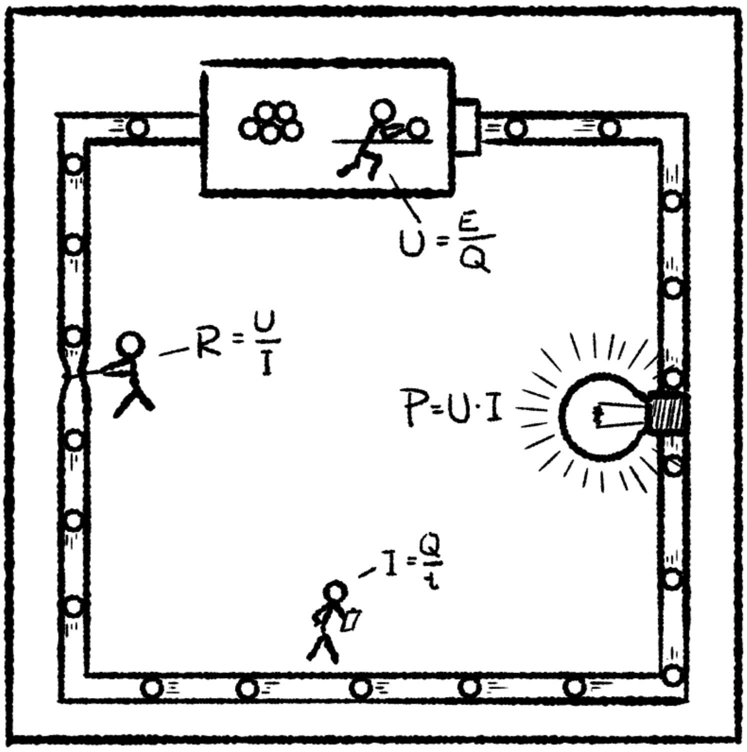
Mike Vandal Auerbach

ELEKTRICITET

Version 1.0
20. november 2023



www.mathematicus.dk

Elektricitet
Version 1.0, 2023

Disse noter indeholder det meste af kernestoffet (og lidt til) omkring elektricitet, dog er elektriske sensorer ikke behandlet.

Værdien af forskellige konstanter er, med mindre andet er angivet, taget fra Databog Fysik Kemi, 11. udgave.[1]

Disse noter er skrevet til fysikundervisning på stx og må frit anvendes til ikke-kommercielle formål.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Mike Vandal Auerbach, 2023.

Indhold

— 1 —

Elektrisk ladning og strøm

Som bekendt har alt stof masse, og to genstande med masserne m_1 og m_2 vil påvirke hinanden med en kraft der er givet ved Newtons tyngdelov

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \,,$$

hvor $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$ er gravitationskonstanten, og r er afstanden mellem de to genstande.

Alt stof er opbygget af atomer, og atomer er opbygget af protoner, neutroner og elektroner. Protoner og elektroner har ud over masse også en anden egenskab, nemlig *elektrisk ladning*. Elektrisk ladning betegner man med symbolet Q eller q, og SI-enheden for elektrisk ladning er coulomb (C). Enheden er opkaldt efter den franske officer, ingeniør og fysiker Charles Augustin de Coulomb (1736–1806) som især er kendt for at finde frem til den såkaldte *Coulombs lov*,[5] se nedenfor.

Figur 1.1: Charles Augustin de Coulomb.[10]

Til forskel fra masse kan elektrisk ladning både være positiv og negativ; således har protoner positiv ladning, og elektroner har negativ ladning. De to partiklers elektriske ladninger har samme størrelse, men altså modsat fortegn. Idet protoner og elektroner er udelelige, er protonens og elektronens ladninger den mindste ladning man kan isolere. Denne elektriske ladning kalder man derfor *elementarladningen*, og dens størrelse er

Elementarladningen

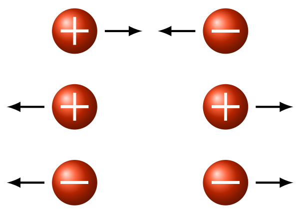
$$e = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\,.$$

Protonens ladning er altså e, mens elektronens er $-e$.

Elementarladningen er ikke ret stor. Man kan regne ud hvor mange protoner eller elektroner man skal have for at have en ladning på 1 C ved at dividere 1 C med elementarladningen:

$$\frac{1\,\mathrm{C}}{e} = \frac{1\,\mathrm{C}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = 6{,}24 \cdot 10^{18}\,.$$

Der skal altså temmelig mange elektroner til før man har en elektrisk ladning på 1 C.



Figur 1.2: Ladninger med forskelligt fortegn tiltrækker hinanden, og ladninger med samme fortegn frastøder hinanden.

Ligesom to masser påvirker hinanden med en tyngdekraft, vil to elektriske ladninger påvirke hinanden med en elektrisk kraft. Men retningen af denne kraft vil være afhængig af ladningernes fortegn. Således vil to ladninger med samme fortegn frastøde hinanden, mens ladninger med modsat fortegn vil tiltrække hinanden (se figur 1.2). Størrelsen af den elektriske tiltrækning/frastødning er givet ved Coulombs lov

Coulombs lov

$$F = k_C \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} ,$$

hvor q_1 og q_2 er de to ladninger, r er afstanden mellem dem, og $k_C = 8{,}99 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}$ er Coulombs konstant.

Øvelse 1.1

I et hydrogenatom er middelafstanden mellem elektronen og protonen $r = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m.

a) Beregn den elektriske tiltrækningskraft mellem protonen og elektronen i et hydrogenatom.

Protonen har en masse på $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, og elektronen har en masse på $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.

b) Bestem størrelsen af tyngdekraften mellem protonen og elektronen.

c) Bestem forholdet mellem den elektriske tiltrækningskraft og tyngdekraften mellem de to partikler.

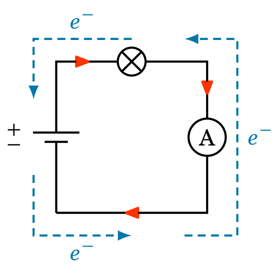
1-1 Elektrisk strøm

Coulombs lov bruges til at beregne den elektriske kraft mellem to isolerede elektriske ladninger. Det er dog sjældent dette man kigger på i forbindelse med elektricitet, her vil man snarere kigge på elektriske kredsløb hvor de elektriske ladninger bevæger sig i ledninger.

Elektriske ledninger består af et metal (ofte kobber) omgivet af et isolerende materiale (typisk plastic). Atomerne i metaller sidder arrangeret i et gitter på en sådan måde at de yderste elektroner så at sige »deles« af alle atomerne i gitteret, dvs. de kan bevæge sig. Når elektrisk ladning bevæger sig i en ledning, er det altså atomernes yderste elektroner der bevæger sig.

I et elektrisk kredsløb drives strømmen af en spændingskilde (f.eks. en strømforsyning eller et batteri) der skaber en forskel i ladning således at spændingskilden har en negativ pol hvor der er et overskud af elektroner, og en positiv pol hvor der er et underskud af elektroner. Idet elektroner er negativt ladede vil de tiltrækkes af den positive ladning og strømme fra den negative pol gennem kredsløbet til den positive pol på spændingskilden.

I fysikken beskæftigede man sig med elektrisk strøm længe før man kendte til eksistensen af elektroner og protoner. Derfor regner man på elektrisk strøm som en strøm af positiv ladning, også selvom det der egentlig bærer ladningen, er de negativt ladede elektroner. Den elektriske strøm regnes derfor positiv når den løber fra den positive til den negative pol – selv om det der egentlig strømmer gennem ledningen (nemlig elektronerne), løber den anden vej.



Figur 1.3: I et elektrisk kredsløb løber strømmen fra den positive til den negative pol. Elektronerne løber dog den modsatte vej.

Figur 1.3 viser et kredsløb med en elpære og et amperemeter. Pilene på selve kredsløbet viser hvilken vej strømmen løber i kredsløbet; de stiplede pile viser hvilken vej elektronerne bevæger sig. Kredsløbsdiagrammer og symboler er beskrevet grundigere i appendiks A.

I kredsløbet på figur 1.3 er der indsat et *amperemeter* der måler den elektriske strømstyrke I som angiver hvor stor en mængde ladning der strømmer igennem et bestemt punkt i kredsløbet i et bestemt tidsrum. Der gælder

> *Elektrisk strømstyrke*
>
> $$I = \frac{Q}{t}\,,$$
>
> hvor Q er størrelsen af den ladning der strømmer gennem et bestemt sted i kredsløbet i tidsrummet t.

Den elektriske strømstyrke måles i ampere (A). Enheden er opkaldt efter den franske fysiker André-Marie Ampère (1775–1836) som grundlagde og navngav elektrodynamikken, den gren af fysikken der i dag kaldes *elektromagnetisme*.[7] Der gælder at

$$1\,\mathrm{A} = 1\,\mathrm{C/s}\,.$$

Figur 1.4: André-Marie Ampère.[12]

Eksempel 1.2
Hvis der løber en ladning på 6 C gennem en ledning på 2 min, er strømmen

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{6\,\mathrm{C}}{2\cdot 60\,\mathrm{s}} = 0{,}050\,\mathrm{A} = 50\,\mathrm{mA}\,.$$

Strømstyrken i ledningen er altså på 50 mA.

Øvelse 1.3

I en ledning passerer der en ladning på 25 C på 40 s.

a) Beregn strømmen I.

b) Hvor lang tid går der, før der er passeret en ladning på 80 C ?

Øvelse 1.4

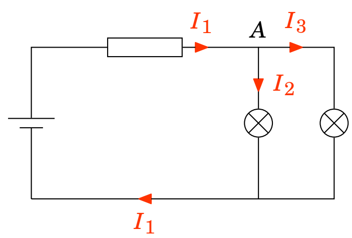
I et lyn bevæger elektroner sig fra jordoverfladen op til tordenskyen. Et lyn kan have en strømstyrke på op til 200 kA, og selve lynet kan f.eks. vare 30 µs.[2]

a) Beregn den samlede ladning i lynet.

1-2 Kirchhoffs første lov

I kredsløbet på figur 1.5 er der et knudepunkt ved A. Der gælder at den samlede strøm der løber ind mod et sådant knudepunkt, også må forlade det. For kredsløbet på figur 1.5 betyder det at der må gælde

$$I_1 = I_2 + I_3\,.$$

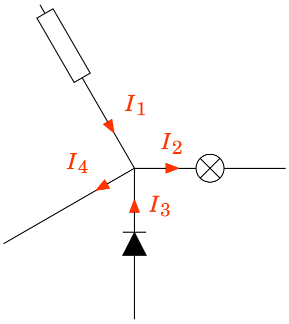


Figur 1.5: Et kredsløb med et knudepunkt.

Dette princip er formuleret i Kirchhoffs første lov:

Kirchhoffs første lov

For ethvert knudepunkt i et elektrisk kredsløb gælder at den samlede strøm ind mod knudepunktet er lig med den samlede strøm væk fra knudepunktet.



Figur 1.6: Et knudepunkt hvor fire ledninger mødes.

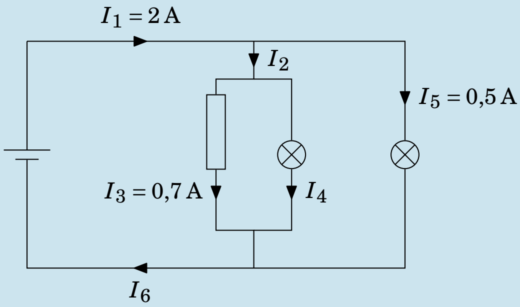
Eksempel 1.5
Figur 1.6 viser en del af et kredsløb hvor fire ledninger mødes. Ifølge billedet er går strømmene I_1 og I_3 mod knudepunktet, mens I_2 og I_4 går væk fra knudepunktet. Ifølge Kirchhoffs første lov gælder der derfor at

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4 \,.$$

Øvelse 1.6

Diagrammet herunder viser et kredsløb med to pærer og en resistor.

a) Bestem strømstyrkerne I_2, I_4 og I_6.



— 2 —

Spændingsfald

Elektriske ladninger der bevæger sig i et kredsløb, har en vis mængde elektrisk potentiel energi. Når ladningerne passerer en komponent i kredsløbet, f.eks. en pære, en resistor eller en elmotor, bliver noget af denne energi afsat i komponenten. Den afsatte energi angives som et såkaldt *spændingsfald*, der angiver hvor stor en mængde elektrisk potentiel energi der afsættes i komponenten for hver ladning der passerer.

Spændingsfaldet angiver altså hvor meget energi der afsættes pr. ladning, dvs. spændingsfaldet U er givet ved

Spændingsfald

$$U = \frac{E_{\mathrm{el}}}{Q}\,,$$

hvor E_{el} er den afsatte elektriske energi, og Q er ladningsmængden.

Det fremgår af formlen at SI-enheden for spændingsfald bliver J/C; denne enhed kaldes også volt (V),

$$1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{J/C}\,.$$

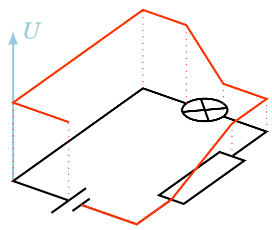
Enheden volt er opkaldt efter den italienske fysiker Alessandro Volta (1745–1827) som opfandt det første batteri, den såkaldte *voltasøjle*.[4]

Figur 2.1: Alessandro Volta.[8]

Eksempel 2.1
I et elektrisk kredsløb bliver der afsat en energi på 13 J når der er løbet en ladning på 4,2 C gennem kredsløbet. Spændingsfaldet i hele kredsløbet er så

$$U = \frac{E_{\mathrm{el}}}{Q} = \frac{13\,\mathrm{J}}{4{,}2\,\mathrm{C}} = 3{,}1\,\mathrm{V}\,.$$

Figur 2.2 illustrerer hvordan energien afsættes undervejs i kredsløbet. Den orange kurve på billedet angiver den elektriske potentielle energi som en ladning har. Som man kan se på figuren, falder højden af den orange kurve hver gang strømmen passerer en komponent i kredsløbet, således at den elektriske potentielle energi er 0 når ladningen kommer tilbage til spændingskilden.



Figur 2.2: Spændingen (højden af den orange kurve) falder når strømmen passerer en elektrisk komponent.

Øvelse 2.2

I et kredsløb afsættes der en elektrisk energi på 20 J når der er passeret en ladningsmængde på 5,0 V.

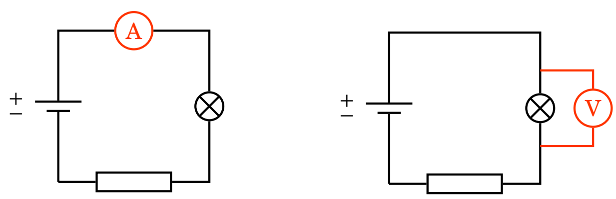
a) Bestem spændingsfaldet i kredsløbet.

Kredsløbet består ud over spændingskilden af to resistorer. Spændingsfaldet over den ene resistor er 2,5 V.

b) Hvor stort er spændingsfaldet over den anden resistor.

2-1 Måling af strøm og spændingsfald

Hvis man skal måle strømmen i et kredsløb med et amperemeter, skal amperemeteret indsættes i kredsløbet som på figur 2.3(a). Amperemeteret sidder i en såkaldt *serieforbindelse*; det gør at den strøm der passerer gennem amperemeteret er den samme strøm som i resten af kredsløbet. Dette er nødvendigt for at man kan måle strømstyrken.



(a) Amperemeter. (b) Voltmeter.

Figur 2.3: Placering af amperemeter og voltmeter i et kredsløb. Amperemeteret måler strømmen gennem ledningen og skal derfor indsættes i serieforbindelse. Voltmeteret måler spændingsfaldet, dvs. det skal måle før og efter pæren, og skal derfor indsættes parallelt med pæren.

Når man måler spændingsfaldet hen over en komponent, skal man derimod indsætte voltmeteret i en såkaldt *parallelforbindelse* (se figur 2.3(b)). Det skyldes at voltmeteret skal måle fra et punkt før komponenten til et punkt efter komponenten hvor meget energi der bliver omsat pr. ladning der passerer.

2-2 Effekt

Effekt er som bekendt et mål for hvor meget energi der omsættes pr. tid. I elektriske kredsløb er spændingsfaldet over en elektrisk komponent givet ved

$$U = \frac{E}{Q},$$

hvor E er den afsatte elektriske energi, og Q er ladningsmængden. Den elektriske strømstyrke I er

$$I = \frac{Q}{t},$$

hvor Q er ladningsmængden, og t er tiden.

Det betyder at

$$U \cdot I = \frac{E}{Q} \cdot \frac{Q}{t} = \frac{E}{t}.$$

Men $\frac{E}{t}$ er netop effekten P, altså hvor meget energi der afsættes pr. tidsenhed. Dvs. man kan finde den effekt der afsættes i en elektrisk komponent ved at gange spændingsfaldet over den med strømmen gennem den:

Effekt afsat i en elektrisk komponent

$$P = U \cdot I\,.$$

Eksempel 2.3
I et elektrisk kredsløb er spændingsfaldet over en pære 12 V, og strømstyrken er 360 mA. Pærens effekt er så

$$P = U \cdot I = 12\,\mathrm{V} \cdot 360\,\mathrm{mA} = 12\,\mathrm{V} \cdot 0{,}360\,\mathrm{A} = 4{,}3\,\mathrm{W}\,.$$

Dvs. pæren omsætter elektrisk energi med en effekt på 4,3 W.

Øvelse 2.4

I et elektrisk kredsløb er strømmen 0,62 A. Spændingsfaldet over en komponent i kredsløbet er 4,5 V.

a) Bestem komponentens effekt.

Nu ændres spændingsfaldet til 6,0 V.

b) Bestem strømstyrken hvis komponentens effekt er den samme som før.

— 3 —

Resistans

Når ladninger passerer gennem en elektrisk komponent, afsætter de noget af deres energi. Energioverførslen sker ved at ladningerne interagerer med atomerne i komponenten.

Nogle materialer er gode til at lede strøm. I sådanne materialer vil hver ladning afsætte en forholdsvist lille del af deres energi (dvs. der er et lille spændingsfald) selv om strømmen er stor. I andre materialer er det lige omvendt, her vil hver ladning afsætte en stor del af deres energi selv ved en ganske lille strøm.

Resistansen R er et mål for hvor meget energi der afsættes pr. ladning i forhold til hvor stor en strøm der passerer gennem en komponent. Resistansen er defineret til at være forholdet mellem spændingsfaldet over en komponent og strømmen gennem den, dvs.

Resistans

$$R = \frac{U}{I} \,.$$

SI-enheden for resistans bliver således V/A; denne enhed kaldes også ohm (Ω) efter den tyske fysiker Georg Simon Ohm (1789–1854) der opdagede den såkaldte Ohms lov,[3] se nedenfor.

Man kan sige at resistansen er et mål for hvor let strømmen kan passere en given komponent. Hvis resistansen er stor, vil der, selv med et meget stort spændingsfald, kun løbe en lille strøm gennem komponenten. Omvendt vil der, hvis resistansen er lille, løbe ganske meget strøm igennem, selv ved et lille spændingsfald.

Figur 3.1: Georg Simon Ohm.[9]

Øvelse 3.1

Et materiale der leder strøm uden at der afsættes energi, kaldes superledende.

a) Hvad er resistansen i sådan et superledende materiale?

Et materiale der slet ikke kan lede strøm, er isolerende.

b) Hvad er resitansen af et isolerende materiale?

Øvelse 3.2

Et amperemeter skal som nævnt i afsnit 2-1 indsættes i serieforbindelse, mens et voltmeter tilsluttes parallelt.

Skal resistansen af et amperemeter derfor være lav eller høj, og hvad skal voltmeterets resistans være?

3-1 Resistorer

En resistor er en komponent hvor resistansen er konstant, dvs. den afhænger ikke af strømstyrken eller spændingsfaldet. I en resistor kan definitionen på resistans derfor omskrives til denne formel:

Ohms 1. lov

$$U = R \cdot I\,.$$

Eksempel 3.3
En resistor har en resistans på 223 Ω. Hvis spændingsfaldet over resistoren er 4,5 V, kan man beregne strømstyrken vha. Ohms første lov. Der gælder nemlig

$$U = R \cdot I \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{U}{R}\,,$$

dvs.

$$I = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{223\,\Omega} = 0{,}0202\,\mathrm{A}\,.$$

Strømmen gennem resistoren er så 20,2 mA.

Øvelse 3.4

En resistor har en resistans på $R = 250\,\Omega$. Strømmen gennem resistoren er $I = 40\,\mathrm{mA}$.

a) Hvor stort er spændingsfaldet over resistoren?

b) Hvor stor ville resistansen være, hvis man med samme spændingsfald havde en strømstyrke på 25 mA?

3-2 Joules lov

Joules lov er en formel der gør det muligt at beregne den omsatte effekt i en elektrisk komponent ud fra dens resistans og strømmen gennem den. Resistansen af en elektrisk komponent er givet ved formlen

$$R = \frac{U}{I}\,.$$

Derfor må der også gælde at

$$R \cdot I^2 = \frac{U}{I} \cdot I^2 = U \cdot I\,.$$

Men $U \cdot I$ er den omsatte effekt i en elektrisk komponent. Det betyder at der må gælde at den omsatte effekt i en elektrisk komponent er givet ved

Joules lov

$$P = R \cdot I^2\,,$$

hvor R er komponentens resistans, og I er strømmen gennem den.

Eksempel 3.5
En resistor i et elektrisk kredsløb har en resistans på 35 Ω. Hvis strømmen gennem resistoren er 1,7 A, omsætter den energi med en effekt på

$$P = R \cdot I^2 = 35\,\Omega \cdot (1{,}7\,\text{A})^2 = 60\,\text{W}\,.$$

Hvis effekten er konstant i et tidsrum Δt er den omsatte energi i dette tidsrum givet ved

$$\Delta E = P \cdot \Delta t\,,$$

dvs. den omsatte energi kan beregnes som

$$\Delta E = R \cdot I^2 \cdot \Delta t\,.$$

Afhængig af hvilken elektrisk komponent det drejer sig om, vil energien blive omsat til varme, lysenergi, kinetisk energi, etc. Er der tale om en resistor vil al energien blive omsat til varme.

Øvelse 3.6

En resistor med en resistans på 3,5 Ω nedsænkes i 100 g vand. Resistoren tilsluttes herefter et elektrisk kredsløb med en strømstyrke på 2,6 A.

a) Beregn resistorens effekt.

Kredsløbet er tændt i 2 min.

b) Hvor meget energi omsætter resistoren på denne tid?

c) Hvor meget stiger vandets temperatur?

Transport af strøm

Når man transporterer strøm ud til forbrugeren sker det i *højspændingsledninger*. Man transformerer strømmen[1] op så den har en langt højere spænding, men til gengæld en langt lavere strømstyrke. Årsagen til dette skal man netop finde i Joules lov.

[1]Dette kan man gøre fordi strømmen i vores elnet er *vekselstrøm*, dvs. at retningen af strømmen hele tiden ændrer sig. En grundig beskrivelse af vekselstrøm ligger dog uden for rammerne af disse noter.

Eksempel 3.7
Når man transformerer strøm, vil effekten (altså den leverede energi pr. tid) være den samme før og efter transformationen. Idet effekten i et elektrisk kredsløb er givet ved

$$P = U \cdot I\,,$$

får man følgende sammenhæng når man transformerer strøm op fra lavspænding til højspænding

$$U_{\text{lav}} \cdot I_{\text{lav}} = U_{\text{høj}} \cdot I_{\text{høj}}\,,$$

og dvs.

$$I_{\text{høj}} = \frac{U_{\text{lav}}}{U_{\text{høj}}} \cdot I_{\text{lav}}\,.$$

Effekttabet i en ledning kan beregnes vha. Joules lov. Hvis man sammenligner effekttabet ved højspænding med effekttabet ved lavspænding, finder man

$$\frac{P_{\text{høj}}}{P_{\text{lav}}} = \frac{R \cdot I_{\text{høj}}^2}{R \cdot I_{\text{lav}}^2} = \left(\frac{I_{\text{høj}}}{I_{\text{lav}}}\right)^2 .$$

Indsætter man nu udtrykket for $I_{\text{høj}}$ i denne formel, får man at

$$\frac{P_{\text{høj}}}{P_{\text{lav}}} = \left(\frac{\frac{U_{\text{lav}}}{U_{\text{høj}}} \cdot I_{\text{lav}}}{I_{\text{lav}}}\right)^2 = \left(\frac{U_{\text{lav}}}{U_{\text{høj}}}\right)^2 .$$

Den strøm der kommer ud af stikkontakten har en spænding på 230 V, mens højspændingsledninger kan have en spænding på f.eks. 100 kV. Forholdet mellem effekttabene ved disse to spændinger bliver så

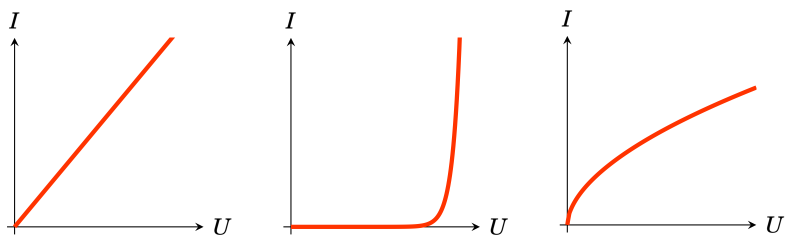
$$\frac{P_{\text{høj}}}{P_{\text{lav}}} = \left(\frac{230\,\text{V}}{100\,000\,\text{V}}\right)^2 = 5{,}3 \cdot 10^{-6} .$$

Effekttabet ved højspænding er altså mange gange mindre end ved den spænding der er i stikkontakten. Dette er årsagen til at strøm altid transporteres ved højspænding.

3-3 Karakteristikker

Fordi ikke alle komponenter i et elektrisk kredsløb har konstant resistans, er det interessant at undersøge sammenhængen mellem U og I for en elektrisk komponent. Dette gør man ved at bestemme en såkaldt *karakteristik* af komponenten.

En karakteristik er en (U, I)-graf for komponenten. Man varierer spændingsfaldet over komponenten og måler strømstyrken. Figur 3.2 viser karakteristikker for tre forskellige komponenter.



(a) Resistor (b) Diode (c) Glødepære

Figur 3.2: Karakteristikker for hhv. en resistor, en diode og en glødepære

En resistor er netop en komponent der opfylder Ohms første lov, $U = R \cdot I$. Derfor gælder der også

$$I = \frac{1}{R} \cdot U ,$$

dvs. for en resistor er I og U proportionale. Altså bliver karakteristikken en ret linje gennem $(0, 0)$ med hældning $\frac{1}{R}$.[2]

[2]Størrelsen $G = \frac{1}{R}$ kaldes komponentens *konduktans*. Hvis konduktansen er høj (dvs. resistansen er lav), er komponenten god til at lede strøm. SI-enheden for konduktans er *siemens* (S), der er det samme som Ω^{-1}.

En diode er en komponent der kun tillader strømmen at løbe den ene vej gennem den, og det kun når spændingsfaldet over dioden har en vis størrelse. Som det fremgår af karakteristikken for dioden, er strømmen 0 (svarende til uendeligt høj resistans) ind til spændingsfaldet når en bestemt størrelse, hvorefter grafen nærmest bliver lodret (dvs. resistansen er nærmest 0). Når spændingsfaldet når en bestemt tærskelværdi, flyder strømmen altså frit gennem dioden.

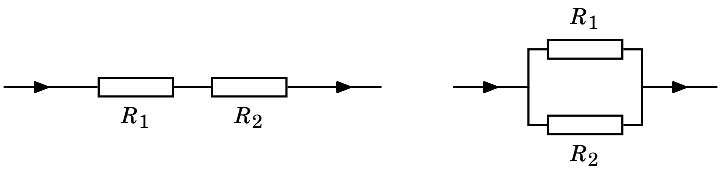
En gammeldags glødepære består af en tynd metaltråd som befinder sig i et lufttomt rum inde i en glaskuppel (se figur fig:glødepære). Idet metaltråden er meget tynd, har den en høj resistans. Når der løber strøm gennem pæren bliver metaltråden derfor meget varm og begynder at lyse.[3] I takt med at tråden bliver varmere, bliver dens resistans også højere; det er derfor grafen for glødepæren vokser langsommere jo større spændingsfald der er over pæren: Der skal simpelthen et højere spændingsfald til at få strømmen til at vokse når pæren er varm.

Figur 3.3: En glødepære.[11]

[3] Dette er en meget ineffektiv måde at omdanne energi til lys på. I virkeligheden er en glødepære mere velegnet som varmeapparat end som lyskilde. Derfor blev salg af glødepærer forbudt i EU pga. miljøhensyn i 2012.[6]

3-4 Serie- og parallelforbindelser

I dette afsnit undersøges hvordan strøm, spændingsfald og resistans ser ud for resistorer i serie- og parallelforbindelser. Figur 3.4 viser en skitse af en serie- og af en parallelforbindelse af to resistorer.



(a) Serieforbindelse. (b) Parallelforbindelse.

Figur 3.4: To seriekoblede og to parallelkoblede resistorer.

Nu undersøges strømmen og spændingsfaldet for de to typer af resistorkoblinger.

Serieforbindelsen

For serieforbindelsen må der gælde at strømmen gennem begge resistorer er den samme, altså at

$$I_1 = I_2 = I \,,$$

hvor I_1 er strømmen gennem R_1, og I_2 er strømmen gennem R_2.

Idet det er den samme strøm der løber gennem begge resistorer, må alle ladninger afsætte energi både i R_1 og R_2. Det samlede spændingsfald U over de to resistorer må derfor være lig summen af spændingsfaldet over R_1 og spændingsfaldet over R_2, altså

$$U = U_1 + U_2 \,.$$

Parallelforbindelsen

I parallelforbindelsen deler strømmen sig. Der må derfor ifølge Kirchhoffs første lov gælde at

$$I = I_1 + I_2 \,,$$

hvor I er den samlede strøm gennem hele forbindelsen, og I_1 og I_2 er strømmen gennem henholdsvis R_1 og R_2.

Idet strømmen deler sig, er det ikke de samme ladninger der strømmer gennem R_1 og R_2, men uanset om ladningerne strømmer den ene eller den anden vej, må de afsætte lige meget energi pr. ladning. Det betyder at spændingsfaldet er det samme over R_1 som over R_2, altså at

$$U_1 = U_2 = U ,$$

hvor U er spændingsfaldet over hele parallelforbindelsen.

Erstatningsresistans

Hvis man har to (eller flere) resistorer i en serie- eller en parallelforbindelse, er *erstatningsresistansen* den resistans en enkelt resistor skulle have, hvis den skulle erstattet hele koblingen.

Er to resistorer seriekoblede, gælder der som beskrevet ovenfor at det samlede spændingsfald over forbindelsen er $U = U_1 + U_2$, samt at strømmen gennem de to resistorer er den samme. Ifølge Ohms 1. lov må der derfor gælde at

$$U = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I = (R_1 + R_2) \cdot I .$$

Erstatningsresistansen for to seriekoblede resistorer er derfor

$$R_\mathrm{e} = R_1 + R_2 .$$

Det samme argument gælder hvis man seriekobler flere resistorer, dvs. der gælder følgende:

Erstatningsresistans ved seriekobling

Erstatningsresistansen R_e for et antal seriekoblede resistorer med resistanserne $R_1, R_2, \ldots, R_n$ er

$$R_\mathrm{e} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n .$$

For to parallelkoblede resistorer ved vi omvendt at spændingsfaldet over de to resistorer er det samme. Derfor er

$$R_1 = \frac{U}{I_1} \quad \text{og} \quad R_2 = \frac{U}{I_2} ,$$

hvor U er spændingsfaldet, og I_1 og I_2 er strømmen gennem den ene hhv. den anden resistor. Der gælder derfor også at

$$\frac{1}{R_1} = \frac{I_1}{U} \quad \text{og} \quad \frac{1}{R_2} = \frac{I_1}{U} .$$

Summen af strømmen gennem R_1 og R_2 er lig med den samlede strøm: $I = I_1 + I_2$. Altså er

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} = \frac{I_1 + I_2}{U} = \frac{I}{U} = \frac{1}{R_\mathrm{e}} .$$

Dvs. for en parallelkobling kan man finde erstatningsresistansen R_e vha. denne sammenhæng:

$$\frac{1}{R_\mathrm{e}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Det mere generelle resultat er:

Erstatningsresistans ved parallelkobling

Erstatningsresistansen R_e for et antal parallelkoblede resistorer med resistanserne $R_1, R_2, \ldots, R_n$ opfylder ligningen

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \,.$$

Eksempel 3.8

Hvis to parallelkoblede resistorer har resistanserne $R_1 = 100\,\Omega$ og $R_2 = 200\,\Omega$, så er

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{100\,\Omega} + \frac{1}{200\,\Omega} = 0{,}0100\,\Omega^{-1} + 0{,}0050\,\Omega^{-1} = 0{,}0150\,\Omega^{-1} \,,$$

dvs.

$$R_e = \frac{1}{0{,}0150\,\Omega^{-1}} = 66{,}7\,\Omega \,.$$

Altså er erstatningsresistansen 66,7 Ω.

Som man kan se af eksemplet ovenfor, bliver erstatningsresistansen *mindre* når man parallelkobler resistorer. Dette skyldes at strømmen deler sig inden den løber gennem resistorerne. Dermed er der flere veje strømmen kan tage, og derfor bliver den samlede resistans mindre.

Øvelse 3.9

To seriekoblede resistorer har en resistans på hhv. 250 Ω og 100 Ω.

a) Bestem erstatningsresistansen.

b) Hvor stor bliver erstatningsresistansen hvis resistorerne i stedet er parallelkoblede?

Hvis man parallelkobler resistorer med den *samme* resistans, kan man forsimple formlen ovenfor. Parallelkobler man n resistorer med resistans R, har man ifølge formlen at erstatningsresistansen opfylder

$$\frac{1}{R_e} = \overbrace{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \cdots + \frac{1}{R}}^{n \text{ led}} = n \cdot \frac{1}{R} \,,$$

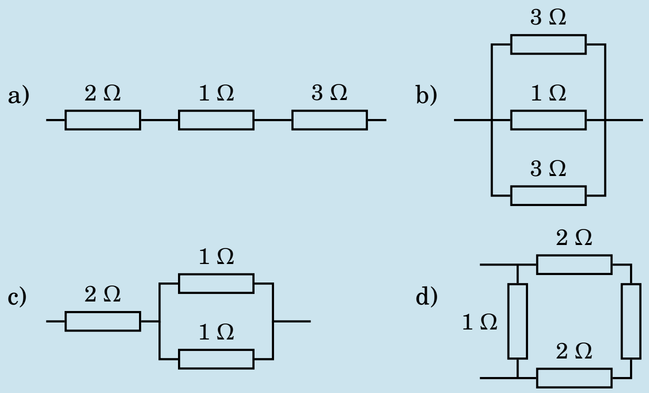
Men dvs.

$$R_e = \frac{1}{n} \cdot R \,. \tag{3.1}$$

Denne formel gælder altså for erstatningsresistansen af en parallelkobling af n *ens* resistorer der hver har resistans R.

Øvelse 3.10

Bestem erstatningsresistansen for resistorkoblingerne på hvert af billederne herunder.



3-5 Temperaturafhængighed

Som beskrevet ovenfor, bliver karakteristikken af en glødepære en krum kurve fordi resistansen af det metal der indgår i glødepæren, stiger når temperaturen bliver højere. Det viser sig at for metaller, kan man beskrive temperaturafhængigheden af resistansen vha. formlen

$$R = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t)\,, \tag{3.2}$$

hvor R er resistansen, R_0 er resistansen ved 0°C, t er temperaturen i °C, og α er *temperaturkoefficienten*. Størrelsen af α afhænger af materialet.

Tabel 3.5: Temperaturkoefficienter for forskellige metaller

Metal	α / °C^{-1}
jern	0,0066
kobber	0,0043
messing	0,0021
nikkel	0,0067
platin	0,0039

Formlen ovenfor gælder med god tilnærmelse i intervallet fra 0°C til 100°C. Tabel 3.5 viser temperaturkoefficienterne for nogle forskellige metaller.

Eksempel 3.11
Et tyndt stykke jerntråd har en resistans på 18 mΩ ved 0°C. Hvis jerntråden har en temperatur på 50°C, er resistansen

$$R = 18\,\mathrm{m\Omega} \cdot (1 + 0{,}0066°\mathrm{C}^{-1} \cdot 50°\mathrm{C}) = 23{,}9\,\mathrm{m\Omega}\,.$$

Resistansen stiger altså ikke ubetydeligt når temperaturen stiger.

Øvelse 3.12

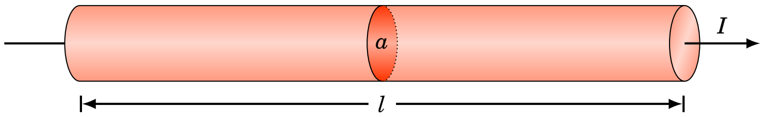
En tynd platintråd har en resistans på 25 mΩ ved 0°C.

a) Hvad er trådens resistans ved 20°C?

b) Hvad er temperaturen hvis trådens resistans er 32 mΩ?

3-6 Resistivitet

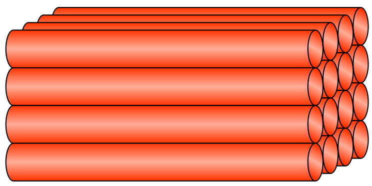
Det viser sig at resistansen af et metal (og af andre materialer) afhænger af materialets geometri. F.eks. er resistansen af en lang metaltråd større end resistansen af en kort, og resistansen er også større hvis tråden er tyndere.



Figur 3.6: En metaltråd med længde l og tværsnitsareal a.

Figur 3.6 herover viser en model af en metaltråd med længden l og tværsnitareal a. Hvis man sætter n af sådanne tråde i forlængelse af hinanden, får man en tråd med længden $n \cdot l$. Her er metaltrådene seriekoblede, så resistansen må blive n gange så stor.

Parallelkobler man derimod de n metaltråde (se figur 3.7) svarer dette til en tyk tråd med tværsnitsareal $a \cdot n$. Når trådene er parallelkoblet bliver resistansen n gange så lille (se formel (3.1)).



Figur 3.7: n parallelkoblede metaltråde med tværsnitsareal a svarer til én tyk tråd med tværsnitsareal $n \cdot a$.

Det betyder altså at resistansen af en metaltråd er direkte proportional med længden og omvendt proportional med tværsnitarealet af tråden. Der må derfor gælde at

$$R = \rho \cdot \frac{l}{a}\,. \tag{3.3}$$

Proportionalitetskonstanten ρ kaldes *resistiviteten*. Resistivitetens størrelse afhænger af materialet. Materialer der er gode til at lede strøm, har en lav resistivitet, og omvendt har materialer der leder strøm dårligt, en høj resistivitet. Tabel 3.8 viser resistiviteten af nogle forskellige metaller. De angivne resistiviteter er ved 20°C; resistiviteten er ligesom resistansen afhængig af temperaturen.

Tabel 3.8: Resistivitet (ved 20°C) for forskellige metaller.

Metal	ρ / μΩ·m
aluminium	0,0272
guld	0,0222
jern	0,101
kobber	0,0168
messing	0,070
nikkel	0,070
platin	0,1058

Ved omformning af formel (3.3) ovenfor får man følgende definition på resistivitet:

Resistivitet

$$\rho = R \cdot \frac{a}{l}\,,$$

hvor R er resistansen, l er længden, og a er tværsnitsarealet.

Herudfra ses det at SI-enheden for resistivitet er

$$[\rho] = \Omega \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}} = \Omega \cdot \mathrm{m}\,.$$

Idet tværsnitsarealet af en metaltråd sjældent måles i m^2, men langt oftere i mm^2, ser man også tit enheden

$$[\rho] = \frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}\,.$$

Lidt regning med præfikser viser at der gælder

$$\frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} = \mu\Omega \cdot \mathrm{m}\,.$$

Eksempel 3.13
Der er en god grund til at man sjældent medregner resistansen af de ledninger der indgår i et elektrisk kredsløb.

En typisk kobberledning har et tværsnitsareal på omkring 0,75 mm^2. Hvis den samlede ledningslængde i et elektrisk kredsløb er 2,0 m, kan resistansen beregnes vha. formel (3.3):

$$\begin{aligned} R &= \rho \cdot \frac{l}{a} \\ &= 0{,}0168\,\mu\Omega \cdot \mathrm{m} \cdot \frac{2{,}0\,\mathrm{m}}{0{,}75\,\mathrm{mm}^2} \\ &= 0{,}0168\,\frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} \cdot \frac{2{,}0\,\mathrm{m}}{0{,}75\,\mathrm{mm}^2} = 0{,}045\,\Omega\,. \end{aligned}$$

Resistansen i ledninger er altså så lille sammenlignet med resistansen af de typiske komponenter i et kredsløb, at det normalt ikke kan betale sig at regne den med.

Øvelse 3.14

Forklar ud fra resistiviteterne i tabel 3.8 hvorfor det er bedre at lave ledninger af kobber end f.eks. af aluminium.

Øvelse 3.15

En nikkeltråd har en diameter på 0,5 mm.

a) Bestem trådens tværsnitsareal.

b) Bestem resistansen af 1,5 m af nikkeltråden.

Øvelse 3.16

En kobbertråd har et tværsnitareal på 1,0 mm^2.

a) Bestem resistansen af 2,3 m af denne kobbertråd.

b) Bestem tværsnitsarealet af en 2,3 m lang aluminiumstråd med samme resistans.

— 4 —

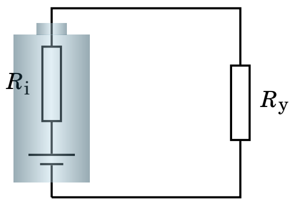
Spændingskilder

En *spændingskilde* er en generel betegnelse for det der leverer den elektriske strøm i et elektrisk kredsløb. En stikkontakt er en f.eks. en spændingskilde, og det samme er et batteri. I en stikkontakt kommer strømmen via ledninger fra elnettet, og et batteri er i stand til at levere strøm via kemiske processer inde i batteriet.

Når man bruger et batteri til at levere strøm, vil man opdage at batteriet bliver varmt. Det betyder at batteriet selv omsætter noget af den elektriske energi det leverer, til varme. Dette kan modelleres ved at antage at batteriet består af en spændingskilde der leverer strømmen, samt en indre resistor med en resistans R_{i}.

Figur 4.1 viser en sådan model af et batteri. Batteriet består af en spændingskilde og en indre modstand, resten af det elektriske kredsløb modelleres med en ydre resistor med resistans R_{y}. Den samlede resistans i kredsløbet må så være

$$R = R_{\mathrm{i}} + R_{\mathrm{y}} \,.$$



Figur 4.1: Et batteri i et elektrisk kredsløb kan modelleres som en spændingskilde koblet med en indre resistor.

Ifølge Ohms første lov gælder der så at det samlede spændingsfald i kredsløbet kan beregnes ved denne formel:

Ohms 2. lov

$$U_0 = (R_{\mathrm{i}} + R_{\mathrm{y}}) \cdot I$$

Af Ohms 2. lov kan man udlede at

$$\begin{aligned} U_0 &= (R_{\mathrm{i}} + R_{\mathrm{y}}) \cdot I &\Leftrightarrow \\ U_0 &= R_{\mathrm{i}} \cdot I + R_{\mathrm{y}} \cdot I &\Leftrightarrow \\ R_{\mathrm{y}} \cdot I &= U_0 - R_{\mathrm{i}} \cdot I \,. \end{aligned}$$

Men $R_{\mathrm{y}} \cdot I$ er det samlede spændingsfald over det ydre kredsløb, dvs. dette svarer til den spænding man kan måle over batteriets poler. Denne størrelse kaldes derfor for *polspændingen* U_{P}, og der gælder altså at

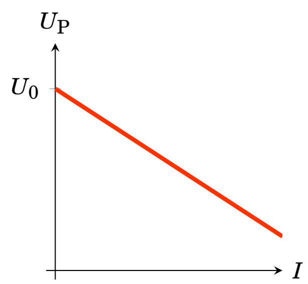
Polspænding

$$U_{\mathrm{P}} = U_0 - R_{\mathrm{i}} \cdot I \,.$$

Sammenhængen $U_{\mathrm{P}} = U_0 - R_{\mathrm{i}} \cdot I$ kan også skrives som

$$U_{\mathrm{P}} = -R_{\mathrm{i}} \cdot I + U_0 \,.$$

Her ses det tydeligt at en (I, U_{P})-graf er en ret linje med hældning $-R_{\mathrm{i}}$ der skærer andenaksen i U_0. Figur 4.2 viser hvordan dette ser ud.



Figur 4.2: Polspændingen U_{P} aftager lineært med strømmen.

Størrelsen U_0 er altså spændingen over batteriet når strømmen er 0. Denne størrelse kaldes derfor *hvilespændingen*. Historisk er hvilespændingen også blevet kaldt *den elektromotoriske kraft* og givet symbolet $\mathscr{E}$. Det er dog en misvisende betegnelse, idet der er tale om en spænding og ikke en kraft.

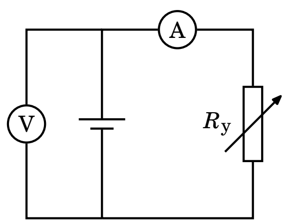
Eksempel 4.1
Et 12 V-batteri sættes i et kredsløb med en resistor på 10 Ω. Hvis batteriets indre resistans er $R_\mathrm{i} = 0{,}10\,\Omega$, kan man beregne strømmen i kredsløbet vha. Ohms 2. lov. Man har nemlig

$$U_0 = (R_\mathrm{i} + R_\mathrm{y}) \cdot I \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{U_0}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{y}} .$$

Idet der er tale om et 12 V-batteri, er hvilespændingen $U_0 = 12\,\mathrm{V}$, dvs.

$$I = \frac{12\,\mathrm{V}}{0{,}1\,\Omega + 10\,\Omega} = 1{,}18\,\mathrm{A} .$$

Strømstyrken i kredsløbet er altså 1,18 A.



Figur 4.3: En spændingskilde i et kredsløb med en variabel ydre modstand R_y.

Normalt kender man ikke den indre resistans i et batteri, men den kan bestemmes ved at undersøge sammenhængen mellem polspændingen og strømmen i et kredløb.

Figur 4.3 viser et kredsløb med en spændingskilde og en variabel ydre resistor. I dette kredsløb kan man variere den ydre resistans, og derefter aflæse polspændingen på voltmeteret og strømmen på amperemeteret. Herudfra kan man fremstille en (U_P, I)-graf, og hældningen på denne graf er som nævnt ovenfor $-R_\mathrm{i}$.

Øvelse 4.2

Et batteri indsættes i et kredsløb som på figur 4.3. Der måles følgende sammenhængende værdier af strømmen og polspændingen:

I / A	0,52	1,24	1,68	2,08	2,41	2,93
U_P / V	4,42	4,32	4,25	4,18	4,13	4,06

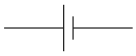
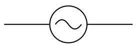
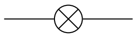
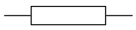
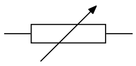
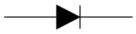
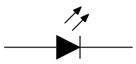
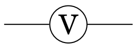
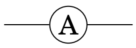
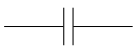
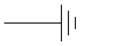
a) Bestem hvilespændingen og batteriets indre resistans.

— A —

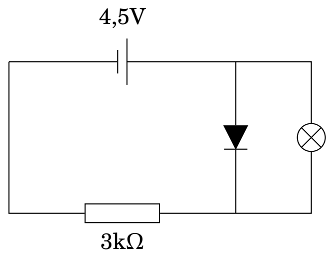
Kredsløbsdiagrammer

Når man tegner et diagram over et elektrisk kredsløb, repræsenteres ledninger ved vandrette og lodrette (i enkelte tilfælde skrå) rette linjer, mens de forskellige komponenter i kredsløbet (pærer, resistorer, osv.) repræsenteres ved bestemte symboler (se tabel A.1 herunder).

Tabel A.1: Symboler for komponenter i elektriske kredsløbsdiagrammer.

Symbol	Komponent
	Spændingskilde (den lange streg er den positive pol)
	Vekselstrømskilde
	Elektrisk pære
	Resistor
	Variabel resistor
	Diode
	Lysemitterende diode (LED)
	Kontakt
	Voltmeter
	Amperemeter
	Ohmmeter
	Kapacitor
	Jordforbindelse

Diagrammet på figur A.2 viser således et elektrisk kredsløb med en spændingskilde på 4,5 V. Komponenterne i kredsløbet er en pære, en diode og en resistor med en resistans på 3 kΩ. De steder hvor flere ledninger mødes er der forgreninger. Det betyder at dioden og pæren er parallelforbundne, disse to parallelforbundne komponenter er så serieforbundet med resistoren.



Figur A.2: Et eksempel på et elektrisk kredsløbsdiagram.

Idet den positive pol altid er den lange streg i spændingskilde-symbolet, vil strømmen i dette kredsløb løbe fra spændingskilden mod højre, hvorefter strømmen deles ved forgreningen, således at noget af strømmen løber gennem dioden og noget gennem elpæren. Herefter samles de to strømme og løber gennem resistoren og tilbage til den negative pol (den korte streg i spændingskilde-symbolet).

Øvelse A.1

Tegn et diagram over et kredsløb med en spændingskilde på 5 V, en serieforbunden pære og en resistor. Tilføj en kontakt, så man kan tænde og slukke for pæren.

Øvelse A.2

Tegn et diagram over et kredsløb med en spændingskilde på 7 V og to parallelforbundne resistorer på hhv. 1,5 Ω og 3 Ω.

Bibliografi

[1] Erik Strandgaard Andersen, Paul Jespersgaard og Ove Grønbæk Østergaard, red. *Databog fysik kemi*. 11. udg. F & K forlaget, 2012.

[2] John Cappelen. *Lynets fysik*. DMI. 27. jun. 2018. URL: https://www.dmi.dk/vejr-og-atmosfare/temaforside-lyn-og-torden/lynets-fysik/ (hentet 03.08.2023).

[3] »Georg Ohm«. I: *Encyclopedia Britannica*. 2. jul. 2023. URL: https://www.britannica.com/biography/Georg-Ohm (hentet 15.11.2023).

[4] »Alessandro Volta«. I: *Store norske leksikon*. Red. af Øyvind Grøn. 4. maj 2019. URL: https://snl.no/Alessandro_Volta (hentet 06.10.2023).

[5] J.J. O'Connor og E.F. Robertson. *Charles Augustin de Coulomb*. Jul. 2000. URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Coulomb/ (hentet 07.08.2023).

[6] Karim Pedersen. *Så er det helt slut med glødepæren*. Computerworld. 31. aug. 2012. URL: https://www.computerworld.dk/art/219821/saa-er-det-helt-slut-med-gloedepaeren (hentet 15.11.2023).

[7] J.B. Shank. »André-Marie Ampère«. I: *Encyclopedia Britannica*. URL: https://www.britannica.com/biography/Andre-Marie-Ampere (hentet 09.08.2023).

Billedkilder

[8] *Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta*. URL: https://commons.wikimedia.org (hentet 06.10.2023).

[9] »Georg Ohm«. I: *Encyclopedia Britannica*. URL: https://www.britannica.com/biography/Georg-Ohm#/media/1/426058/151574 (hentet 15.11.2023).

[10] Louis Hierle. *Portræt af Charles-Augustin de Coulomb*. Olie på lærred. Versailles. 1894.

[11] KMJ. *Glühlampe der Marke Neolux mit klarem Glaskolben*. URL: https://commons.wikimedia.org (hentet 20.11.2023).

[12] *Portræt af André-Marie Ampère*. Musée de Poleymieux.