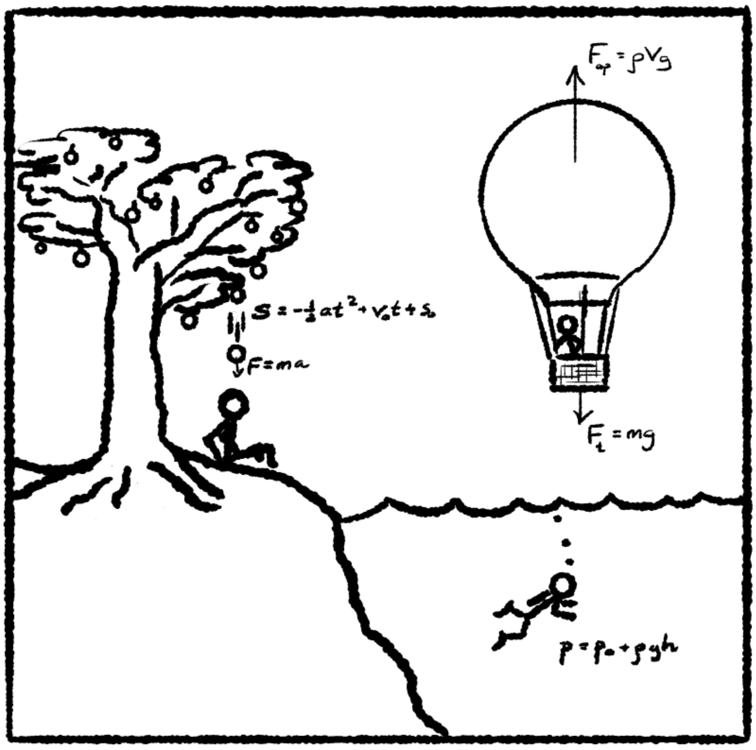
Mike Vandal Auerbach

MEKANIK

Version 1.0

20. februar 2024



www.mathematicus.dk

Mekanik
Version 1.0, 2024

Værdien af forskellige konstanter er, med mindre andet er angivet, taget fra Databog Fysik Kemi, 11. udgave.[1]

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Indhold

— 1 —

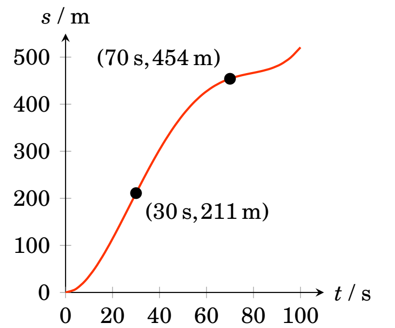
Sted, hastighed, acceleration

Mekanik er en gren af fysikken der handler om at beskrive genstandes bevægelse. Udgangspunktet for en mekanisk beskrivelse er at analysere de kræfter der virker på en genstand, for herved at kunne bestemme genstandens acceleration, hastighed og position som en funktion af tiden. Omvendt kan man også analysere en genstands sted, hastighed og acceleration for at bestemme den resulterende kraft på genstanden.

1-1 Sted

Hvis en genstand bevæger sig, vil den befinde sig forskellige steder til forskellige tidspunkter. Hvis man ser på en cyklist der cykler ud ad en vej, kan man registrere hvor langt cyklen er kørt og hvor lang tid det har taget. Ud fra disse målinger kan man konstruere en (t,s)-graf over cykelturen, hvor tiden t afsættes ud ad førsteaksen, og afstanden s afsættes ud ad andenaksen.

Figur 1.1 viser en (t,s)-graf over cykelturen. Hvert punkt på grafen svarer til en tid og et sted. Således viser de to markerede punkter $(30\,\mathrm{s}, 211\,\mathrm{m})$ og $(70\,\mathrm{s}, 454\,\mathrm{m})$ at efter 30 s har cyklisten cyklet 211 m, og efter 70 s har han cyklet 454 m.



Figur 1.1: En (t,s)-graf for en kort cykeltur.

Øvelse 1.1

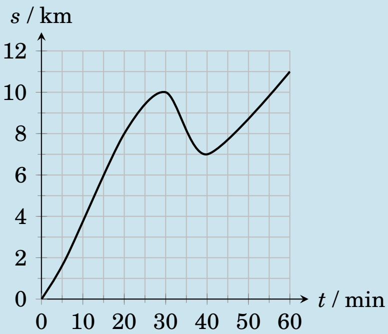
Grafen til højre viser en (t,s)-graf for en cykeltur.

a) Hvor langt er cyklisten kommet efter 20 minutter?

b) Beskriv hvad der sker efter 30 minutter.

c) Hvor lang tid varer turen?

d) Hvor lang er cykelturen i alt?



1-2 Hastighed

Hastighed er et mål for hvor hurtigt en genstand flytter sig en bestemt strækning. Hvis man kigger på grafen for cykelturen på figur 1.1, ser man at cyklisten har kørt 211 m efter 30 s og 454 m efter 70 s. Cyklisten har altså kørt en strækning på

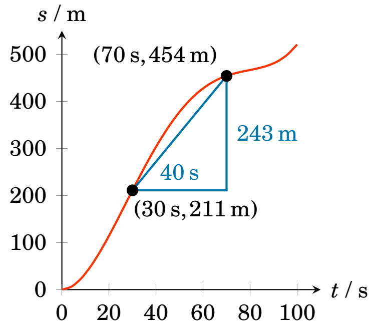
$$\Delta s = 454\,\mathrm{m} - 211\,\mathrm{m} = 243\,\mathrm{m}$$

på tiden

$$\Delta t = 70\,\mathrm{s} - 30\,\mathrm{s} = 40\,\mathrm{s}\,.$$

Herved bliver cyklistens middelhastighed

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{243\,\mathrm{m}}{40\,\mathrm{s}} = 6{,}1\,\mathrm{m/s}\,.$$



Figur 1.2: Middelhastigheden kan beregnes ud fra to punkter på (t,s)-grafen.

Som man kan se på figur 1.2 svarer beregningen af middelhastigheden til at man finder hældningskoefficienten af den rette linje der går mellem de to punkter $(30\,\mathrm{s}, 211\,\mathrm{m})$ og $(70\,\mathrm{s}, 454\,\mathrm{m})$ på (t,s)-grafen. Generelt gælder der altså at

Middelhastighed

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}\,,$$

dvs. middelhastigheden svarer til hældningskoefficienten af den rette linje gennem punkterne (t_1, s_1) og (t_2, s_2) på bevægelsens (t,s)-graf.

Eksempel 1.2

En bil kører 30 km på 20 minutter. Bilens middelhastighed er så

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{30\,\mathrm{km}}{20\,\mathrm{min}} = \frac{30\,\mathrm{km}}{\frac{20}{60}\,\mathrm{h}} = 90\,\mathrm{km/h}\,.$$

Bilen tilbagelægger altså strækningen med en middelhastighed på 90 km/h.

Øvelse 1.3

En cyklist cykler 3 km på 8 min.

a) Bestem cyklistens middelhastighed.

Cyklisten kører nu op ad bakke og sænker sin fart til 15 km/h.

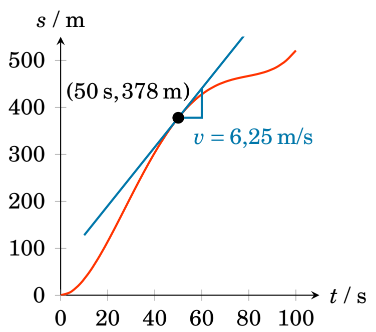
b) Hvor langt kommer cyklisten nu på 8 min?

Øvelse 1.4

En motionsløber løber 5 km med en middelhastighed på 10 km/h.

a) Hvor lang tid tager det at løbe de 5 km?

b) Hvor hurtigt skal man løbe for at kunne løbe turen på 25 minutter?



Figur 1.3: Momentanhastigheden er lig med tangenthældningen i et punkt på (t,s)-grafen.

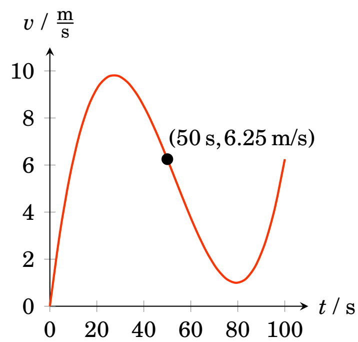
Middelhastigheden er som sagt hældningskoefficienten af en linje der går gennem to punkter på (t,s)-grafen. Hvis man i stedet er interesseret i at finde *momentanhastigheden*, dvs. hastigheden til ét bestemt tidspunkt, må man skulle finde hældningen af grafen i dette punkt. Dvs. man skal finde hældningen af den linje der tangerer (t,s)-grafen i det pågældende punkt.

Figur 1.3 viser igen (t,s)-grafen, men denne gang er tangenten i punktet $(50\,\mathrm{s}, 378\,\mathrm{m})$ tegnet. Hældningen af denne tangent er $6{,}25$ m/s, dvs. dette er cyklistens hastighed til tiden $t = 50$ s. Idet tangenthældningen er givet ved den afledte funktion, må der altså gælde at

Momentanhastighed

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = s'(t)\,.$$

Hvis man kan bestemme hastighedsfunktionen $v(t)$ til alle tidspunkter, kan man lave en (t,v)-graf. Figur 1.4 viser en (t,v)-graf for cyklistens bevægelse. Grafen viser at cyklisten starter med en hastighed på $v = 0$ til tiden $t = 0$ hvorefter hastigheden vokser til næsten 10 m/s og derefter aftager og så vokser igen.



Figur 1.4: En (t,v)-graf er en graf over momentanhastigheden v som funktion af tiden t.

Øvelse 1.5

Figuren herunder viser (t,s)-grafen for en bold der kastes op i luften og falder ned igen.

a) Bestem middelhastigheden fra $t = 0$ s til $t = 0{,}4$ s.

b) Bestem momentanhastighederne til tidspunkterne $t = 0$ s, $t = 0{,}4$ s og $t = 0{,}8$ s.

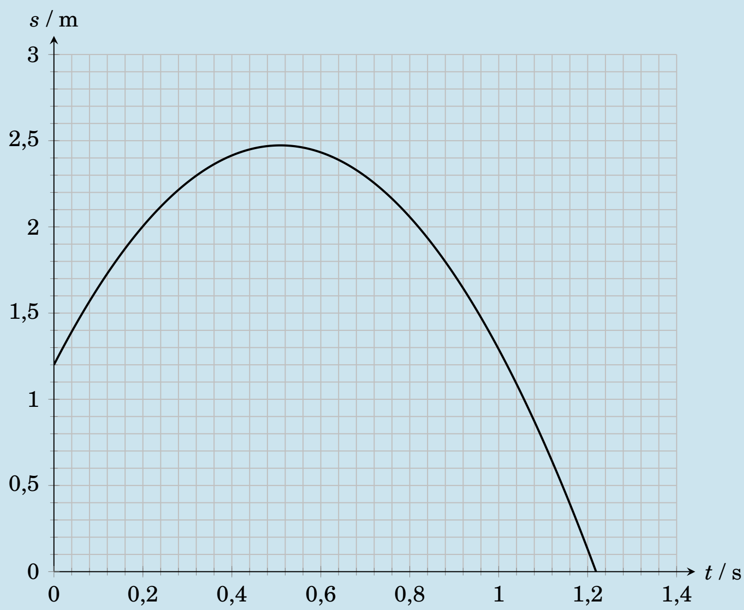
c) Brug de fundne momentanhastigheder til at tegne en (t,v)-graf for bevægelsen.

Boldens bevægelse kan beskrives ved stedfunktionen

$$s(t) = -4{,}91\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t^2 + 5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot t + 1{,}2\,\mathrm{m}\,.$$

d) Bestem et udtryk for hastigheden $v(t)$.

e) Stemmer dette udtryk overens med grafen i punkt c)?



I øvelsen ovenfor undersøges en bold der kastes opad og falder ned igen. Når bolden er på vej ned, er (t,s)-grafen aftagende. Herved bliver (t,v)-grafen negativ, dvs. når en genstand bevæger sig bagud er dens hastighed negativ. Hastigheden angiver således både hvor hurtigt en genstand bevæger sig og i hvilken retning.

Hastighed og fart

I fysik skelnes der mellem begreberne *hastighed* og *fart*. Hastigheden er den størrelse der er blevet omtalt ovenfor, farten er den numeriske værdi af hastigheden,

$$\boxed{\mathrm{fart} = |v|\ .}$$

Hastigheden kan som sagt negativ (hvis den er det, bevæger genstanden sig bagud), men det kan farten ikke. Dvs. hastigheden angiver bevægelsens størrelse og retning, mens farten kun angiver hastighedens størrelse.

Det kan virke unødvendigt at skelne mellem disse to begreber, men forskellen bliver vigtigere ved bevægelse i 2 eller 3 dimensioner, idet hastigheden her er en vektor. Farten er så længden af denne vektor, dvs. hastigheden er en vektor, mens farten er en positiv størrelse.

Eksempel 1.6
En sten der falder fra en højde på 8 m, rammer jorden efter 1,3 s. Hvis opad regnes for den positive retning, så er stenens middelhastighed

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-8\ \mathrm{m}}{1{,}3\ \mathrm{s}} = -6{,}2\ \mathrm{m/s}\ .$$

Δs er negativ netop fordi stenen falder, og stenens middelhastighed er derfor −6,2 m/s. Hastighedens fortegn viser at stenen er på vej nedad.

Farten er derimod 6,2 m/s (uden fortegn). Dette tal viser altså kun hvor hurtigt stenen bevæger sig.

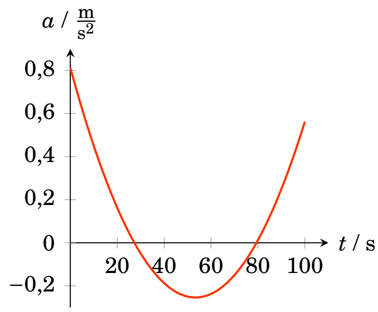
1-3 Acceleration

Acceleration er hastighedsændring pr. tid, dvs. lige som hastigheden kan beregnes ud fra stedet, kan accelerationen beregnes ud fra hastigheden. Den gennemsnitlige og den momentane acceleration kan altså beregnes vha. formlerne

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{a} &= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \\ a(t) &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v'(t) = s''(t)\ . \end{aligned}}$$

Det følger af disse formler at enheden for acceleration er m/s/s, dvs. m/s^2.

Man kan bestemme accelerationsfunktionen $a(t)$ ved at differentiere hastighedsfunktionen $v(t)$. For cyklisten får man (t,a)-grafen på figur 1.5. På grafen kan man se at accelerationen starter med en positiv værdi, her øger cyklisten altså sin hastighed. Men accelerationen falder, dvs. cyklisten øger sin hastighed langsommere og langsommere, og efter knap 30 s bliver accelerationen negativ, dvs. cyklisten bremser.



Figur 1.5: Acceleration som funktion af tiden.

Eksempel 1.7
En bil der kører med en hastighed på 90 km/h bremser helt op på 3,5 s. Dvs.

$$\Delta v = -80\,\text{km/h} \quad \text{og} \quad \Delta t = 3{,}5\,\text{s}\,.$$

Δv er negativ fordi bilens hastighed aftager. Middelaccelerationen er så

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-80\,\text{km/h}}{3{,}5\,\text{s}} = \frac{-80\cdot\frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}}}{3{,}5\,\text{s}} = -6{,}3\,\text{m/s}^2\,.$$

Bilen har altså en middelacceleration på $-6{,}3$ m/s^2.

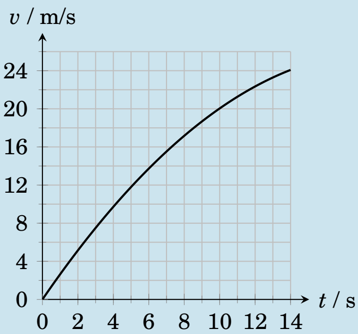
Øvelse 1.8

Grafen til højre viser en (t,v)-graf for en bil der øger sin hastighed fra 0 til 24 m/s (86,4 km/h).

a) Hvor lang tid tager det at accelerere bilen op til denne hastighed?

b) Bestem middelaccelerationen.

c) Bestem accelerationen til tiden $t = 10\,\text{s}$.



1-4 Sted og hastighed som arealer under grafer

For en bevægelse med konstant hastighed er

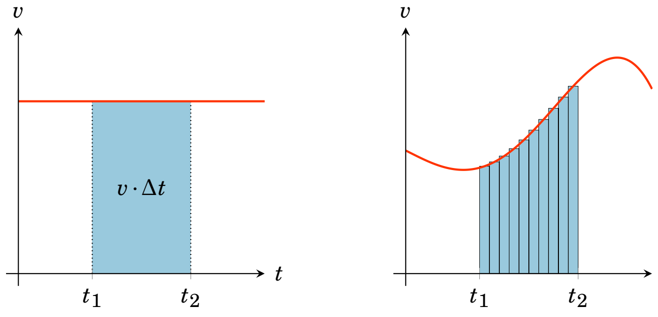
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta s = v\cdot\Delta t\,.$$

Dette betyder at Δs er arealet under (t,v)-grafen i tidsrummet fra t_1 til t_2 (se figur 1.6(a)). Hvis hastigheden derimod ikke er konstant, vil denne formel kun kunne bruges i meget små tidsrum hvor hastigheden er næsten konstant. En god tilnærmelse til Δs vil så kunne ved at inddele tidsrummet fra t_1 til t_2 i mindre intervaller, beregne $v\cdot\Delta t$ og summere værdierne. Δs bliver så lig summen af rektanglerne på figur 1.6(b). Denne tilnærmelse bliver bedre for mindre tidsintervaller hvilket betyder at Δs også her er lig arealet under (t,v)-grafen.

At Δs er arealet under (t,v)-grafen følger også af at $v(t) = s'(t)$. Dette betyder nemlig at s er en stamfunktion til v, dvs.

$$\Delta s = s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Figur 1.6: Den afstand Δs som en genstand flytter sig i tidsrummet fra t_1 til t_2, kan beregnes som arealet under grafen i dette tidsrum



(a) Konstant hastighed.

(b) Variabel hastighed.

På samme måde kan man argumentere for at Δv er arealet under (t,a)-grafen. Der gælder altså at

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Eksempel 1.9

Et fly der sætter i gang på landingsbanen har en acceleration der er givet ved funktionen

$$a(t) = -0{,}049\,\mathrm{m/s^3} \cdot t + 3{,}3\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Efter 10 sekunder er dette flys hastighed vokset med

$$\Delta v = \int_{0\,\mathrm{s}}^{10\,\mathrm{s}} (-0{,}049\,\mathrm{m/s^3} \cdot t + 3{,}3\,\mathrm{m/s^2})\,\mathrm{d}t = 31\,\mathrm{m/s}\,.$$

På 10 s vokser flyets hastighed altså med 31 m/s (110 km/h).

Øvelse 1.10

En genstand i frit fald har en hastighedsfunktion der er givet ved

$$v(t) = 9{,}82\,\mathrm{m/s^2} \cdot t\,.$$

a) Hvad er genstandens hastighed efter 3 sekunder?

b) Hvor langt er genstanden faldet på 3 sekunder?

— 2 —

Kræfter og bevægelse

Den italienske astronom og fysiker Galileo Galilei (1564–1642) var den første der kom frem til at det var acceleration frem for hastighed der spillede en afgørende rolle i de love der gælder for objekters bevægelse.[6] Galileis (og andres arbejde) banede vejen for at Isaac Newton (1642–1727) kunne beskrive sammenhængen mellem kræfter og objekters bevægelse i sit kendte værk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (naturfilosofiens matematiske principper) hvori han opstillede tre naturlove for sammenhængen mellem kræfter der påvirker en genstand, og denne genstands bevægelse.[7]

Figur 2.1: Galileo Galilei.[10]

Newtons love

1. lov (inertiens lov) En genstand der ikke påvirkes af en kraft, vil ligge stille eller bevæge sig ad en ret linje med konstant fart.

2. lov En genstands acceleration er proportional med den resulterende kraft på genstanden og omvendt proportional med genstandens masse:

$$a = \frac{F_{\text{res}}}{m}\,.$$

3. lov (loven om aktion og reaktion) Hvis en genstand påvirker en anden genstand med en kraft, vil den anden genstand påvirke den første med en lige så stor og modsat rettet kraft.

2-1 Bevægelse med konstant hastighed

Ifølge Newtons 1. lov, vil en genstand der ikke påvirkes af en kraft, ligge stille eller bevæge sig med konstant fart ad en ret linje. Hvis genstanden ikke påvirkes af en kraft, er den resulterende kraft $F_{\text{res}} = 0$. Heraf følger af Newtons 2. lov, at genstandens acceleration er

$$a = \frac{0}{m} = 0\,,$$

og dette betyder at hastigheden er konstant. Idet hastigheden er den afledte funktion af stedfunktionen, må stedfunktionens graf altså have den samme tangenthældning overalt, dvs. $s(t)$ er en lineær funktion. Der gælder altså at

Bevægelse med konstant hastighed

$$v(t) = v$$
$$s(t) = v \cdot t + s_0\,,$$

hvor v er den konstante hastighed, og s_0 er positionen til tiden $t = 0$.

Eksempel 2.1
En cyklist kører ligeud ad en vej med en konstant fart på 6 m/s. Cyklistens position til tiden $t = 0$ er $s_0 = 3$ m (dvs. cyklisten starter 3 m henne ad vejen). Hastigheden og stedet er så givet ved funktionerne

$$v(t) = 6\,\mathrm{m/s}$$
$$s(t) = 6\,\mathrm{m/s} \cdot t + 3\,\mathrm{m}\,.$$

Øvelse 2.2

To biler kører ud ad en lang lige vej. Bil A kører med farten $v_A = 25\,\mathrm{m/s}$, og bil B kører med farten $v_B = 20\,\mathrm{m/s}$. Til tiden $t = 0$ kører bil B 100 m foran bil A.

a) Opstil stedfunktioner der kan beskrive positionen af bil A og B.

b) Hvor lang tid går der før bil A overhaler bil B?

c) Hvor langt har bil A kørt på dette tidspunkt?

2-2 Bevægelse med konstant acceleration

Hvis den resulterende kraft på en genstand er konstant, giver Newtons 2. lov at accelerationen også er konstant. Idet accelerationen er den afledte af hastigheden, må der derfor gælde at hastigheden er en lineær funktion af tiden, så

$$a(t) = a$$
$$v(t) = a \cdot t + v_0\,,$$

hvor a er den konstante acceleration, og v_0 er hastigheden til tiden $t = 0$. Det betyder at til tiden $t = 0$ er hastigheden v_0, og til tiden t er hastigheden v. Middelhastigheden i dette tidsrum er derfor

$$\overline{v} = \frac{v + v_0}{2} = \tfrac{1}{2} \cdot (v + v_0)\,. \tag{2.1}$$

Hvis genstandens position til tiden $t = 0$ er s_0, og den til tiden t er s, kan middelhastigheden også beregnes som

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - 0} = \frac{s - s_0}{t}\,. \tag{2.2}$$

Uanset om man beregner middelhastigheden vha. (2.1) eller (2.2), må man få det samme resultat, hvilket betyder at

$$\frac{s - s_0}{t} = \tfrac{1}{2} \cdot (v + v_0) \quad \Leftrightarrow \quad s - s_0 = \tfrac{1}{2} \cdot (v + v_0) \cdot t\,.$$

Men for en bevægelse med konstant acceleration er hastigheden, som nævnt ovenfor, $v = a \cdot t + v_0$, dvs.

$$\begin{aligned} s - s_0 &= \tfrac{1}{2} \cdot (a \cdot t + v_0 + v_0) \cdot t && \Leftrightarrow \\ s - s_0 &= \tfrac{1}{2} \cdot (a \cdot t + 2 \cdot v_0) \cdot t && \Leftrightarrow \\ s - s_0 &= \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t && \Leftrightarrow \\ s &= \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \,. \end{aligned}$$

For en bevægelse med konstant acceleration gælder der altså at

Bevægelse med konstant acceleration

$$\begin{aligned} a(t) &= a \\ v(t) &= a \cdot t + v_0 \\ s(t) &= \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \,, \end{aligned}$$

hvor a er den konstante acceleration, og v_0 og s_0 er hhv. positionen og hastigheden til tiden $t = 0$.

Eksempel 2.3
En bil kører med den konstante fart $v = 20\,\mathrm{m/s}$. Når bilen har kørt 150 m træder føreren på speederen, sådan at bilen begynder at accelererere med en acceleration på $2{,}4\,\mathrm{m/s^2}$. Fra det tidspunkt føreren træder på speederen, kan bilens bevægelse beskrives som

$$\begin{aligned} a(t) &= 2{,}4\,\mathrm{m/s^2} \\ v(t) &= 2{,}4\,\mathrm{m/s^2} \cdot t + 20\,\mathrm{m/s} \\ s(t) &= 1{,}2\,\mathrm{m/s^2} \cdot t^2 + 20\,\mathrm{m/s} \cdot t + 150\,\mathrm{m} \,. \end{aligned}$$

Øvelse 2.4

En bil starter fra hvile med en acceleration på $3{,}2\,\mathrm{m/s^2}$.

a) Skriv hastigheds- og stedfunktionen op for bilens bevægelse.
b) Hvor lang tid tager det bilen at komme op på en fart på 100 km/h?
c) Hvor langt har bilen kørt i dette tidsrum?
d) Hvor lang tid tager det bilen at køre 250 m?

Øvelse 2.5

En cyklist kommer kørende med en fart på 10 m/s og bremser op. Efter 2 s står cyklen stille.

a) Bestem cyklens acceleration.
b) Hvor langt når cyklen at køre inden den er bremset op?

I en del tilfælde hvor man har konstant acceleration, er man ikke interesseret i hvor lang tid der går, men snarere hvor langt noget bevæger sig, når det har en bestemt acceleration. Hastighedsfunktionen er $v(t) = a \cdot t + v_0$. Det giver at

$$v^2 = (a \cdot t + v_0)^2 = a^2 \cdot t^2 + 2 \cdot a \cdot t \cdot v_0 + v_0^2\,,$$

som kan omskrives til

$$\begin{aligned} v^2 - v_0^2 &= a^2 \cdot t^2 + 2 \cdot a \cdot v_0 \cdot t \qquad \Leftrightarrow \\ &= 2a \cdot \left(\tfrac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t\right)\,. \end{aligned}$$

Parentesen i dette udtryk svarer til $s - s_0$, hvilket betyder at der gælder

$$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot \Delta s\,, \tag{2.3}$$

hvor $\Delta s = s - s_0$ er den strækning der tilbagelægges, når hastigheden ændres fra v_0 til v.

Eksempel 2.6
En bil kommer kørende med en fart på 80 km/h og bremser. Under opbremsningen er accelerationen $a = -5{,}7\ \mathrm{m/s^2}$.

Formlen (2.3) kan omskrives til

$$\Delta s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}\,.$$

Når bilen bremser, går hastigheden fra $v_0 = 80\,\mathrm{km/h} = 22{,}2\,\mathrm{m/s}$ til $v = 0$. Bilens bremselængde bliver derfor

$$\Delta s = \frac{0^2 - (22{,}2\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot (-5{,}7\,\mathrm{m/s^2})} = 43{,}3\,\mathrm{m}\,.$$

Dvs. bilen når at køre 43,3 m inden den er bremset helt op.

2-3 Frit fald og lodret kast

En genstand der bevæger sig frit i Jordens tyngdefelt er påvirket af tyngdekraften

$$F_\mathrm{t} = -m \cdot g\,,$$

hvor fortegnet angiver at kraften peger nedad. Ser man bort fra luftmodstand, er dette den resulterende kraft på genstanden, dvs. accelerationen er

$$a = \frac{-m \cdot g}{m} = -g\,.$$

Der er altså tale om en bevægelse med en konstant acceleration på $-g$. En bevægelse lodret i Jordens tyngdefelt kan derfor beskrives ved ligningerne

$$\begin{aligned} v(t) &= -g \cdot t + v_0 \\ s(t) &= -\tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0\,. \end{aligned}$$

Eksempel 2.7
En genstand falder fra en højde på 50 m. Idet genstanden falder fra hvile, er begyndelseshastigheden $v_0 = 0$. Dvs. stedfunktionen er

$$s(t) = -\tfrac{1}{2} \cdot 9{,}82\,\text{m/s}^2 \cdot t^2 + 50\,\text{m}\,.$$

Når genstanden rammer jorden er $s(t) = 0$. Dette giver ligningen

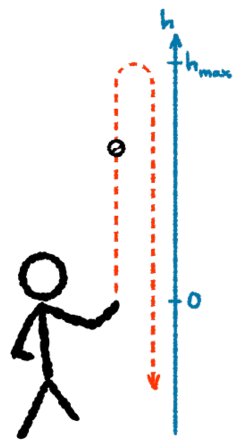
$$-\tfrac{1}{2} \cdot 9{,}82\,\text{m/s}^2 \cdot t^2 + 50\,\text{m} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{50\,\text{m}}{\tfrac{1}{2} \cdot 9{,}82\,\text{m/s}^2}} = 3{,}19\,\text{s}\,.$$

Det tager altså genstanden 3,19 s at falde de 50 m.

Man kan finde genstandens hastighed til dette tidspunkt ved at indsætte denne tid i hastighedsfunktionen,

$$v(3{,}19\,\text{s}) = -9{,}82\,\text{m/s}^2 \cdot 3{,}19\,\text{s} = -31{,}3\,\text{m/s}\,.$$

En genstand der falder fra en højde på 50 m, rammer altså jorden med en fart på 31,3 m/s. Hastighedens fortegn viser at genstanden er på vej nedad.



Figur 2.2: En bold der kastes lodret op, bremses af tyngdekraften ind til den når en hastighed på 0 ved sin maksimale højde.

Når en genstand kastes lodret opad, har den en positiv begyndelseshastighed. Men da accelerationen er negativ vil denne hastighed blive mindre og mindre, ind til genstanden når sin maksimale højde hvorefter den begynder at falde nedad igen (se figur 2.2). Ved den maksimale højde er genstandens hastighed 0, dvs.

$$-g \cdot t + v_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{v_0}{g}\,.$$

Til denne tid når genstanden altså sin maksimale højde. Hvis genstanden kastes fra højden 0, er $s_0 = 0$. Den maksimale højde kan man finde ved at indsætte den beregnede tid i stedfunktionen,

$$s\left(\frac{v_0}{g}\right) = -\tfrac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{2g}\,.$$

Den maksimale højde i et lodret kast er altså

Maksimal højde i et lodret kast

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\,. \tag{2.4}$$

Eksempel 2.8
En bold kastes opad med en fart på 9,1 m/s. Boldens maksimale højde bliver så

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(9{,}1\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}82\,\text{m/s}^2} = 4{,}2\,\text{m}\,.$$

Bolden flyver altså 4,2 m op før den falder ned igen.

Øvelse 2.9

Hvor langt op kommer en sten, hvis man kaster den opad med en fart på 12 m/s.

Øvelse 2.10

En person står på en balkon 6,2 m over gaden. Personen kaster en bold opad med en fart på 8,3 m/s.

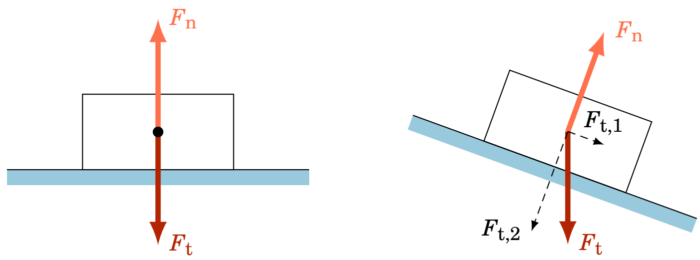
a) Hvor langt over gaden kommer bolden op?

Bolden falder forbi balkonen og ned på gaden.

b) Med hvilken fart rammer bolden gaden?

2-4 Bevægelse på et skråplan

Hvis en genstand ligger stille på en vandret flade, er den påvirket af tyngdekraften og en normalkraft fra underlaget. Disse to kræfter giver tilsammen en resulterende kraft på 0 (se figur 2.3(a)).

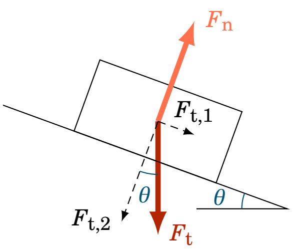


(a) Her er $F_n = F_g$. (b) Her er $F_n = F_{t,2}$.

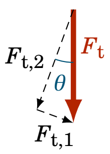
Figur 2.3: For en genstand der ligger vandret, er normalkraften lige så stor som tyngdekraften.
For en genstand på et skråplan er normalkraften lige så stor som den komposant af tyngdekraften $F_{t,2}$, der står vinkelret på skråplanet.

Ligger genstanden derimod på et skråplan, er tyngdekraften og normalkraften ikke lige store. Det skyldes at normalkraften står vinkelret på underlaget; normalkraftens størrelse vil derfor svare til en komposant af tyngdekraften der står vinkelret på skråplanet. På figur 2.3(b) svarer dette til kraften $F_{t,2}$.

Situationen ses gentegnet på figur 2.4. En geometrisk analyse viser at når skråplanet danner vinklen θ med vandret, vil dette også være vinklen mellem tyngdekraften F_t og komposanten $F_{t,2}$.



(a) Genstand på et skråplan.



(b) Tyngdekraftens komposanter.

Figur 2.4: Geometrisk analyse af kræfterne på en genstand på et skråplan.

På figuren ses at tyngdekraften og dens komposanter tilsammen udgør en retvinklet trekant. Herudfra følger at der gælder

$$F_{t,1} = F_t \cdot \sin(\theta) = m \cdot g \cdot \sin(\theta)\,.$$

En genstand der bevæger sig på et skråplan vil derfor have en acceleration på

$$a = g \cdot \sin(\theta)\,,$$

hvor θ er den vinkel skråplanet danner med vandret. Dette gælder naturligvis kun hvis man ser bort fra gnidning mellem genstanden og underlaget. I afsnit 5-2 beskrives hvordan situationen ser ud hvis gnidning medregnes.

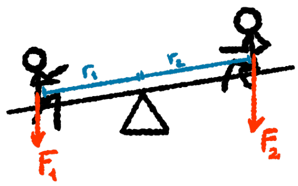
— 3 —

Vægtstangsprincippet

Figur 3.1 viser to personer der sidder på en vippe. De to personer påvirker begge vippen med en kraft (pga. deres tyngdekraft). Disse kræfter vil få vippen til at dreje omkring dens omdrejningspunkt. Det viser sig at selvom de to personer ikke vejer lige meget, er det stadig muligt for vippen at være i balance. Det kræver blot at de to personer ikke er lige langt fra omdrejningspunktet. Der gælder nemlig at der er balance hvis

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2 \,, \tag{3.1}$$

hvor F_1, F_2, r_1 og r_2 er som angivet på figuren.



Figur 3.1: To personer på en vippe.

Eksempel 3.1
Antag at de to personer på figur 3.1 har masser på hhv. $m_1 = 50\,\mathrm{kg}$ og $m_2 = 70\,\mathrm{kg}$, og at person nr. 1 sidder i afstanden $r_1 = 1{,}5\,\mathrm{m}$ fra omdrejningspunktet.

De to kræfter er tyngdekræfterne på de to personer, dvs.

$$F_1 = m_1 \cdot g \quad \text{og} \quad F_2 = m_2 \cdot g \,.$$

Så er der balance når

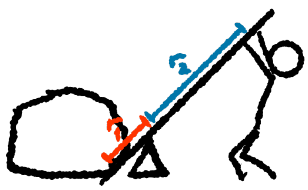
$$\begin{aligned} F_1 \cdot r_1 &= F_2 \cdot r_2 && \Leftrightarrow \\ m_1 \cdot g \cdot r_1 &= m_2 \cdot g \cdot F_2 && \Leftrightarrow \\ m_1 \cdot r_1 &= m_2 \cdot r_2 && \Leftrightarrow \\ \frac{m_1 \cdot r_1}{m_2} &= r_2 \,, \end{aligned}$$

altså når

$$r_2 = \frac{50\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m}}{70\,\mathrm{kg}} = 1{,}07\,\mathrm{m} \,.$$

De to personer balancerer altså på vippen når den ene sidder 1,5 m fra omdrejningspunktet, og den anden sidder i en afstand af 1,07 m.

Formel (3.1) ovenfor kaldes også *vægtstangsprincippet*. Dette skyldes at ligningen viser at man kan flytte forholdsvist tunge objekter hvis man er i besiddelse af en vægtstang.



Figur 3.2: En person flytter en tung sten med en vægtstang.

Eksempel 3.2
Figur 3.2 viser en person der vil flytte en tung sten med en masse på 241 kg. Personen har anbragt en vægtstang under stenen,

og vægtstangen hviler på et omdrejningspunkt. Afstanden r_1 fra stenen til omdrejningspunktet er $r_1 = 40\,\text{cm}$.

Tyngdekraften på stenen er

$$F_\text{t} = m \cdot g = 241\,\text{kg} \cdot 9{,}82\,\text{N/kg} = 2367\,\text{N}\,,$$

men personen kan kun levere en trækkraft på $F_\text{træk} = 750\,\text{N}$. Vægtstangsprincippet siger i dette tilfælde at personen alligevel kan flytte stenen når blot

$$F_\text{t} \cdot r_1 = F_\text{træk} \cdot r_2\,,$$

hvor r_1 og r_2 er afstandene på figuren.

Dette giver at

$$r_2 = \frac{F_\text{t} \cdot r_1}{F_\text{træk}} = \frac{2367\,\text{N} \cdot 40\,\text{cm}}{750\,\text{N}} = 126\,\text{cm}\,.$$

Dvs. personen kan løfte stenen ved at trække i vægtstangen i en afstand af 126 cm eller mere fra omdrejningspunktet.

Øvelse 3.3

En person der vejer 70 kg sætter sig på en vippe 125 cm fra omdrejningspunktet. Hvor langt fra omdrejningspunktet skal en person på 90 kg sætte sig på den modsatte side for at der er balance?

3-1 Kraftmoment

Vægtstangsprincippet beskrevet ovenfor giver anledning til definition af en ny fysisk størrelse, det såkaldte *kraftmoment*, τ

Kraftmoment

$$\tau = r \cdot F \cdot \sin(\theta)\,,$$

hvor r er afstanden til omdrejningspunktet, F er kraften, og θ er vinklen mellem kraften og linjen til omdrejningspunktet.[1]

Kraftmomentet regnes positivt når kraften trækker i positiv omløbsretning (dvs. mod uret), og negativt når kraften trækker i negativ omløbsretning.

Vægtstangsprincippet kan nu udtrykkes ved at sige at der er balance når det samlede kraftmoment er 0.

[1] I virkeligheden er kraftmomentet en vektor der er defineret ved

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}\,,$$

hvor $\vec{F}$ er kraften, og $\vec{r}$ er vektoren fra angrebspunktet til omdrejningspunktet. Udregning heraf kræver dog kendskab til *vektorproduktet* $\times$.

— 4 —
Mekanisk energi

Som bekendt kan man beregne det arbejde som en (konstant) kraft udfører på en genstand vha. formlen

$$A = F \cdot \Delta s \,, \tag{4.1}$$

hvor F er kraften og Δs er den strækning genstanden flytter sig.

En genstand befinder sig i et konstant tyngdefelt hvis tyngdekraften på genstanden er konstant. Dette gælder f.eks. med god tilnærmelse hvis en genstand befinder sig tæt ved jordoverfladen (eller overfladen på en anden planet).

Hvis en genstand der befinder sig i et konstant tyngdefelt skal løftes opad, skal den kraft der påvirker genstanden være lige så stor og modsat rettet tyngdekraften. Det giver en resulterende kraft på

$$F_{\text{res}} = m \cdot g \,.$$

Løftes genstanden fra højden 0 til højden h, er $\Delta s = h - 0 = h$, og derfor bliver det udførte arbejde,

$$A = m \cdot g \cdot h \,.$$

Når en genstand løftes højden h, får genstanden altså tilført denne energi, og derfor er den potentielle energi af en genstand i Jordens tyngdefelt

Potentiel energi i et konstant tyngdefelt

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h \,.$$

Man kan også bestemme en formel for den kinetiske energi af en genstand vha. formel 4.1. Hvis en genstand accelereres fra hastigheden 0 til hastigheden v af en konstant kraft, er accelerationen også konstant. Det betyder at arbejdet på genstanden er

$$A = F_{\text{res}} \cdot \Delta s = m \cdot a \cdot \Delta s \,.$$

Hvis genstandens starthastighed er 0, vil der gælde disse ligninger for bevægelse med konstant acceleration (se afsnit 2-2):

$$v = a \cdot t \quad \text{og} \quad \Delta s = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \,.$$

Heraf fås at arbejdet er

$$\begin{aligned} A &= m \cdot a \cdot \Delta s = m \cdot a \cdot \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot a^2 \cdot t^2 = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot (a \cdot t)^2 = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \,. \end{aligned}$$

Når en genstand accelereres fra en hastighed på 0 til en hastighed på v, får genstanden tilført denne energi. Altså er den kinetiske energi af en genstand givet ved formlen

Kinetisk energi

$$E_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \,.$$

Den samlede mekaniske energi af en genstand er

$$E_{\text{mek}} = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h \,.$$

Hvis en genstand ikke er påvirket af gnidningskræfter (eller de er små nok til at man kan se bort fra dem), så er denne energi bevaret.

Eksempel 4.1
En bold på 145 g slippes fra en højde på 1,6 m over gulvet. Da boldens fart i begyndelsen af faldet er 0, er den samlede mekaniske energi

$$E_{\text{mek}} = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}125\,\text{kg} \cdot 0 + 0{,}125\,\text{kg} \cdot 9{,}82\,\text{m/s}^2 \cdot 1{,}6\,\text{m} = 2{,}28\,\text{J} \,.$$

Når bolden er faldet halvdelen af vejen mod gulvet (dvs. den er 0,8 m over gulvet), er den potentielle energi halveret. Men idet den mekaniske energi er bevaret, vil den manglende potentielle energi været blevet omdannet til kinetisk, således at

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}} = 1{,}14\,\text{J} \,.$$

Dvs. $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ stadig giver 2,28 J.

Lige inden bolden rammer gulvet, er højden 0, og dvs. at al den mekaniske energi består af kinetisk energi. Herudfra kan man beregne den fart bolden rammer gulvet med.

Øvelse 4.2

En bold på 96 g kastes opad med en begyndelsesfart på 17 m/s.

a) Hvad er boldens mekaniske energi?

b) Hvor højt kommer bolden op?

På sin vej ned rammer bolden en tagrende 3,2 m over jorden.

c) Med hvilken fart rammer bolden tagrenden?

Bolden mister 31% af sin energi ved sammenstødet med tagrenden, hvorefter den hopper opad igen.

d) Hvor højt kommer bolden nu op?

— 5 —

Gnidningskræfter

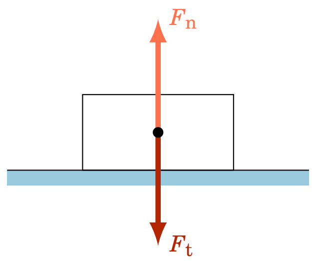
Én af de ting man ofte udelader af simple fysiske modeller, er gnidningskræfter. Det kan være gnidning mod et underlag eller luftmodstand i et frit fald. Disse kræfter kan sagtens beskrives; man udelader dem dog ofte idet deres bidrag i mange situationer er meget små, og modellerne ellers bliver temmeligt komplicerede.

Når genstande bevæger sig på et underlag, kan man dog sjældent se bort fra gnidningskræfter, herunder følger derfor en beskrivelse af disse.

5-1 Coulombs gnidningslov

Ifølge Newtons første lov vil en genstand der ikke er påvirket af en kraft, ligge stille eller bevæge sig ad en ret linje med konstant hastighed. Lader man nu f.eks. en genstand glide hen ad et bord, er det dog tydeligt at genstanden ikke bevæger sig ligeud i det uendelige. At genstanden bremses skyldes først og fremmest gnidning mod underlaget. Denne gnidningskraft afhænger af materialernes beskaffenhed, f.eks. er gnidningskraften stor mellem gummi og asfalt, mens den er lille mellem metal og is.

Gnidningskraften på en genstand er proportional med normalkraften. Normalkraften er en reaktionskraft der står vinkelret på underlaget. En genstand der bliver presset ned mod et underlag af tyngdekraften, vil ifølge Newtons tredje lov blive påvirket af en reaktionskraft der peger den anden vej, se figur 5.1.



Figur 5.1: Normalkraft for en genstand på et vandret underlag.

Gnidningskraften som en genstand udsættes for, er proportional med normalkraften. Denne sammenhæng kaldes *Coulombs gnidningslov*:

Coulombs gnidningslov

$$F_g = \mu \cdot F_n \,. \qquad (5.1)$$

Proportionalitetskonstanten μ kaldes *gnidningskoefficienten*. En oversigt over forskellige gnidningskoefficienter kan ses i tabel 5.2.

Eksempel 5.1
En træklods på 250 g trækkes hen ad en bordplade. Gnidningskoefficienten er $\mu = 0{,}3$. Tyngdekraften på klodsen er

$$F_t = m \cdot g = 0{,}250\,\text{kg} \cdot 9{,}82\,\text{m/s}^2 = 2{,}46\,\text{N} \,.$$

Bordet er vandret, dvs. normalkraften er lige så stor som tyngdekraften. Derved bliver gnidningskraften på klodsen:

$$F_\mathrm{g} = \mu \cdot F_\mathrm{n} = 0{,}3 \cdot 2{,}46\,\mathrm{N} = 0{,}738\,\mathrm{N}\,.$$

Klodsen bliver altså påvirket af en gnidningskraft på 0,738 N. Hvis man vil holde klodsen i bevægelse, skal man derfor trække i klodsen med mindst denne kraft.

Tabel 5.2: Nogle værdier for gnidningskoefficienten.

	μ
stål mod is	0,02
træ mod træ	0,2–0,7
glas mod glas	0,4
gummi mod beton	1

Når man taler om gnidning, er der i virkeligheden to tilfælde at tage hensyn til. I det *dynamiske* tilfælde har man en genstand i bevægelse, så er gnidningskraften givet ved

$$F_\mathrm{g} = \mu_\mathrm{d} \cdot F_\mathrm{n}\,,$$

hvor μ_d er den *dynamiske gnidningskoefficient*. Værdierne i tabel 5.2 er alle dynamiske gnidningskoefficienter.

Det *statiske* tilfælde er hvor genstanden ligger stille. I den situation skal genstanden påvirkes af en kraft med størrelsen

$$F \geq \mu_\mathrm{s} \cdot F_\mathrm{n}$$

før den begynder at bevæge sig. μ_s kaldes den *statiske gnidningskoefficient*. Som regel er $\mu_\mathrm{s} > \mu_\mathrm{d}$, dvs. det kræver en mindre kraft at holde en genstand i bevægelse end det kræver at sætte bevægelsen i gang.

Øvelse 5.2

En slæde står på en snedækket sti. Den statiske gnidningskoefficient er $\mu_\mathrm{s} = 0{,}25$, og den dynamiske gnidningskoefficent er $\mu_\mathrm{d} = 0{,}11$.

a) Hvor stor en kraft skal man trække i slæden med for at sætte den i bevægelse?

b) Hvor stor en kraft skal man trække med for at slæden bevæger sig med en konstant fart?

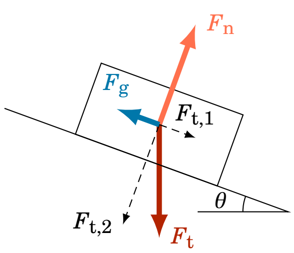
Øvelse 5.3

En person på 67 kg kommer løbende med en fart på 2,8 m/s i uldsokker på et glat gulv og bremser pludseligt op. Gnidningskoefficienten mellem sokkerne og gulvet er 0,26.

a) Hvor stor er gnidningskraften på personen?

b) Hvor stor er accelerationen?

c) Hvor langt når personen at bevæge sig under opbremsningen?



Figur 5.3: En klods, der bevæger sig på et skråplan, er påvirket af tyngdekraften, normalkraften og gnidningskraften.

5-2 Gnidning på et skråplan

Som eksempel kan man se på bevægelsen af en klods på et skråplan der danner vinklen θ med vandret (se figur 5.3). Tyngdekraften kan deles op i to komposanter: $F_{\mathrm{t},1}$ som er parallel med skråplanet, og $F_{\mathrm{t},2}$ som er vinkelret på skråplanet. En geometrisk analyse af figuren giver at (se også figur 2.4)

$$F_{\mathrm{t},1} = F_\mathrm{t} \cdot \sin(\theta) \qquad \text{og} \qquad F_{\mathrm{t},2} = F_\mathrm{t} \cdot \cos(\theta)\,.$$

Heraf følger fra Coulombs gnidningslov at

$$F_{\mathrm{g}} = \mu \cdot F_{\mathrm{n}} = \mu \cdot F_{\mathrm{t},2} = \mu \cdot F_{\mathrm{t}} \cos(\theta) \,.$$

Den resulterende kraft på klodsen er parallel med skråplanet, og dens størrelse er givet ved forskellen på tyngdekraftens komposant parallelt med skråplanet fratrukket gnidningskraften, altså

$$F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{t},1} - F_{\mathrm{g}} = F_{\mathrm{t}} \cdot \sin(\theta) - \mu F_{\mathrm{t}} \cdot \cos(\theta) \,.$$

Dvs.

$$\boxed{F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{t}} \cdot \big(\sin(\theta) - \mu \cdot \cos(\theta)\big) \,.}$$

Hvis den resulterende kraft er positiv, så accelereres klodsen på vej ned ad skråplanet. Er kraften negativ, bliver klodsen derimod bremset. Dette bestemmes af faktoren

$$\sin(\theta) - \mu \cdot \cos(\theta) \,.$$

Denne faktor giver 0 når

$$\sin(\theta) = \mu \cdot \cos(\theta) \qquad \Leftrightarrow \qquad \tan(\theta) = \mu \,.$$

Når $\tan(\theta) > \mu$, er accelerationen således positiv på vej ned ad skråplanet. Omvendt er accelerationen negativ på vej ned ad skråplanet hvis $\tan(\theta) < \mu$.

Eksempel 5.4
En klods er på vej ned ad et skråplan. Gnidningskoefficienten mellem klodsen og underlaget er $\mu = 0{,}3$. Hvis skråplanet danner vinklen θ med vandret, vil klodsen bevæge sig med konstant fart når

$$\tan(\theta) = 0{,}3 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(0{,}3) = 16{,}7^\circ \,.$$

Det betyder således også at klodsen vil bremses hvis skråplanets vinkel med vandret er mindre end 16,7°, og at hastigheden vil øges hvis vinklen er større end 16,7°.

Øvelse 5.5

Gnidningskoefficienten mellem ski og sne ligger på omkring 0,05.

a) Hvor stor en vinkel skal en bakke have for at en skiløber vil kunne glide ned ad bakken uden selv at gøre noget?

I et skihop glider skiløberen nedad en 80 m lang bakke der danner en vinkel på 30° med vandret.

b) Hvor stor bliver skiløberens acceleration?

c) Hvis skiløberen starter med en fart på 1,5 m/s, hvilken fart har han så når han når enden af bakken?

— 6 —

Tryk

Figur 6.1: Fakir i Lissabon, Portugal.[9]

Billedet på figur 6.1 viser en fakir der sidder på en sømmåtte. Grunden til at han kan sidde på sømmåtten uden at komme til skade, er at hans vægt fordeles på mange søm. Havde der kun været ét søm, ville situationen have været en helt anden.

Hvis man skal analysere situationer som den på billedet giver det derfor mening at se på *trykket* der er defineret som kraft pr. areal,

Tryk

$$p = \frac{F}{a}\,,$$

hvor p er trykket,[1] F er kraften, og a er arealet.

[1] Symbolet for tryk er p idet tryk hedder *pressure* på engelsk.

SI-enheden for kraft er newton, og SI-enheden for areal er m^2, så SI-enheden for tryk bliver $\mathrm{N/m}^2$. Denne enhed kaldes også pascal (Pa). Enheden er opkaldt efter Blaise Pascal (1623–1662) der kom frem til mange forskellige resultater omkring tryk i væsker.[3] Der gælder altså at

$$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m}^2\,.$$

Eksempel 6.1

Hovedet på en tegnestift har en diameter på 5 mm, mens spidsen har en diameter på 0,6 mm. Arealet af tegnestiftens hoved er derfor

$$a_{\text{hoved}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{5 \cdot 10^{-3} m}{2}\right)^2 = 1{,}96 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2\,,$$

og spidsens areal er

$$a_{\text{spids}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{0{,}6 \cdot 10^{-3} m}{2}\right)^2 = 2{,}83 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2\,.$$

Hvis man trykker tegnestiften i en opslagstavle med en kraft på 250 N, bliver trykket på hhv. hovedet og spidsen

$$p_{\text{hoved}} = \frac{F}{a_{\text{hoved}}} = \frac{250\,\mathrm{N}}{1{,}96 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2} = 1{,}28 \cdot 10^{7}\,\mathrm{Pa} = 12{,}8\,\mathrm{MPa}$$

$$p_{\text{spids}} = \frac{F}{a_{\text{spids}}} = \frac{250\,\mathrm{N}}{2{,}83 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2} = 8{,}83 \cdot 10^{8}\,\mathrm{Pa} = 883\,\mathrm{MPa}\,.$$

Fordi arealet ved spidsen er meget mindre end arealet ved hovedet af tegnestiften bliver trykket ved spidsen altså mange gange større.

SI-enheden for tryk er som nævnt pascal, men der findes en del andre enheder som staidg anvendes. Enheden atm (atmosfære) er defineret til at være standardtrykket i atmosfæren ved jordens overflade, mmHg (millimeter kviksølv) er defineret ud fra trykket af en kviksølvsøjle (1 mmHg er trykket fra en kviksølvsøjle med en højde på 1 mm), og bar er en enhed der er kompatibel med SI-enheden pascal. Der gælder at

$$1\,\mathrm{atm} = 760\,\mathrm{mmHg} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$$
$$1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}\,.$$

Øvelse 6.2

Densiteten af kviksølv er $\rho_{\mathrm{Hg}} = 13{,}546\,\mathrm{g/mL}$.

a) Hvilket tryk udøver en 1 m høj kviksølvsøjle på underlaget?

b) Omregn dette tryk til atm og mmHg.

6-1 Luftens tryk

Når man står på jordoverfladen, er man omgivet af Jordens atmosfære. Atmosfæren er at lag af luft der omgiver Jorden. Dette lag er meget tyndt, faktisk er det sådan at hvis Jorden var på størrelse med en fodbold, ville atmosfæren have ca. samme tykkelse som et pudebetræk trukket stramt omkring bolden.[4]

Atmosfæren er bundet til Jorden pga. tyngdekraften. Det betyder at når man befinder sig i Jordens atmosfære, vil man fra alle sider være påvirket af atmosfærens tryk. Dette tryk skyldes at den del af atmosfæren man har over sig, trykker nedad med sin vægt.

Eksempel 6.3

Luftens tryk er 1 atm, dvs. 101 325 Pa. Et areal på 1 m^2 vil derfor være påvirket af en kraft på

$$F = p \cdot a = 101\,325\,\mathrm{Pa} \cdot 1\,\mathrm{m}^2 = 101\,325\,\mathrm{N}\,.$$

Dette må være vægten af den del af atmosfæren der befinder sig over dette areal. Dvs. massen af dette udsnit af atmosfæren er

$$m = \frac{F}{g} = \frac{101\,325\,\mathrm{N}}{9{,}82\,\mathrm{m/s^2}} = 10\,318\,\mathrm{kg}\,.$$

På hver kvadratmeter af jordoverfladen hviler der altså mere end 10 ton atmosfærisk luft.

Øvelse 6.4

Jordens radius er ca. 6371 km.

a) Beregn Jordens samlede overfladearel.

b) Beregn atmosfærens samlede masse.

Øvelse 6.5

Et rektangulært spisebord er 220 cm langt og 100 cm bredt.

a) Bestem massen af den luft der befinder sig over spisebordet.

En stationcar vejer omkring 2000 kg.

b) Hvor mange stationcars skulle der stå på bordet for at de havde samme masse som denne mængde luft?

c) Hvorfor braser bordet ikke sammen under vægten?

Øvelse 6.6

Atmosfærens tryk aftager med god tilnærmelse eksponentielt med højden. Ved jordoverfladen er trykket 101,3 kPa, mens det i 10 km højde er 26,5 kPa.

a) Bestem en eksponentiel model for luftens tryk som funktion af højden.

b) Hvor højt er lufttrykket på toppen af Mount Everest (8849 m over havets overflade[2])?

Hvis man skal stille en bedre model op, skal man tage højde for at temperaturen også ændrer sig med højden. Det viser sig at trykket i troposfæren (de første 11 km af atmosfæren) bedre kan modelleres med ligningerne[4]

$$T = 288{,}08\,\mathrm{K} - 0{,}00649\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}} \cdot h$$
$$p = 101{,}29\,\mathrm{kPa} \cdot \left(\frac{T}{288{,}08\,\mathrm{K}}\right)^{5{,}256} .$$

c) Bestem vha. de to ligninger trykket som funktion af højden.

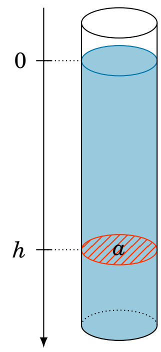
d) Tegn grafen for den forbedrede model i samme koordinatsystem som den eksponentielle model, og vurder egnetheden af den simplere eksponentielle model.

6-2 Tryk i væsker

Figur 6.2 viser en væskesøjle med tværsnitsareal a. Trykket i dybden h er summen af trykket p_0 ved væskeoverfladen og det tryk der skyldes den del af væskesøjlen der er over dybden h.

Den del af væskesøjlen der er over dybden h har et volumen på $h \cdot a$, og derved er massen og tyngdekraften på denne del af væskesøjlen

$$m = \rho \cdot h \cdot a$$
$$F_t = \rho \cdot h \cdot a \cdot g .$$



Figur 6.2: En væskesøjle med tværsnitsarealet a.

Trykket fra denne del af væskesøjlen er så

$$p_{\text{væske}} = \frac{F_t}{a} = \rho \cdot h \cdot g\,.$$

Det samlede tryk i dybden h er så

$$p = p_0 + p_{\text{væske}}\,,$$

dvs.

Trykket i en væske

$$p = p_0 + \rho \cdot h \cdot g\,, \tag{6.1}$$

hvor p_0 er trykket i væskeoverfladen, ρ er væskens densitet, h er dybden, og g er tyngdeaccelerationen.

Eksempel 6.7

Havvand har en densitet på ca. 1030 kg/m^3. Ved havoverfladen er trykket 101,3 kPa. En dykker der svømmer ned på en dybde af 25 m er her udsat for et tryk på

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \rho \cdot h \cdot g \\ &= 101{,}3\,\text{kPa} + 1030\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 25\,\text{m} \cdot 9{,}82\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ &= 354\,\text{kPa}\,. \end{aligned}$$

I denne dybde er trykket altså ca. 3,5 gange så stort som ved havoverfladen.

Øvelse 6.8

Densiteten af havvand er $\rho = 1030\,\text{kg/m}^3$, og trykket ved havoverfladen er $p_0 = 101{,}3\,\text{kPa}$.

a) Hvor meget stiger trykket pr. meter man dykker ned under vandet?

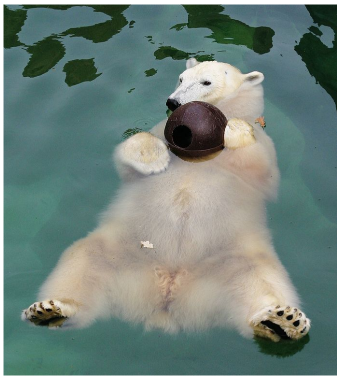
En gammel tommelfingerregel siger at trykket stiger med 1 atm for hver 10 m man dykker ned.

b) Er dette i overensstemmelse med dine beregninger?

— 7 —

Opdrift

Figur 7.1 viser et billede af en isbjørn der flyder i vandoverfladen. Idet isbjørnen er i hvile, må den være påvirket af andre kræfter end bare tyngdekraften. Det viser sig at enhver genstand der befinder sig i en væske eller en gas, er påvirket af en opdrift fra væsken/gassen. Grunden til at isbjørnen flyder er altså at den er påvirket af en opdrift fra vandet der er lige så stor som tyngdekraften.



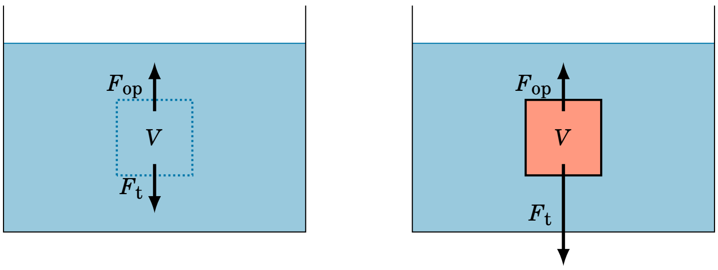
Tabel 7.1: En flydende isbjørn.[8]

Figur 7.2(a) viser et kar med en væske. Et lille udsnit af væsken (vist med stiplede linjer på figuren) med volumen V vil være påvirket af tyngdekraften

$$F_t = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g\,.$$

Men væsken er i hvile, dvs. den resulterende kraft er 0. Det lille udsnit af væsken må derfor ud over tyngdekraften være påvirket af en anden kraft der er lige så stor som og modsat rettet tyngdekraften. Denne kraft kaldes *opdriften*

$$F_{op} = \rho \cdot V \cdot g\,.$$



(a) Et udsnit af en væske. (b) En nedsænket genstand.

Figur 7.2: Opdriften på et volumen af en væske og på en genstand med samme volumen der er nedsænket i væsken, må være den samme. Tyngdekraften er dog ikke nødvendigvis den samme.

Opdriften stammer fra trykket af den omgivende væske. Erstatter man nu det lille udnit af væsken med en genstand med samme volumen, må denne genstand derfor påvirkes af samme opdrift. Der gælder altså generelt at opdriften på en genstand med volumen V der er nedsænket i en væske, er givet ved

> *Opdrift*
>
> $$F_{op} = \rho \cdot V \cdot g\,,$$
>
> hvor ρ er væskens densitet, V er genstandens volumen, og g er tyngdeaccelerationen.

Den samme formel gælder for opdriften fra en gas, her skal den anvendte densitet være gassens densitet.

Eksempel 7.1
Atmosfærisk luft har en densitet på ρ = 1,2928 kg/m^3, og et gennemsnitligt menneske har et volumen på V = 65,22 L.[5] Opdriften på et gennemsnitligt menneske fra luften er derfor

$$\begin{aligned} F_{\text{op}} &= \rho \cdot V \cdot g \\ &= 1{,}2928\,\text{kg/m}^3 \cdot 65{,}22 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 \cdot 9{,}82\,\text{N/kg} = 0{,}828\,\text{N}\,. \end{aligned}$$

Hvis et menneske derimod er helt nedsænket i vand, er opdriften væsentligt større idet densiteten af vand er ρ = 1,00 kg/L. Et menneske i vand vil altså være påvirket af en opdrift på

$$\begin{aligned} F_{\text{op}} &= \rho \cdot V \cdot g \\ &= 1{,}00\,\text{kg/L} \cdot 65{,}22\,\text{L} \cdot 9{,}82\,\text{N/kg} = 640\,\text{N}\,. \end{aligned}$$

Som man kan se er opdriften fra luft altså så lille at det ikke kan mærkes, mens den forholdsvist store opdrift i vand er det der muliggør at mennesker kan holde sig flydende i vand.

Øvelse 7.2

Ferskvand har en densitet på 1,00 kg/L, mens saltvand har en densitet på 1,03 kg/L.

a) Er det nemmest for en svømmer at holde sig flydende i ferskvand eller i saltvand?

Øvelse 7.3

En varmluftsballon har et samlet volumen på 2800 m^3, og den samlede vægt af ballonen er 3,4 ton. Luften udenom ballonen har en densitet på ρ_{luft} = 1,2928 kg/m^3.

a) Hvor stor er opdriften på ballonen?

b) Hvor stor er tyngdekraften på ballonen?

c) Hvilken vej bevæger ballonen sig?

d) Bliver ballonen ved med at bevæge sig i denne retning?

En anden udledning af formlen for opdrift

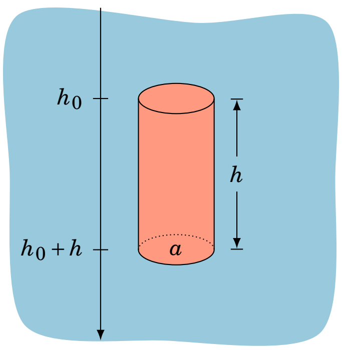
Som nævnt skyldes opdriften trykket fra den omgivende væske. Man kan derfor også udlede formlen for opdrift ved at se på trykforskellen mellem toppen og bunden af en genstand. Figur 7.3 viser en cylinderformet genstand nedsænket i en væske. Genstanden har tværsnitsarealet a og højden h. Genstandens top befinder sig i dybden h_0, mens bunden befinder sig i dybden $h_0 + h$.

Toppen af genstanden påvirkes af et tryk på (se formlen (6.1))

$$p_{\text{top}} = p_0 + \rho \cdot h_0 \cdot g\,.$$

Bunden påvirkes af et tryk med størrelsen

$$p_{\text{bund}} = p_0 + \rho \cdot (h_0 + h) \cdot g\,.$$



Figur 7.3: En cylinderformet genstand med højde h og tværsnitsarealet a nedsænket i en væske.

Trykket er størst ved bunden, og trykforskellen mellem top og bund er

$$\begin{aligned}\Delta p &= p_{\text{bund}} - p_{\text{top}} \\ &= (p_0 + \rho \cdot (h_0 + h) \cdot g) - (p_0 + \rho \cdot h_0 \cdot g) \\ &= \rho \cdot h \cdot g\,.\end{aligned}$$

Denne trykforskel giver anledning til en opadrettet kraft (idet trykket som nævnt er størst ved bunden) på

$$F_{\text{op}} = \Delta p \cdot a = \rho \cdot h \cdot g \cdot a = \rho \cdot h \cdot a \cdot g = \rho \cdot V \cdot g\,,$$

idet $a \cdot h$ netop er genstandens volumen. Herved genfinder man formlen for opdriften på en genstand.

Øvelse 7.4

Et isbjerg flyder på havet. Densiteten af is er 0,917 g/cm^3, mens densiteten af havvandet er 1,03 g/cm^3.

a) Hvilke kræfter virker på isbjerget?

b) Hvad er den resulterende kraft på isbjerget?

Isbjerget har voluminet V, mens den »usynlige« del af isbjerget (den del der befinder sig under havoverfladen) har et volumen på V_{u}.

c) Bestem forholdet $\dfrac{V_{\text{u}}}{V}$.

d) Hvor stor en del af et isbjerg er synlig over havoverfladen?

Bibliografi

[1] Erik Strandgaard Andersen, Paul Jespersgaard og Ove Grønbæk Østergaard, red. *Databog fysik kemi*. 11. udg. F & K forlaget, 2012.

[2] Keld Vrå Andersen. *Nu er verdens højeste bjerg blevet lidt højere*. 2020. URL: https://nyheder.tv2.dk/ (hentet 13.10.2021).

[3] Florian Cajori. *A History of Physics in its Elementary Branches (through 1925): Including the Evolution of Physical Laboratories*. New York, N.Y.: Dover Publications, Inc., 1962.

[4] Nancy Hall, red. *Earth Atmosphere Model, Metric Units*. NASA. 31. maj 2021. URL: https://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/atmosmet.html (hentet 19.03.2023).

[5] Ron Milo m.fl. *Human Body Mean Volume*. BioNumbers. URL: https://bionumbers.hms.harvard.edu/bionumber.aspx?id=109718 (hentet 01.08.2023).

[6] Roger G. Newton. *From Clockwork to Crapshoot: a history of physics*. Cambridge, Massachusetts: The Belknap Press of Harvard University Press, 2007.

[7] George Smith. »Isaac Newton«. I: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. af Edward N. Zalta. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2008. URL: https://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/newton/ (hentet 12.10.2021).

Billedkilder

[8] Colin M.L. Burnett. *A Polar Bear floating at the Henry Doorly Zoo in Omaha, Nebraska*. 30. sep. 2006. URL: https://commons.wikimedia.org.

[9] Diego Delso. *Faquir en Rua Augusta, Lisboa, Portugal*. 12. maj 2012. URL: https://commons.wikimedia.org.

[10] Justus Sustermans. *Portræt af Galileo Galilei*. National Maritime Museum. 1636–1640.