: <https://commons.wikimedia.org/>.
- [22] Franz Sir. *Christian Doppler*. Litografi efter tegning af Anton Machek.
- [23] Marco Verch. *Blockflöte*. 13. apr. 2017. URL: <https://foto.wuestenigel.com/blockflote/>.
- [24] Jason Aarons. *Ocean Spray*. 7. jun. 2009. URL: <https://www.flickr.com/photos/jaarons/3610222703>.