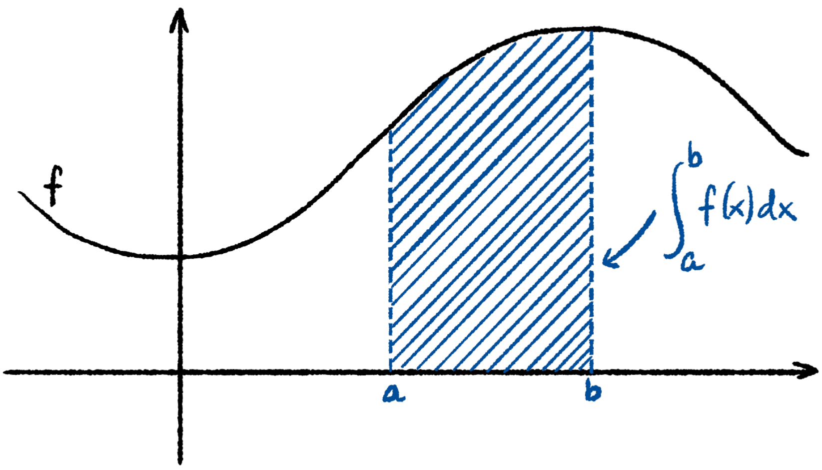
Integralregning

Version 1.1
3. august 2020



Mike Vandal Auerbach
www.mathematicus.dk

Integralregning
Version 1.1, 2020

Disse noter er skrevet til matematikundervisningen på stx A- og B-niveau efter gymnasiereformen 2017. Noterne indeholder kernestoffet og lidt til.

Noterne bygger på ideen om stamfunktioner, så et kendskab til differentialregning er en nødvendighed.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Indhold

1 Stamfunktioner

Integralregning er en gren af matematikken, der ligger i forlængelse af differentialregningen. På sin vis kan man sige, at integralregning er præcis det modsatte af differentialregning.

I differentialregningen finder man såkaldte *afledte funktioner*, som beskriver tangenthældningen af grafen for den oprindelige funktion. Regner man »den anden vej«, finder man det, man kalder en *stamfunktion*.

Man har følgende definition.

Definition 1.1

Lad der være givet en funktion f. En funktion F, der opfylder

$$F'(x) = f(x) \ ,$$

kaldes en *stamfunktion* til f.

En stamfunktion[1] F til en funktion f er altså en funktion, der har f som afledt funktion. At undersøge om en given funktion er stamfunktion til en anden, kan man derfor gøre ved at differentiere.

[1]Ofte betegner man stamfunktioner med store bogstaver, sådan at f.eks. en stamfunktion til $f(x)$ kaldes $F(x)$ og en stamfunktion til $h(x)$ kaldes $H(x)$. I princippet kan man kalde stamfunktionerne det, man vil, men det er lettere at se, hvor de kommer fra, hvis man anvender denne notation.

Eksempel 1.2 Er $F(x) = x^3 + 2x - 5$ en stamfunktion til $f(x) = 3x^2 + 2$?

Dette kan man undersøge ved at differentiere F:

$$F'(x) = 3x^2 + 2 \cdot 1 - 0 = 3x^2 + 2 \ .$$

Når man differentierer F, får man forskriften for f. Dvs. $F'(x) = f(x)$ og F *er* derfor en stamfunktion til f.

Eksempel 1.3 Er $H(x) = 4x + \ln(x)$ en stamfunktion til $g(x) = 2x + \frac{1}{x}$?

Differentierer man $H(x)$ finder man

$$H'(x) = 4 \cdot 1 + \frac{1}{x} = 4 + \frac{1}{x} \ .$$

Dette er *ikke* det samme som $g(x)$, dvs. H er *ikke* en stamfunktion til g.

Eksempel 1.4 Både $F_1(x) = x^2 + \mathrm{e}^x + 4$ og $F_2(x) = x^2 + \mathrm{e}^x - 17$ er stamfunktioner til $f(x) = 2x + \mathrm{e}^x$.

Differentierer man de to funktioner F_1 og F_2, finder man nemlig

$$F_1'(x) = 2x + \mathrm{e}^x + 0 = 2x + \mathrm{e}^x$$

$$F_2'(x) = 2x + e^x - 0 = 2x + e^x \ .$$

Altså er $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ og begge de to funktioner er altså stamfunktioner til f.

Af eksempel 1.4 kan man se, at en funktion kan have flere stamfunktioner. De to stamfunktioner i eksemplet er dog ikke specielt forskellige. De adskiller sig kun med en konstant. Faktisk er grunden til, at en funktion kan have flere stamfunktioner, at når man differentierer en konstant, får man 0, uanset konstantens størrelse.

Det betyder, at man altid kan finde en ny stamfunktion ved at lægge en konstant til en anden stamfunktion, idet en konstant, som er lagt til, forsvinder ved differentiation.

Sætning 1.5

Hvis $F_1(x)$ og $F_2(x)$ begge er stamfunktioner til en funktion f, så er

$$F_1(x) - F_2(x) = k \ ,$$

hvor k er en konstant.

Bevis

Da både $F_1(x)$ og $F_2(x)$ er stamfunktioner til f, så er[2]

$$\big(F_1(x) - F_2(x)\big)' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \ .$$

Differentierer man differensen $F_1(x) - F_2(x)$ får man altså 0.

Det eneste, der giver 0, når man differentierer, er en konstant, og derfor må

$$F_1(x) - F_2(x) = k \ ,$$

hvor k er en konstant. ■

[2] I udregningen bruger man, at både F_1 og F_2 er stamfunktioner til f, dvs. $F_1'(x) = f(x)$ og $F_2'(x) = f(x)$.

Det sætning 1.5 siger, er altså, at en given funktion godt nok har uendeligt mange stamfunktioner, men at de alle kan findes ved blot at lægge forskellige konstanter til en anden stamfunktion.

Eksempel 1.6 $F(x) = x^2 + \ln(x)$ er en stamfunktion til $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$, fordi

$$F'(x) = 2x + \frac{1}{x} = f(x) \ .$$

Men så er

$$\begin{aligned} F_1(x) &= x^2 + \ln(x) + 3 \\ F_2(x) &= x^2 + \ln(x) - 14 \\ F_3(x) &= x^2 + \ln(x) + 365\,749 \end{aligned}$$

også stamfunktioner til $f(x)$.

1.1 Det ubestemte integral

At beregne stamfunktionerne til en funktion $f(x)$ kaldes at *integrere* $f(x)$. Man har følgende definition.[3]

[3]Notationen $\int \cdot \, \mathrm{d}x$ betyder, at man integrerer det, som står mellem $\int$ og $\mathrm{d}x$.

Symbolet $\mathrm{d}x$ er altså ikke en matematisk størrelse. Det viser blot, hvor det der skal integreres slutter, og at den uafhængige variabel hedder x.

Definition 1.7

Lad f være en given funktion. *Det ubestemte integral af* $f(x)$ er mængden af alle stamfunktioner til $f(x)$. Det skrives

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Funktionen $f(x)$ kaldes *integranden.*

At $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ er mængden af alle stamfunktioner[4] viser man ved at inkludere en konstant i resultatet af beregningen.

[4]I nogle gennemgange af integralregningen sættes der lighedstegn mellem notationen $F(x)$ for en stamfunktion og $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Her vil $F(x)$ dog blive anvendt for at vise, at man har at gøre med en konkret stamfunktion til $f(x)$, mens $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ er alle stamfunktionerne.

Eksempel 1.8 Her bestemmes $\int (2x+3)\,\mathrm{d}x$.

$$\int (2x+3)\,\mathrm{d}x = x^2 + 3x + k\ .$$

$x^2 + 3x$ er en stamfunktion til $2x + 3$ og konstanten k viser, at man her har fundet frem til *alle* stamfunktioner.

Konstanten k i eksempel 1.8 kaldes en *integrationskonstant.*

Tabel 1.1 viser de ubestemte integraler for en række simple funktioner. Hvis man vil overbevise sig om, at påstandene i tabellen er korrekte, kan man differentiere den højre kolonne og se, at det giver den venstre.

Tabel 1.1: Ubestemte integraler af nogle simple funktioner.

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
a	$ax + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
e^x	$\mathrm{e}^x + k$
e^{ax}	$\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + k$
$\cos(x)$	$\sin(x) + k$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + k$

1.2 Regneregler

Ligesom der findes regneregler for differentiation, findes der også nogle regneregler for ubestemte integraler.

Sætning 1.9

Lad f være en funktion og c en vilkårlig konstant. Da gælder

$$\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Bevis
Hvis man differentierer højre side af udtrykket i sætningen, får man

$$\left(c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = c \cdot \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = c \cdot f(x)\ .$$

Det første lighedstegn følger af en regneregel for differentiation. Det andet følger af, at $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ er stamfunktionerne til f.

Man har nu vist, at $c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$ er stamfunktionerne til $c \cdot f(x)$, men det betyder at

$$\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

og sætningen er dermed vist. ■

Sætning 1.9 kan bruges til bestemme integraler af funktioner, der ikke står i tabel 1.1.

Eksempel 1.10 Hvad er $\int 6x^2\,\mathrm{d}x$?

$6x^2$ står ikke i tabel 1.1, men x^2 gør. Man kan derfor bruge sætning 1.9, så man får

$$\int 6x^2\,\mathrm{d}x = 6 \cdot \int x^2\,\mathrm{d}x = 6 \cdot \tfrac{1}{3}x^3 + k = 2x^3 + k\ .$$

De næste to regneregler, der er vigtige at kende, er disse.

Sætning 1.11

Lad f og g være to funktioner. Så gælder der

1. $$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$
2. $$\int (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Bevis
Her bevises kun den første del af sætningen. Den anden del forløber fuldstændig analogt.

Idet

$$\begin{aligned}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\right)' &= \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' + \left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)' \\ &= f(x) + g(x)\ ,\end{aligned}$$

er $\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$ en stamfunktion til $f(x) + g(x)$, dvs.

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

og sætningen er hermed vist. ■

Eksempel 1.12 Hvad er $\int (\mathrm{e}^x + x)\mathrm{d}x$?

$\mathrm{e}^x + x$ står ikke i tabel 1.1, men e^x og x står der hver for sig. Derfor kan man bruge sætning 1.11, sådan at man får

$$\int (\mathrm{e}^x + x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \tfrac{1}{2}x^2 + k\ .$$

Sætning 1.9 og sætning 1.11 kan også bruges på samme tid, som i dette eksempel.

Eksempel 1.13 Det ubestemte integral $\int (9x^2 + 4x - 3)\,\mathrm{d}x$ bestemmes på følgende måde:

$$\begin{aligned}\int (9x^2 + 4x - 3)\,\mathrm{d}x &= 9 \cdot \int x^2\,\mathrm{d}x + 4 \cdot \int x\,\mathrm{d}x - \int 3\,\mathrm{d}x \\ &= 9 \cdot \tfrac{1}{3}x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 3 \cdot x + k \\ &= 3x^3 + 2x^2 - 3x + k\ .\end{aligned}$$

Undervejs benyttes både sætning 1.9 og sætning 1.11 samt opslag i tabel 1.1.

1.3 Integration ved substitution

Den følgende regneregel kan måske virke en anelse kompliceret ved første øjekast.

Sætning 1.14

Lad f og u være to funktioner. Så er

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + k\ ,$$

hvor F er en stamfunktion til f.

Regnereglen følger faktisk af kædereglen for differentiation af sammensatte funktioner, og den bevises ved at differentiere højre side af udtrykket i sætningen.

Bevis

Differentierer man $F(u(x)) + k$ får man vha. kædereglen, at[5]

$$(F(u(x)) + k)' = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)\ .$$

Altså er $F(u(x)) + k$ stamfunktionerne til $f(u(x)) \cdot u'(x)$, og sætningen er vist. ■

[5] Det første lighedstegn følger af kædereglen, det sidste følger af, at F er en stamfunktion til f.

Sætning 1.14 kan anvendes på følgende måde.

Eksempel 1.15 Her beregnes det ubestemte integral $\int 3\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^x + 5)^2\,\mathrm{d}x$.

Først sættes $u(x) = \mathrm{e}^x + 5$. Så er $u'(x) = \mathrm{e}^x$ og integralet kan omskrives på følgende måde

$$\int 3\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^x + 5)^2\,\mathrm{d}x = \int 3u'(x) \cdot u(x)^2\,\mathrm{d}x = \int 3u(x)^2 \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Man kan nu bruge sætning 1.14, hvor funktionen $f(u(x))$ er $3u(x)^2$. En stamfunktion til $3u^2$ er u^3, dvs.

$$\int 3u(x)^2 \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)^3 + k = (\mathrm{e}^x + 5)^3 + k\ .$$

Det sidste lighedstegn følger af, at $u(x)$ var sat lig med $\mathrm{e}^x + 5$.

I eksemplet ovenfor erstatter man udtrykket $\mathrm{e}^x + 5$ med u, man taler om, at man *substituerer*. Fremgangsmåden kaldes derfor også *integration ved substitution*.

En lidt mere uformel, men måske mere overskuelig måde at skrive det op på er den følgende.

Eksempel 1.16 Her beregnes igen det ubestemte integral $\int 3\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^x + 5)^2 \, \mathrm{d}x$.

Først sættes $u = \mathrm{e}^x + 5$. Herved bliver[6]

$$\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \, .$$

Substituerer man nu u og $\mathrm{d}u$ ind i integralet, får man

$$\int 3\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^x + 5)^2 \, \mathrm{d}x = \int 3(\mathrm{e}^x + 5) \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \int 3u^2 \, \mathrm{d}u \, .$$

Dette integral kan nemt beregnes ved opslag, og man får så

$$\int 3u^2 \, \mathrm{d}u = u^3 + k = (\mathrm{e}^x + 5)^3 + k \, ,$$

hvor man ved det sidste lighedstegn har substitueret u tilbage til $\mathrm{e}^x + 5$.

Eksempel 1.17 Integralet $\int \frac{2 \cdot \ln(x)}{x} \, \mathrm{d}x$ bestemmes ved at sætte

$$u = \ln(x) \, , \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \, .$$

Integralet kan nu beregnes ved substitution

$$\int \frac{2 \cdot \ln(x)}{x} \, \mathrm{d}x = \int 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \int 2u \, \mathrm{d}u = u^2 + k \, .$$

Beregner man integralet og substituerer tilbage, får man

$$\int 2u \, \mathrm{d}u = u^2 + k = \ln(x)^2 + k \, .$$

De næste to eksempler involverer de trigonometriske funktioner cos og sin. Deres ubestemte integraler kan ses i tabel 1.1.

Eksempel 1.18 I dette eksempel bestemmes integralet $\int 6x \cdot \cos(x^2) \, \mathrm{d}x$.

Sætter man

$$u = x^2 \, , \qquad \mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x \, ,$$

bliver integralet til

$$\int 6x \cdot \cos(x^2) \, \mathrm{d}x = \int 3 \cdot \cos(x^2) \cdot 2x \, \mathrm{d}x = \int 3 \cdot \cos(u) \, \mathrm{d}u = 3 \cdot \sin(u) + k \, .$$

Nu mangler man blot at indsætte $u = x^2$, og man får

$$\int 6x \cdot \cos(x^2) \, \mathrm{d}x = 3 \cdot \sin(x^2) + k \, .$$

[6] Notationen $\mathrm{d}u$ kan ses som en forkortelse for $u'(x) \, \mathrm{d}x$.

Det sidste eksempel i dette afsnit er en smule mere kompliceret end de andre. Her beregnes $\int \tan(x)\,\mathrm{d}x$.

Eksempel 1.19 $\int \tan(x)\,\mathrm{d}x$ står ikke i tabel 1.1. Integralet kan alligevel beregnes, hvis man husker, at $\tan(x)$ er defineret som $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, dvs.

$$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x\ .$$

Foretager man nu substitutionen

$$u = \cos(x)\ , \qquad \mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

kan man skrive integralet om til

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x))\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\ .$$

Dette integral er nemt at beregne. En stamfunktion til $\frac{1}{u}$ er nemlig $\ln(u)$, dvs.

$$\int -\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = -\ln(u) + k\ .$$

Substituerer man tilbage, finder man så, at

$$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos(x)) + k\ .$$

1.4 Øvelser

Øvelse 1.1
Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = x^2 + \ln(x) + 5 \quad \text{og} \quad g(x) = 2x + \frac{1}{x}\ .$$

a) Undersøg, om $f(x)$ er en stamfunktion til $g(x)$.

Øvelse 1.2
Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = x^3 - 4\mathrm{e}^x - 7 \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 + 4\mathrm{e}^x\ .$$

a) Undersøg, om $f(x)$ er en stamfunktion til $g(x)$.

Øvelse 1.3
Bestem følgende ubestemte integraler:

a) $\int 7\,\mathrm{d}x$.

b) $\int (2x - 3)\,\mathrm{d}x$.

c) $\int \left(x + 4x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

d) $\int \left(\frac{1}{x} - x^5 + 1\right)\,\mathrm{d}x$.

Øvelse 1.4
Bestem de følgende ubestemte integraler:

a) $\int 6t\,\mathrm{d}t$.

b) $\int (9u^2 - \sin(u))\,\mathrm{d}u$.

c) $\int \frac{6}{y}\,\mathrm{d}y$.

d) $\int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\right)\,dx$.

Øvelse 1.5
Bestem nedenstående integraler ved først at omskrive integranden.

a) $\int (x + 3)^2\,\mathrm{d}x$

b) $\int x(x - 1)\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{x + 4x^3}{x^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\int (x + 3)(x - 3)\,\mathrm{d}x$

e) $\int \mathrm{e}^{3x}(2 + \mathrm{e}^{-3x})\,\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{1 + \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

Øvelse 1.6
Bestem følgende integraler ved substitution:

a) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{e^{x}}{e^{x}+1}\,dx$

c) $\displaystyle\int x^2 e^{2x^3}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

Øvelse 1.7
Bestem følgende integraler ved substitution:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \sin(x)^3\cos(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int (x^2-x+1)(2x-1)\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{10z-5}{\sqrt{z^2-z+4}}\,dz$

2 Bestemte stamfunktioner

I det foregående kapitel blev det gennemgået, hvordan man finder det ubestemte integral af en funktion. Det ubestemte integral er mængden af alle stamfunktioner. At der er flere stamfunktioner, skyldes som nævnt at den afledte funktion af en konstant er 0.

Leder man efter en bestemt stamfunktion, skal man derfor have flere oplysninger end blot en funktionsforskrift på den funktion, man vil finde stamfunktionen til.

Den yderligere oplysning, man skal have, kan være

1. Et punkt, som stamfunktionens graf går gennem.
2. Ligningen for en tangent til stamfunktionens graf.

2.1 Hvis grafen går gennem et givet punkt

Idet alle stamfunktionerne til en given funktion kun adskiller sig med en konstant, vil graferne for alle stamfunktionerne være lodrette parallelforskydninger af hinanden.

Kender man derfor et punkt, som grafen for den søgte stamfunktion går igennem, kan man fastlægge værdien af integrationskonstanten k. Derved finder man en ganske bestemt stamfunktion.

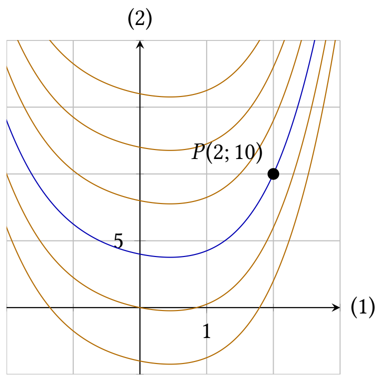
Eksempel 2.1 Her bestemmes den stamfunktion $F(x)$ til $f(x) = x^3 + 2x - 1$, hvis graf går gennem $P(2;10)$.

Først sættes $F(x)$ lig med det ubestemte integral af $f(x)$:

$$F(x) = \int (x^3 + 2x - 1)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x^4 + x^2 - x + k\ .$$

Den søgte stamfunktion $F(x)$, er den stamfunktion, der har en helt bestemt værdi af k – nemlig den værdi, der gør, at grafen går gennem $P(2;10)$.

På figur 2.1 kan man se et udsnit af alle stamfunktionerne til f. Den stamfunktion, som går gennem $P(2;10)$, er den man skal finde forskriften til.



Figur 2.1: Et billede af alle stamfunktionerne til $f(x) = x^3 + 2x - 1$.

Man ved, at stamfunktionen har forskriften

$$F(x) = \tfrac{1}{4}x^4 + x^2 - x + k\ .$$

Man ved også, at grafen for F går gennem punktet $P(2;10)$. Hvis det er tilfældet, må $F(2) = 10$, og det giver ligningen

$$F(2) = \tfrac{1}{4}\cdot 2^4 + 2^2 - 2 + k = 10\ .$$

Løser man denne ligning får man

$$\tfrac{1}{4} \cdot 2^4 + 2^2 - 2 + k = 10 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = 4\ .$$

Nu kan man skrive forskriften op:

$$F(x) = \tfrac{1}{4}x^4 + x^2 - x + 4\ .$$

Den stamfunktion til $f(x)$, hvis graf går gennem punktet $P(2; 10)$ har altså denne forskrift.

Eksempel 2.2 Hvilken stamfunktion til $g(x) = \mathrm{e}^x - 3x$ har en graf, der går gennem punktet $Q(0; -7)$?

Stamfunktionen har forskriften

$$G(x) = \int (\mathrm{e}^x - 3x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - \tfrac{3}{2}x^2 + k\ .$$

Idet grafen for G går gennem $Q(0; -7)$ er

$$G(0) = \mathrm{e}^0 - \tfrac{3}{2} \cdot 0^2 + k = -7\ .$$

Ligningen løses

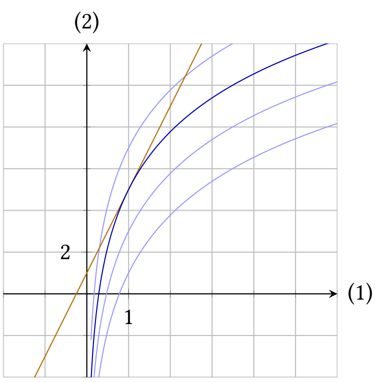
$$\mathrm{e}^0 - \tfrac{3}{2} \cdot 0^2 + k = -7 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 - 0 + k = -7 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = -8\ .$$

Den søgte stamfunktion har derfor forskriften

$$G(x) = \mathrm{e}^x - \tfrac{3}{2}x^2 - 8\ .$$

2.2 Hvis grafen har en given tangent

Hvis man kender en tangent til stamfunktionens graf, er det også muligt at bestemme stamfunktionens forskrift.



Figur 2.2: Stamfunktionerne til $f(x) = \frac{4}{x}$ samt linjen med ligningen $y = 4x + 1$.

Eksempel 2.3 I dette eksempel bestemmes den stamfunktion til $f(x) = \frac{4}{x}$, hvis graf har linjen med ligningen $y = 4x + 1$ som tangent.

Stamfunktionen kaldes $F(x)$. Dens forskrift er

$$F(x) = \int \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x = 4 \cdot \ln(x) + k\ .$$

På figur 2.2 ses nogle af stamfunktionerne til $f(x)$ samt linjen med ligningen $y = 4x + 1$. Som det kan ses på billedet, er der en af stamfunktionerne, der har linjen som tangent.

Hvis $y = 4x + 1$ er tangent til stamfunktionen ved man, at stamfunktionens graf et sted har tangenthældningen 4. Tangenthældningen for funktionen $F(x)$ er givet ved $F'(x)$, men da F er en stamfunktion til f, er $F'(x) = f(x)$.

At bestemme, hvor F har tangenthældningen 4, er derfor det samme som at bestemme, for hvilken værdi af x, $f(x) = 4$.

Derfor løser man ligningen $f(x) = 4$:

$$f(x) = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{4}{x} = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1\ .$$

Nu ved man, at tangenten rører grafen ud for $x = 1$. For at finde koordinatsættet til røringspunktet ser man igen på tangentens ligning. Både tangenten og grafen går gennem røringspunktet. Man kan ikke finde røringspunktet vha. forskriften for $F(x)$, fordi man endnu ikke kender k, men man kan bruge tangentens ligning.

Indsætter man $x = 1$ i ligningen $y = 4x + 1$, får man

$$y = 4 \cdot 1 + 1 = 5 \ .$$

Grafen for $F(x)$ går derfor gennem punktet $(1; 5)$. Dette kan bruges til at bestemme k, idet man så har

$$F(1) = 4 \cdot \ln(1) + k = 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4 \cdot 0 + k = 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = 5 \ .$$

Da man nu kender k, er stamfunktionens forskrift bestemt:

$$F(x) = 4 \cdot \ln(x) + 5 \ .$$

Når man bestemmer en stamfunktion, hvis graf går gennem et bestemt punkt, kan der kun være tale om én bestemt stamfunktion. Har man i stedet opgivet en tangent til stamfunktionens graf, kan der være flere stamfunktioner, der passer på oplysningen.

Eksempel 2.4 I dette eksempel bestemmes den stamfunktion til $f(x) = -x^3 + 3x$, hvis tangent har linjen med ligningen $y = -2x + 8$ som tangent.

Stamfunktionen har forskriften

$$F(x) = \int (-x^3 + 3x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{3}{2}x^2 + k \ .$$

Man leder nu efter det sted, hvor stamfunktionens graf har tangenthældningen -2 (idet dette er tangentens hældning):

$$f(x) = -x^3 + 3x = -2 \ .$$

Løser man denne ligning finder man *to* løsninger, nemlig

$$x = -1 \qquad \vee \qquad x = 2 \ .$$

Der er altså to forskellige stamfunktioner, der har linjen $y = -2x + 8$ som tangent.

Man skal derfor bestemmt *to* røringspunkter. Det første røringspunkt har førstekoordinaten $x = -1$ og andenkoordinaten

$$y = -2 \cdot (-1) + 8 = 10 \ ,$$

og det andet har førstekoordinaten $x = 2$ og andenkoordinaten

$$y = -2 \cdot 2 + 8 = 4 \ .$$

Den første stamfunktions graf går altså gennem punktet $(-1; 10)$, og her findes værdien af k ved at løse ligningen

$$F(-1) = -\tfrac{1}{4} \cdot (-1)^4 + \tfrac{3}{2} \cdot (-1)^2 + k = 10 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = \tfrac{35}{4} \ .$$

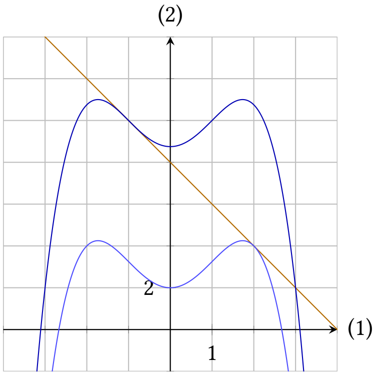
Den anden stamfunktions graf går gennem $(2;4)$, så her skal man løse ligningen

$$F(2) = \tfrac{1}{4} \cdot 2^4 + \tfrac{3}{2} \cdot 2^2 + k = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = 2\,.$$

Funktionen $f(x) = -x^3 + 3x$ har altså to stamfunktioner, hvis grafer har linjen $y = -2x + 8$ som tangent, nemlig

$$F_1(x) = -\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{35}{4}$$
$$F_2(x) = -\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{3}{2}x^2 + 2\,.$$

På figur 2.3 kan man se graferne for de to stamfunktioner samt tangenten.



Figur 2.3: De to stamfunktioner til $f(x) = -x^3 + 3x$, hvis grafer har linjen $y = -2x + 8$ som tangent.

2.3 Øvelser

Øvelse 2.1
En funktion f er givet ved $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$.

Bestem den stamfunktion F til f hvis graf går gennem punktet $(2;10)$.

Øvelse 2.2
Bestem den stamfunktion til $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$, hvis graf går gennem punktet $(9;7)$.

Øvelse 2.3
Bestem den stamfunktion til $g(x) = \frac{1}{x} + 3$ $(x > 0)$, hvis graf går gennem $(1;10)$.

Øvelse 2.4
Funktionen $h(x) = x^2 + x + 1$ har en stamfunktion, hvis graf går gennem $(1;1)$.

Bestem denne stamfunktion.

Øvelse 2.5
En funktion f er givet ved $f(x) = 10x^4 + \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.

Bestem den stamfunktion F til f hvor $F(1) = 25$.

Øvelse 2.6
Funktionen $f(x) = 6x^2 - 6x - 12$ har 2 stamfunktioner, hvis grafer rører førsteaksen præcist 2 steder.

Bestem disse stamfunktioner.

Øvelse 2.7
F er stamfunktion til funktionen

$$f(x) = a \cdot x + 2$$

hvor a er en konstant.

Grafen for F går gennem punkterne $P(-2;9)$ og $Q(1;6)$.

a) Bestem tallet a samt en forskrift for F.

Øvelse 2.8
Bestem den stamfunktion til $s(x) = 2x + 5$, hvis graf har linjen med ligningen $y = -3x - 23$ som tangent.

Øvelse 2.9
Om en funktion F gælder at $F(x)$ er stamfunktion til

$$f(x) = x^2 - x\,.$$

Linjen med ligningen $y = 6x - 5$ er tangent til grafen for F, og det oplyses at røringspunktet for tangenten har positiv førstekoordinat.

a) Bestem en forskrift for F.

Øvelse 2.10
Bestem den stamfunktion til $g(x) = 6x^2 - 2x + 4$, hvis graf tangerer linjen med ligningen $y = 8x + 4$ i første kvadrant.

3 Bestemte integraler

Ind til nu er det kun blevet gennemgået, hvordan man finder *ubestemte* integraler. Men der er selvfølgelig også noget, der hedder et *bestemt* integral.

For en funktion f og to tal a og b definerer man et tal, der kaldes *det bestemte integral af f i intervallet* $[a; b]$. Dette tal beregnes vha. en stamfunktion.[1]

[1] Det er ligegyldigt hvilken stamfunktion, man vælger, derfor vil man typisk vælge den simpleste, dvs. der hvor integrationskonstanten $k = 0$.

Definition 3.1

Lad F være en stamfunktion til f. *Det bestemte integral af f i intervallet* $[a; b]$ er da tallet

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

De to tal a og b kaldes *integrationsgrænserne.*

Bemærk altså at det ubestemte integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ er en funktion,[2] mens det bestemte integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ er et tal.

[2] Egentlig uendeligt mange funktioner, da integrationskontanten k kan have enhver tænkelig værdi.

Når man skal beregne tallet $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, finder man først en stamfunktion $F(x)$ og beregner dernæst $F(b) - F(a)$ ved at sætte tallene a og b ind.

Eksempel 3.2 Hvis man skal beregne $\int_1^4 x^2\,\mathrm{d}x$ skal man altså først finde en stamfunktion til x^2. Dette kunne f.eks. være $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Dernæst beregnes $F(4) - F(1)$, dvs. $\frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3$.

Samlet kan udregningen skrives på følgende måde:

$$\int_1^4 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_1^4 = \tfrac{1}{3} \cdot 4^3 - \tfrac{1}{3} \cdot 1^3 = 21.$$

Værdien af det bestemte integral er altså 21.

Bemærk, at man her har skrevet stamfunktionen i kantede parenteser, før man sætter tallene ind; dette gøres for at gøre udregningen mere overskuelig.

Svarende til sætning 1.9 og sætning 1.11 gælder der følgende sætning.

Sætning 3.3

Lad der være givet to funktioner f og g og et interval $[a; b]$. Da gælder

1. $$\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
2. $$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
3. $$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beviset udelades her, da sætningen følger umiddelbart af de tilsvarende sætninger for ubestemte integraler.

For bestemte integraler gælder desuden følgende sætning:

Sætning 3.4

Lad f være en funktion defineret på et interval, der indeholder tallene a, b og c. Da gælder, at

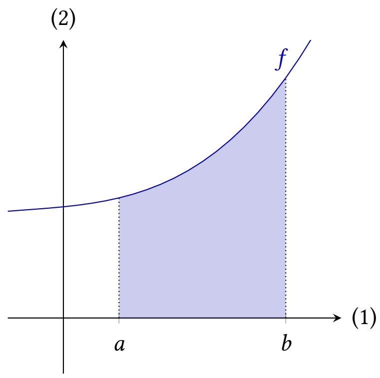
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bevis
Lad F være en stamfunktion til f. Ud fra definition 3.1 får man

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= F(b) - F(a)\\ &= F(b) - F(c) + F(c) - F(a)\\ &= \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

hvorved det ønskede er vist. ■

Sætning 3.4 viser i virkeligheden ikke andet end, at man kan opdele et bestemt integral i flere ved at opdele intervallet $[a; b]$ i delintervaller.



Figur 3.1: Det markerede areal har størrelsen $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

3.1 Arealer under grafer

Det viser sig, at der er en sammenhæng mellem det bestemte integral og arealet under grafen for en funktion. For en funktion f vil arealet mellem grafen og førsteaksen mellem de to tal a og b på førsteaksen, være givet ved $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, se figur 3.1. Det kræver dog, at grafen ikke skærer førsteaksen.

Dette kan formuleres som en sætning.

Sætning 3.5

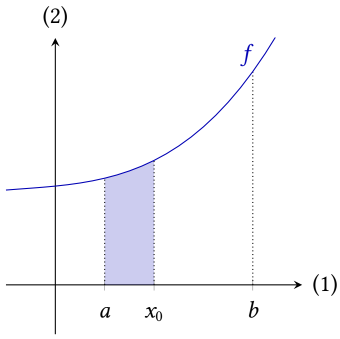
Hvis der for funktionen f gælder, at $f(x) \geq 0$ i intervallet $[a; b]$, er arealet A af den punktmængde der er begrænset af grafen for f og førsteaksen i intervallet $[a; b]$ givet ved

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Bevis

Først antages, at f er voksende i hele intervallet $[a; b]$.

Dernæst defineres en funktion $A(x)$ på intervallet $[a; b]$. Funktionsværdien $A(x_0)$ er arealet mellem grafen for f og førsteaksen i intervallet $[a; x_0]$, se figur 3.2.



Figur 3.2: $A(x_0)$ svarer til det viste areal.

Man ser så på forskellen mellem de to arealer $A(x)$ og $A(x_0)$, hvor $x > x_0$. Da funktionen f er voksende, må der gælde (se figur 3.3(a)), at

$$A(x) - A(x_0) \geq f(x_0) \cdot (x - x_0) \ ,$$

og (se figur 3.3(b))

$$A(x) - A(x_0) \leq f(x) \cdot (x - x_0) \ .$$

Dette kan samles i dobbeltuligheden

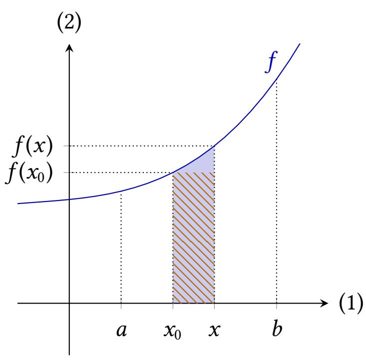
$$f(x_0) \cdot (x - x_0) \leq A(x) - A(x_0) \leq f(x) \cdot (x - x_0) \ . \tag{3.1}$$

Hvis man dividerer med $x - x_0$ på alle sider af denne ulighed fås

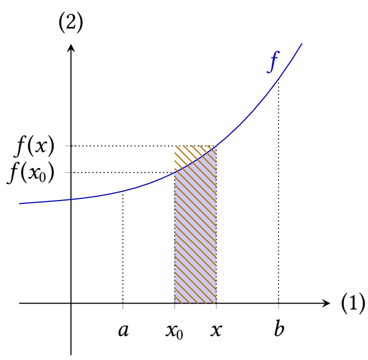
$$f(x_0) \leq \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \leq f(x) \ . \tag{3.2}$$

Nu lader man $x \longrightarrow x_0$. Herved vil

$$\begin{aligned} f(x_0) &\longrightarrow f(x_0), \\ f(x) &\longrightarrow f(x_0), \end{aligned}$$



(a) $A(x) - A(x_0) \geq f(x_0) \cdot (x - x_0)$.



(b) $A(x + \Delta x) - A(x) \leq f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$.

Figur 3.3: Det markerede areal mellem grafen og førsteaksen har arealet $A(x) - A(x_0)$. De to skraverede arealer $f(x_0) \cdot (x - x_0)$ og $f(x) \cdot (x - x_0)$ er hhv. mindre og større end dette areal.

og

$$\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow A'(x_0).$$

Uligheden (3.2) bliver så til

$$f(x_0) \leq A'(x_0) \leq f(x_0),$$

hvorved man kan konkludere, at $A'(x) = f(x)$, hvilket vil sige, at A er en stamfunktion til f.

Derfor må[3]

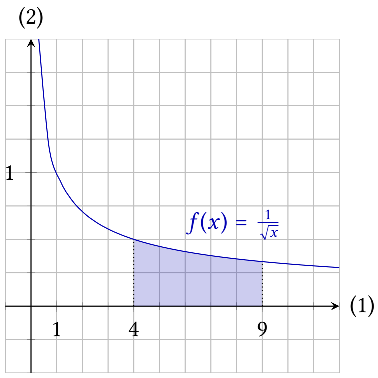
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A(b) - A(a).$$

[3]Dette følger af definitionen på det bestemte integral.

Men ud fra definitionen af $A(x)$ kan man se, at $A(a) = 0$, mens $A(b)$ svarer til arealet mellem grafen for f og førsteaksen i intervallet $[a; b]$. $A(b) - A(a)$ er altså lig arealet, og sætningen er hermed vist for voksende funktioner.

Hvis funktionen derimod er aftagende, er beviset principielt det samme, dog vil ulighedstegnene i (3.1) og (3.2) vende den modsatte vej.

Hvis funktionen ikke er monotont voksende eller aftagende, kan man dele førsteaksen op i funktionens monotoniintervaller. På disse intervaller gælder sætningen, og den må derfor gælde for hele intervallet pga. sætning 3.4. ∎



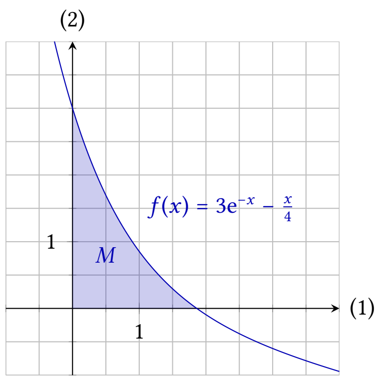
Figur 3.4: Arealet mellem grafen for funktionen f og førsteaksen i intervallet $[4; 9]$ er 2.

Her følger nogle eksempler på beregning af arealet mellem grafen for en funktion og førsteaksen:

Eksempel 3.6 Hvis man skal finde arealet mellem grafen for funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ og førsteaksen i intervallet $[4; 9]$, beregner man

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \Big[2\sqrt{x}\Big]_4^9 = 2 \cdot \sqrt{9} - 2 \cdot \sqrt{4} = 2\,.$$

Det søgte areal (se figur 3.4) er derfor 2.



Figur 3.5: Grafen for $f(x) = 3\mathrm{e}^{-x} + \frac{x}{4}$ afgrænser sammen med akserne en punktmængde M.

Eksempel 3.7 På figur 3.5 kan man se, at grafen for funktionen

$$f(x) = 3\mathrm{e}^{-x} - \frac{x}{4}$$

sammen med første- og andenaksen afgrænser en punktmængde M. Arealet af M kan bestemmes ved et bestemt integral. Før man kan beregne integralet, bliver man dog nødt til at kende integrationsgrænserne.

Den nedre grænse er 0, idet punktmængden begynder ved andenaksen. Den øvre grænse kan findes, der hvor grafen skærer førsteaksen. For at finde dette sted, skal man løse ligningen $f(x) = 0$, dvs.

$$3\mathrm{e}^{-x} - \frac{x}{4} = 0\,.$$

Denne ligning kan ikke løses analytisk, så man bliver nødt til at anvende et CAS-værktøj, hvorved man finder ud af, at løsningen er

$$x = 1{,}8628 \ .$$

Man skal altså integrere $f(x)$ over intervallet $[0; 1{,}8628]$.

Det giver

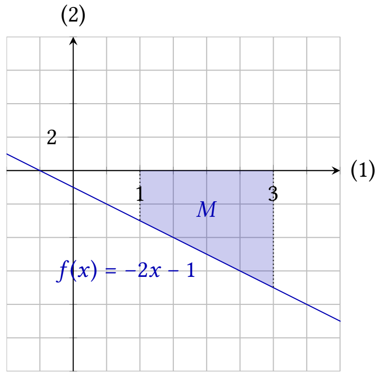
$$\begin{aligned}\int_0^{1{,}8628} \left(3\mathrm{e}^{-x} - \frac{x}{4}\right) \mathrm{d}x &= \left[-3\mathrm{e}^{-x} - \frac{x^2}{8}\right]_0^{1{,}8628} \\ &= \left(-3\mathrm{e}^{-1{,}8628} - \frac{1{,}8628^2}{8}\right) - \left(-3\mathrm{e}^{-0} - \frac{0^2}{8}\right) \\ &= 2{,}1005 \ .\end{aligned}$$

Punktmængden M har altså arealet 2,1005.

Hvis grafen ligger under førsteaksen

Sætning 3.5 kan bruges til at beregne arealet mellem grafen for en funktion og førsteaksen, men kun hvis funktionens graf ligger over førsteaksen. Hvad mon der sker, hvis grafen ligger under førsteaksen?

Eksempel 3.8 På figur 3.6 ses punktmængden M, der ligger mellem grafen for $f(x) = -2x - 1$ og førsteaksen i intervallet $[1; 3]$. Man kan ikke uden videre bruge det bestemte integral til at beregne arealet af M, da grafen for f ligger under førsteaksen.



Figur 3.6: Punktmængden M ligger under førsteaksen.

Glemmer man dette og beregner det bestemte integral, finder man

$$\int_1^3 (-2x - 1)\,\mathrm{d}x = \left[-x^2 - x\right]_1^3 = (-3^2 - 3) - (-1^2 - 1) = -10 \ ,$$

og det giver ikke mening, da et areal ikke kan være negativt.

Da der er tale om en lineær funktion, kan man dog beregne arealet geometrisk, idet M er et trapez, og her finder man, at arealet er 10. Altså giver det bestemte integral arealet, men med omvendt fortegn.

Konklusionen fra eksemplet ovenfor gælder generelt. Det bestemte integral giver altså arealet mellem grafen og førsteaksen *med fortegn*. Ligger grafen for f over førsteaksen finder man altså arealet, men ligger den under, finder man arealet med negativt fortegn.

3.2 Arealer mellem grafer

Det bestemte integral kan også bruges til at beregne arealer mellem grafer. Hvis den ene graf ligger helt over den anden, skal man blot finde arealet under begge graferne, og trække disse fra hinanden. Der gælder følgende sætning.

Sætning 3.9

Lad der være givet to funktioner f og g, sådan at $f(x) \geq g(x) \geq 0$ på hele intervallet $[a; b]$. Så er arealet mellem graferne for f og g i intervallet $[a; b]$ givet ved

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\ .$$

Bevis

Idet grafen for f ligger over grafen for g er arealet under grafen for f større end arealet under grafen for g. Arealet mellem de to grafer er derfor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

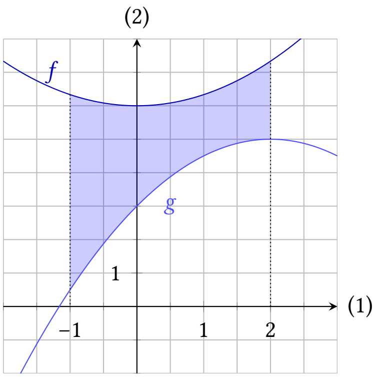
som ifølge sætning 3.3 er lig med

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\ . \qquad \blacksquare$$

Eksempel 3.10 I dette eksempel beregnes arealet mellem graferne for de to funktioner

$$f(x) = \frac{x^2}{3} + 6 \qquad \text{og} \qquad g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + 3$$

i intervallet $[-1; 2]$ (se figur 3.7).



Figur 3.7: Arealet mellem graferne for de to funktioner $f(x) = \frac{x^2}{3}+6$ og $g(x) = -\frac{x^2}{2}+2x+3$ i intervallet $[-1; 2]$.

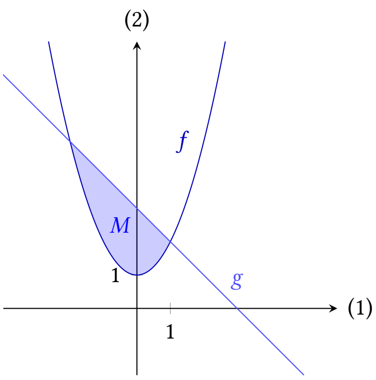
På figuren kan man se, at grafen for f ligger over grafen for g. Arealet mellem de to grafer er derfor ifølge sætning 3.9

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2} \left(\left(\frac{x^2}{3} + 6 \right) - \left(-\frac{x^2}{2} + 2x + 3 \right) \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{2} \left(\tfrac{5}{6}x^2 - 2x + 3 \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\tfrac{5}{18}x^3 - x^2 + 3x \right]_{-1}^{2} \\
&= \left(\tfrac{5}{18} \cdot 2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2 \right) - \left(\tfrac{5}{18} \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + 3 \cdot (-1) \right) \\
&= \tfrac{17}{2}\ .
\end{aligned}$$

Eksempel 3.11 På figur 3.8 kan man se, at graferne for de to funktioner

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad \text{og} \qquad g(x) = -x + 3$$

afskærer en punktmængde M. Arealet af denne mængde kan bestemmes vha. et integral, men for at kunne gøre det skal man kende integrationsgrænserne.



Figur 3.8: Graferne for $f(x) = x^2 + 1$ og $g(x) = -x + 3$ afskærer en punktmængde M.

Man skal derfor finde ud af, ud for hvilke værdier af x de to grafer skærer hinanden. Dette gør man ved at løse ligningen $f(x) = g(x)$:

$$x^2 + 1 = -x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \ \lor \ x = 1\ .$$

Man skal derfor integrere over intervallet $[-2; 1]$. Idet grafen for g ligger over grafen for f i dette interval, skal man beregne

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{1} \big((-x+3) - (x^2+1)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} \\
&= \left(-\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 - \tfrac{1}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1\right) \\
&\qquad\qquad - \left(-\tfrac{1}{3}\cdot(-2)^3 - \tfrac{1}{2}\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2)\right) \\
&= \tfrac{9}{2}\,,
\end{aligned}$$

og dette er altså arealet af punktmængden M.

Sætning 3.9 gælder kun i de tilfælde, hvor begge graferne ligger over førsteaksen. Men faktisk er det kun nødvendigt, at den ene graf ligger over den anden. En mere generel udgave af sætning 3.9 er derfor denne:

Sætning 3.12

Lad der være givet to kontinuerte funktioner f og g, sådan at $f(x) \geq g(x)$ på hele intervallet $[a; b]$. Så er arealet mellem graferne for f og g i intervallet $[a; b]$ givet ved

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Bevis
Hvis begge funktioners grafer ligger over førsteaksen, er sætningen det samme som sætning 3.9. Er det ikke tilfældet vil grafen for g have et minimum $-M$, hvor M er et positivt tal. De to funktioner

$$f_1(x) = f(x) + M \qquad \text{og} \qquad g_1(x) = g(x) + M\,,$$

vil derfor have grafer, der er lodrette parallelforskydninger af graferne for f og g, og som ligger over førsteaksen. Da graferne for f_1 og g_1 ligger over førsteaksen, kan arealet mellem dem beregnes vha. sætning 3.9, og man får at arealet er

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f_1(x) - g_1(x))\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \big((f(x)+M) - (g(x)+M)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Arealet mellem graferne for f_1 og g_1 må være det samme som arealet mellem graferne for f og g, da de to grafer er blevet parallelforskudt med det samme stykke. Altså er arealet mellem graferne for f og g givet ved

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\,. \qquad \blacksquare$$

Eksempel 3.13 I dette eksempel beregnes arealet mellem graferne for

$$f(x) = x + 1 \qquad \text{og} \qquad g(x) = 2^{-x} - 3$$

i intervallet $[0; 3]$ (se figur 3.9).

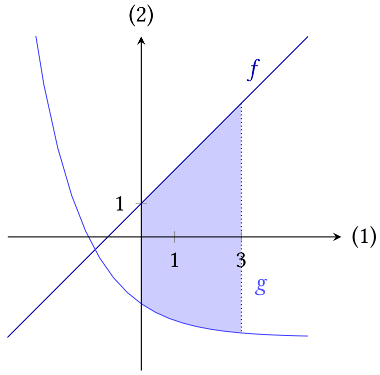
Da grafen for f ligger over grafen for g skal man beregne

$$\int_0^3 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \big((x+1) - (2^{-x} - 3)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (-2^{-x} + x + 4)\,\mathrm{d}x$$

for at finde arealet.

Integralet kan beregnes ved håndkraft, men man kan også bruge et CAS-værktøj. Herved finder man, at arealet er

$$\int_0^3 (-2^{-x} + x + 4)\,\mathrm{d}x = 15{,}24\ .$$



Figur 3.9: Arealet mellem graferne for funktionerne $f(x) = x + 1$ og $g(x) = 2^{-x} - 3$.

3.3 Øvelser

Øvelse 3.1
Beregn følgende bestemte integraler:

a) $\displaystyle\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-1}^3 (3x^2 - 4x + 2)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{10} (\mathrm{e}^x + x)\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$

Øvelse 3.2
Beregn følgende bestemte integraler:

a) $\displaystyle\int_2^4 (2x - 3)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^3 (-x^3 + 4x^2 + 1)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$

Øvelse 3.3
Bestem følgende bestemte integraler.

a) $\displaystyle\int_0^1 6x(3x^2 - 1)^3\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^2 x(3x^2 + 7)^4\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-1}^0 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{16 + t^2}}\,\mathrm{d}t$

e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} \frac{3\mathrm{e}^{2x}}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$

Øvelse 3.4
Grafen for funktionen $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde M.

Bestem arealet af M.

Øvelse 3.5
Bestem arealet mellem graferne for $f(x) = x^2 - 4x + 6$ og $g(x) = -x + 3$ i intervallet $[0; 4]$.

Øvelse 3.6
Graferne for funktionerne $f(x) = x^3 - x$ og $g(x) = x^2 + 1$ samt linjerne med ligningerne $x = -1$ og $x = 1$ afgrænser en punktmængde.

Bestem arealet af denne.

Øvelse 3.7
Graferne for $f(x) = x^2$ og $g(x) = -x + 6$ afgrænser punktmængden M.

Bestem arealet af M.

Øvelse 3.8
Graferne for $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = -x + 6$ afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde.

Bestem arealet af denne.

Øvelse 3.9
Graferne for funktionerne $f(x) = 2^x$ og $g(x) = 8$ afgrænser sammen med andenaksen en punktmængde.

Bestem arealet af denne.

Øvelse 3.10
Grafen for $f(x) = 1 - x^2$ skærer førsteaksen i to punkter. Grafen samt grafens tangenter i disse to punkter afgrænser en punktmængde.

Bestem arealet af denne punktmængde.

Øvelse 3.11
Bestem tallet a, således at

$$\int_1^a (x^2 + x)\,\mathrm{d}x = 138 .$$

Øvelse 3.12
Om funktionen f oplyses at

$$\int_{-3}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 ,$$
$$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5 \quad \text{og}$$
$$\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 8 .$$

Bestem tallene

a) $\int_{-3}^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ b) $\int_{-3}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ c) $\int_5^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$

Øvelse 3.13
Funktionen f er givet ved

$$f(x) = (3 - x) \cdot \sqrt{x} .$$

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde M der har et areal.

a) Bestem arealet af M.

b) Bestem tallet k, så linjen med ligningen $x = k$ deler M i to punktmængder med lige store arealer.

Øvelse 3.14
Funktionerne f og g givet ved

$$f(x) = x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = ax$$

hvor a er et positivt tal, afgrænser en punktmængde der har arealet 3.

Bestem tallet a.

Øvelse 3.15
Funktionerne f og g givet ved

$$f(x) = 10x - x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = ax$$

afgrænser en punktmængde der har arealet 36.

Bestem tallet a.

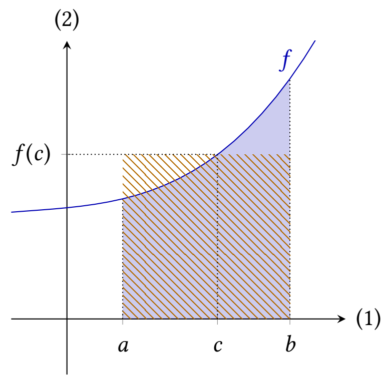
4 Flere anvendelser for bestemte integraler

Integraler viser sig at kunne bruges til at beregne andet end arealet under og mellem grafer. Bl.a. kan man vha. integraler finde længden af en krum kurve og rumfanget og overfladearealet af et såkaldt omdrejningslegeme.

4.1 Middelværdi for en funktion

I dette afsnit vises hvordan det bestemte areal kan bruges til at definere en funktions middelværdi i et givet interval. Det bestemte integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ giver arealet under grafen for funktionen f i intervallet $[a;b]$. Hvis man omformer dette areal til et rektangel med bredden $b-a$, så vil man kunne finde højden af rektanglet som funktionsværdien $f(c)$ for et tal c i intervallet[1] $[a;b]$ (se figur 4.1).

[1] I hvert fald så længde funktionen er kontinuert.



Figur 4.1: Arealet under grafen svarer til arealet af det skraverede rektangel.

Arealet af dette rektangel er så $f(c)\cdot(b-a)$, men arealet er også givet ved det bestemte integral, dvs.

$$f(c)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

hvilket også kan skrives som

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}\ .$$

Tallet $f(c)$ er det man kalder funktionens middelværdi. Definitionen er:

Definition 4.1

Hvis f er en integrabel funktion defineret på intervallet $[a;b]$, så defineres funktionens *middelværdi* i dette interval til at være tallet

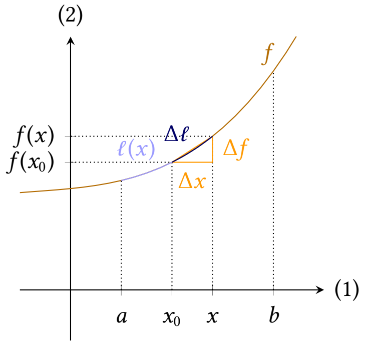
$$\overline{f} = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}\ .$$

Eksempel 4.2 Middelværdien af funktionen $f(x) = x^2+1$ i intervallet $[-3;3]$ er

$$\overline{f} = \frac{\int_{-3}^{3}(x^2+1)\,\mathrm{d}x}{3-(-3)} = \frac{\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-3}^{3}}{6} = \frac{12-(-12)}{6} = 4\ .$$

Middelværdien af funktionen i dette interval er altså 4.

4.2 Kurvelængder



Figur 4.2: $\Delta\ell$ er næsten lig med den lille trekants hypotenuse.

Man kan også bestemme længden af en kurve vha. integralregning. Hvis man ser på grafen for en funktion f, og man er interesseret i at bestemme kurvelængden af grafen fra $x = a$ til $x = b$, kan man undersøge »kurvelængde-funktionen« $\ell(x)$ som angiver længden af kurven fra a til x (se figur 4.2).

Hvis man lægger et lille stykke Δx til x, vokser $\ell(x)$ med stykket $\Delta\ell$. Ud fra figuren og Pythagoras' sætning kan man så argumentere for at

$$\Delta\ell \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta f)^2} = \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2}\ ,$$

og derved at

$$\frac{\Delta\ell}{\Delta x} \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2}\ .$$

Disse to størrelser er næsten lig hinanden, og man kan argumentere for at jo mindre Δx bliver, desto tættere kommer de to størrelser på hinanden, dvs.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\ell}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2}$$

hvilket betyder at

$$\ell'(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}\ .$$

Den samlede kurvelængde er $\ell(b) - \ell(a)$, og den kan derfor findes ved at beregne det bestemte integral af dette udtryk:

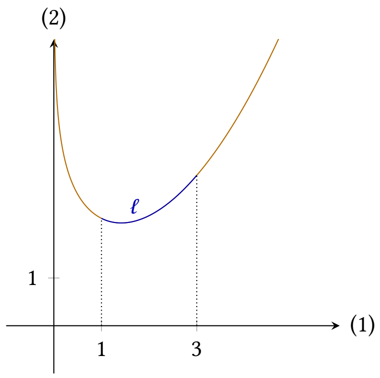
Sætning 4.3

Længden ℓ af grafen for en differentiabel funktion $f(x)$ fra punktet $(a; f(a))$ til punktet $(b; f(b))$ er givet ved

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x\ .$$

Eksempel 4.4 På figur 4.3 kan man se grafen for

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \ln(x) + 2\ .$$



Figur 4.3: Kurvelængden ℓ i intervallet $[1;3]$ af grafen for $f(x) = \frac{x^2}{4} - \ln(x) + 2$.

Mellem $x = 1$ og $x = 3$ er der fremhævet et stykke af grafen. Længden ℓ af dette stykke kan man finde vha. sætning 4.3.

Ifølge sætningen er længden af ℓ

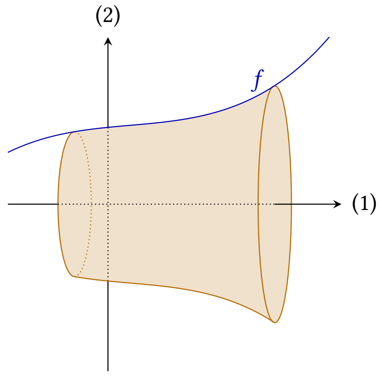
$$\ell = \int_1^3 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right)^2}\, \mathrm{d}x\ .$$

Dette udtryk er så vanskeligt, at det ikke kan beregnes analytisk, og man overlader derfor arbejdet til et CAS-værktøj, hvorved man finder

$$\ell = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right)^2}\, \mathrm{d}x = 2{,}36\ .$$

4.3 Rumfanget af et omdrejningslegeme

Hvis man drejer grafen for en funktion 360° om førsteaksen, får man et såkaldt *omdrejningslegeme*. På figur 4.4 kan man se omdrejningslegemet for grafen for en funktion f. Rumfanget af et sådant omdrejningslegeme kan beregnes vha. den formel der er givet i følgende sætning:



Figur 4.4: Omdrejningslegemet for grafen for en funktion f.

Sætning 4.5

Hvis man drejer grafen for en funktion $f(x)$ i intervallet $[a; b]$ 360° om førsteaksen, er rumfanget V af omdrejningslegemet givet ved

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x \, .$$

Bevis

Sætningen kan bevises vha. samme teknik som i sætning 3.5. Man ser på en voksende funktion f, og definerer rumfangs-funktionen $V(x)$ der giver rumfanget af omdrejningslegemet i intervallet fra a til x.

Man ser så på to x-værdier, x_0 og x hvor $x > x_0$, og ser på rumfanget $V(x) - V(x_0)$. På figur 4.5 kan man se hvordan man kan tegne to cylindre hvis rumfang er hhv. mindre eller større end $V(x) - V(x_0)$.

Rumfanget af en cylinder er $\pi r^2 h$ hvor r er radius og h er højden. De to cylindre ligger ned, så højden er i dette tilfælde $\Delta x = x - x_0$, mens radius er hhv. $f(x_0)$ og $f(x)$. De to cylindres rumfang er altså

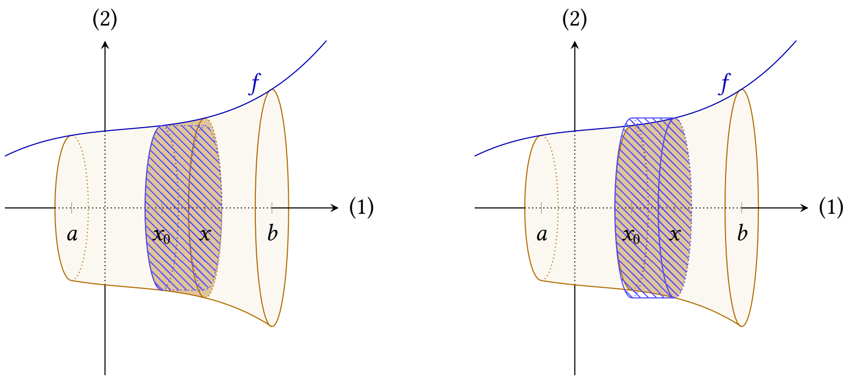
$$\pi f(x_0)^2 \cdot \Delta x \quad \text{og} \quad \pi f(x)^2 \cdot \Delta x \, .$$

Da $V(x) - V(x_0)$ ligger mellem disse to rumfang, har man

$$\pi f(x_0)^2 \cdot \Delta x \le V(x) - V(x_0) \le \pi f(x)^2 \cdot \Delta x \, ,$$

som kan omskrives til

$$\pi f(x_0)^2 \le \frac{V(x) - V(x_0)}{x - x_0} \le \pi f(x)^2 \, .$$



(a) $V(x) - V(x_0) \ge \pi f(x_0)^2 \cdot (x - x_0)$.

(b) $V(x) - V(x_0) \le \pi f(x)^2 \cdot (x - x_0)$.

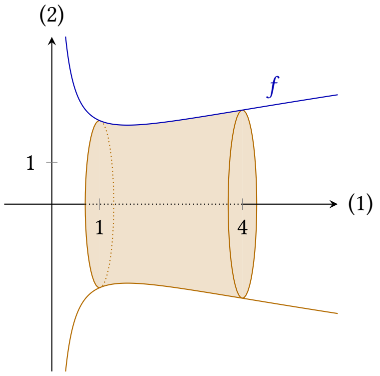
Figur 4.5: Rumfanget af den markerede figur er $V(x) - V(x_0)$.
De to skraverede cylindres rumfang er hhv. mindre og større end dette areal.

Lader man nu $x \longrightarrow x_0$, får man

$$\pi f(x_0)^2 \leq V'(x_0) \leq \pi f(x_0)^2 \ .$$

$V(x)$ er altså en stamfunktion til $\pi f(x)^2$, og fordi hele rumfanget af omdrejningslegemet kan beregnes som $V(b) - V(a)$, kan man altså beregne rumfanget som

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, \mathrm{d}x \ . \qquad \blacksquare$$



Figur 4.6: Omdrejningslegeme for $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ i intervallet $[1;4]$.

Eksempel 4.6 På figur 4.6 ses omdrejningslegemet for funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x} \ , \qquad x > 0$$

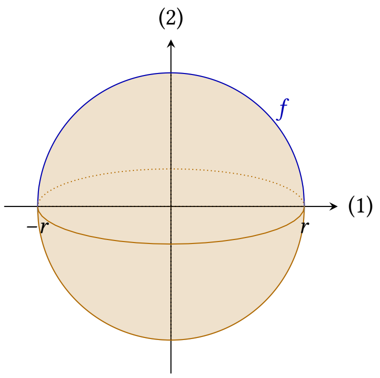
i intervallet $[1;4]$.

Rumfanget V af omdrejningslegemet kan da beregnes vha. sætning 4.5:

$$V = \pi \int_1^4 f(x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x \ .$$

Idet funktionsudtrykket skal kvadreres, bliver udregningerne lidt besværlige, og man kan derfor overlade dem til et CAS-værktøj, hvorved man finder at

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \tfrac{49}{4}\pi \approx 38{,}48 \ .$$



Figur 4.7: Omdrejningslegemet for funktionen $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ er en kugle.

Eksempel 4.7 Grafen for funktionen

$$g(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \ , \qquad -r \leq x \leq r$$

er en halvcirkel med centrum i $(0;0)$ og radius r.

Grafens omdrejningslegeme er derfor en kugle med centrum i $(0;0)$ og radius r. Vha. sætning 4.5 kan man derfor bestemme rumfanget af en kugle.

Rumfanget er

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \left[r^2 x - \tfrac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{r} \\ &= \pi \left(\left(r^3 - \tfrac{1}{3} r^3\right) - \left(-r^3 - \tfrac{1}{3}(-r)^3\right) \right) \\ &= \tfrac{4}{3} \pi r^3 \ , \end{aligned}$$

som er den velkendte formel for en kugles rumfang.

4.4 Overfladearealet af et omdrejningslegeme

Man kan finde frem til overfladearealet af et omdrejningslegeme ved at analysere figur 4.8. Definerer man arealfunktionen $O(x)$ til at være den funktion der giver overfladearealet af omdrejningslegemet i intervallet fra a til x, så er arealet af udsnittet på figuren givet ved

$$O(x + \Delta x) - O(x) \ .$$

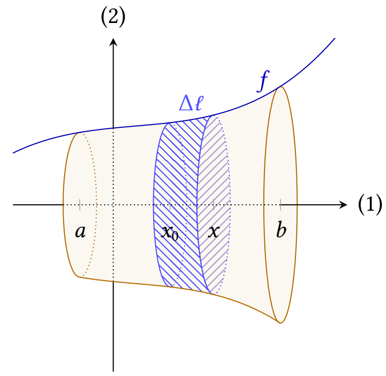
Men man kan også se at udsnittet på figuren med god tilnærmelse er en keglestub. Overfladearealet af det buede stykke af en keglestub kan beregnes vha. formlen

$$A = \pi s(r + R) \ ,$$

hvor s er længden af det skrå stykke, og r og R er radius i hhv. toppen og bunden af keglen.

Vha. denne formel kan man se at overfladearealet af udsnittet på figur 4.8 med rimelig tilnærmelse kan beregnes som

$$O(x) - O(x_0) \approx \pi \cdot \Delta\ell \cdot (f(x_0) + f(x)) \ .$$



Figur 4.8: Det skraverede område er næsten en keglestub.

I afsnit 4.2 blev der argumenteret for at

$$\Delta\ell \approx \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2} \ .$$

Samlet set har man så at

$$O(x) - O(x_0) \approx \pi \cdot \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2} \cdot (f(x_0) + f(x))$$

som kan omskrives til

$$\frac{O(x) - O(x_0)}{x - x_0} \approx \pi \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2} \cdot (f(x) + f(x + \Delta x)) \ .$$

Denne tilnærmelse gælder bedre og bedre, jo tættere x er på x_0. Lader man derfor $x \longrightarrow x_0$, får man

$$O'(x_0) = \pi \cdot \sqrt{1 + f'(x_0)^2} \cdot (f(x_0) + f(x_0)) = 2\pi f(x_0)\sqrt{1 + f'(x_0)^2} \ .$$

Tager man det bestemte integral af $O'(x)$ i intervallet $[a; b]$, beregner man $O(b) - O(a)$ som jo er hele overfladearealet i intervallet fra a til b. Dvs. man har denne sætning:

Sætning 4.8

Hvis f er en differentiabel funktion, så er overfladearealet af det omdrejningslegeme man får når man drejer grafen for f 360° om førsteaksen i intervallet $[a; b]$, givet ved

$$O = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x \ .$$

Eksempel 4.9 Rumfanget af omdrejningslegemet for funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}\,, \qquad x > 0$$

i intervallet $[1; 4]$ blev bestemt eksempel 4.6 ovenfor.

Hvis man i stedet vil bestemme overfladearealet af omdrejningslegemet, skal man bruge sætning 4.8. Først beregnes

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Overfladearealet af omdrejningslegemet er så givet ved

$$O = 2\pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right) \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

Dette integral er næppe noget man har lyst til at forsøge at beregne ved håndkraft. Anvender man et CAS-værktøj, finder man at dette integral giver 44,66. Overfladearealet af omdrejningslegemet på figur 4.6 er altså 44,66.

4.5 Øvelser

Øvelse 4.1
Bestem middelværdien for funktionen $f(x) = x^2 - 3x + 1$ i intervallet $[0; 10]$.

Øvelse 4.2
Bestem den eksakte værdi af middelværdien for funktionen

$$f(x) = \sin(x)\,, \quad 0 \le x \le \pi\,.$$

Øvelse 4.3
Middelværdien for funktionen $f(x) = ax^2 + \mathrm{e}^x$ i intervallet $[0; 1]$ er 5.

Bestem tallet a.

Øvelse 4.4
Bestem længden af graferne for disse to funktioner:

a) $f(x) = 2x^2 - x\,, \quad -3 \le x \le 4$

b) $g(x) = \ln(x) + 2\,, \quad 1 \le x \le 10$

Øvelse 4.5
Bestem længden af grafen for funktionen $f(x) = \sin(x)$ i intervallet $[0; 2\pi]$.

Øvelse 4.6
Graferne for de tre funktioner

$$f(x) = \frac{1}{x}\,, \quad g(x) = x^2 \quad \text{og} \quad h(x) = 8\sqrt{x}$$

afgrænser i første kvadrant et område.

Bestem omkredsen af dette område.

Øvelse 4.7
Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer når man drejer grafen for

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

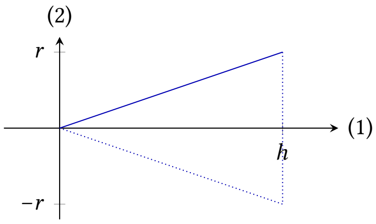
360° om førsteaksen i intervallet $[1; 2]$.

Øvelse 4.8
Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 5\,, \quad 0 \le x \le 4\,.$$

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer når man drejer grafen for f 360° om førsteaksen.

Øvelse 4.9
Figuren nedenfor viser et tværsnit gennem en kegle indlagt i et koordinatsystem.



Det skrå linjestykke i første kvadrant er et udsnit af grafen for en funktion f.

a) Bestem en forskrift for f.

b) Benyt forskriften til at udlede en formel for rumfanget af en kegle.

Øvelse 4.10
Graferne for de to funktioner

$$f(x) = -x^2 + 8x - 11 \quad \text{og} \quad g(x) = 0{,}1x^2 - 0{,}8x + 2{,}2$$

afgrænser i første kvadrant et område M.

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer når M drejes 360° om førsteaksen.

Øvelse 4.11
Bestem overfladearealet af det omdrejningslegeme der fremkommer ved at dreje grafen for funktionen

$$f(x) = 1 - x^2 \,, \quad 0 \leq x \leq 1$$

360° om førsteaksen.

Øvelse 4.12
Brug funktionen fra øvelse 4.9 til at udlede en formel for overfladearealet af en kegle.