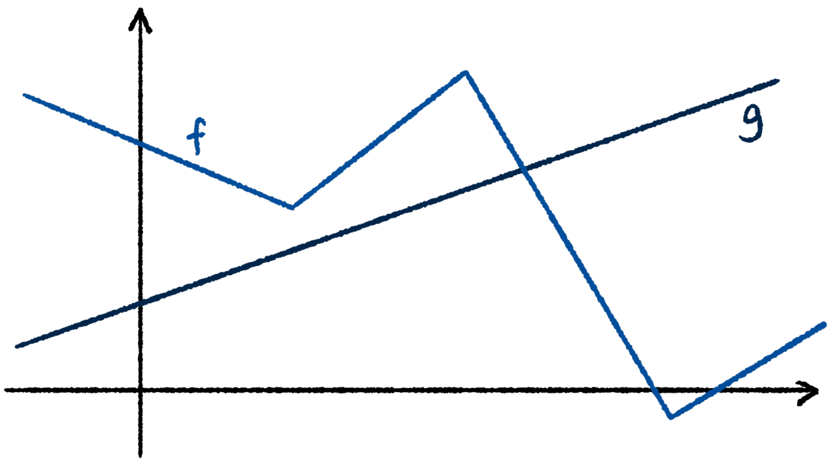
Matematik i grundforløbet

Version 2.1
6. august 2020



Mike Vandal Auerbach
www.mathematicus.dk

Matematik i grundforløbet
Version 2.1, 2020

Disse matematiknoter er skrevet til matematikundervisningen i grundforløbet (som det ser ud efter gymnasiereformen 2017) på stx. Noterne er skrevet med det formål at have en grundbog, som kun indeholder den grundliggende matematiske teori. I forbindelse med samarbejdet med naturvidenskabeligt grundforløb (eller med andre fag) er det derfor nødvendigt at supplere med eksempler og andet materiale, der dækker konkrete anvendelser.

Disse noter er skrevet til matematikundervisning på stx og må frit anvendes til ikke-kommercielle formål.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Indhold

Variable og sammenhænge 1

Megen matematik beskæftiger sig med sammenhænge mellem forskellige størrelser. Ser man f.eks. på en cirkel, så er der en sammenhæng mellem dens radius og dens areal. Kører man en tur i en taxa, er der en sammenhæng mellem, hvor langt man kører og den pris, man skal betale for turen. Sådanne sammenhænge kan udtrykkes matematisk vha. formler og ligninger. I det følgende fokuseres der udelukkende på såkaldte *lineære* sammenhænge, men mange af de begreber der introduceres dækker i virkeligheden et bredere område.

1.1 Variable

Når man udtrykker en sammenhæng som en formel, beskriver man de størrelser, der indgår i sammenhængen (f.eks. radius eller areal), vha. *variable.*

En *variabel* er – som navnet måske antyder – en størrelse der varierer.[1] Det er altså en størrelse, som ikke har en fast værdi. En variabel i matematik betegnes altid med *ét* bogstav,[2] f.eks. x.

[1] En størrelse, der ikke varierer, men har én fast værdi, kaldes en *konstant.*

[2] I denne sammenhæng er det vigtigt at pointere, at der i matematik er forskel på store og små bogstaver – x og X er altså to forskellige variable.

Omkredsen en cirkel kan f.eks. bestemmes ved formlen

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \;, \tag{1.1}$$

hvor O betegner arealet, og r betegner radius. I dette eksempel er både O og r variable. Dvs. O og r har ikke nogen fast værdi.[3] Men der er dog en *sammenhæng* mellem værdierne af de to variable – hvis man ser på en cirkel med en bestemt radius, så har man også et bestemt areal. Det er denne sammenhæng der er udtrykt i formlen.

[3] Tallet π *har* derimod en fast værdi, så det er ikke en variabel, men en konstant. Det samme gælder i øvrigt tallet 2.

Når der er sammenhæng mellem to variable, betyder det, at hvis man ændrer på den ene variabel, så bliver den anden også automatisk ændret. Hvis man f.eks. gør en cirkels radius større, så bliver omrkredsen også større. I formlen (1.1) kalder man r den *uafhængige variabel*, mens O kaldes den *afhængige variabel* fordi dens værdi afhænger af værdien af r.

I princippet kunne man lige så godt have valgt at sige, at O er den uafhængige variabel, og r er den afhængige – for hvis man ændrer på omkredsen af en cirkel, så ændrer man også radius. Formlen (1.1) kan så skrives om, så den i stedet ser således ud:

$$r = \frac{O}{2 \cdot \pi} \;.$$

Men det er mere naturligt at vælge radius som den uafhængige variabel, for hvis man skal tegne en cirkel, så er det radius, man tegner ud fra – ikke omkredsen.

I mange tilfælde giver det derfor mest mening at lade en bestemt variabel være den uafhængige. Andre eksempler kunne være:

- Hvis man beregner lufttrykket p i forskellige højder h på et bjerg, så er h den uafhængige variabel. Man kan nemlig ændre højden ved at vandre op og ned ad bjerget, og lufttrykket ændrer sig så i takt med højden. Det virker derimod mærkeligt, hvis man beskriver situationen ved at sige, at man kan ændre på lufttrykket, og det fører så til at man kommer til at stå i forskellige højder.
- Indbyggertallet N i en by ændrer sig typisk med tiden t (målt i år). Her vil t være den uafhængige variabel. Det skyldes, at det er indbyggertallet der ændrer sig, fordi tiden går – og ikke årstallet som ændrer sig, fordi indbyggertallet gør.

1.2 Repræsentation

Sammenhænge mellem variable kan vises på flere forskellige måder. Man kan vise

- en tabel, hvor sammenhørende værdier af to (eller flere) variable vises side om side,
- en model, som er en formel eller en ligning, der beskriver sammenhængen, eller
- en graf, som kan vise hvordan værdien af en variabel afhænger af en anden.

Her gennemgås tabeller og modeller gennem et par eksempler. Den grafiske repræsentation gennemgås i et senere afsnit.

Tabel 1.1: Sammenhængen mellem pris og forbrug af el.

Forbrug (kWh)	Pris (kr.)
2000	1148,60
2500	1398,25
3000	1647,90
3500	1897,55
4000	2147,20
4500	2396,85

Eksempel 1.1 Hvis man får »NaturEl« fra Energi Fyn, betaler man 150 kr. om året i abonnement og 0,4993 kr. pr. kWh, der bliver brugt.[2]

Denne sammenhæng kan beskrives i en tabel, hvor man viser prisen for forskellige forbrug af el, se tabel 1.1.

Men man kan også opstille en matematisk model, nemlig

$$y = 0{,}4993 \cdot x + 150 \ ,$$

hvor y er den pris, man skal betale om året, og x er det forbrugte antal kWh.

Har man en tabel, kan man i princippet kun udtale sig om de værdier, der er i tabellen. En model gør det derimod muligt at beregne alle mulige sammenhørende værdier af variablene. Ser man på tabellen fra eksempel 1.1, så kan man kun udtale sig om prisen, hvis forbruget har en helt bestemt størrelse. Modellen gør det derimod muligt at beregne prisen for et hvilket som helst forbrug.

Fordi en tabel kun indeholder en begrænset mængde data, så kan man ikke altid omsætte en tabel direkte til en model. Hvis man har en teoretisk beskrivelse af sammenhængen (f.eks. abonnement og pris pr. kWh, som i eksempel 1.1), så kan man skrive en model op og sammenligne med tabellen.

Hvis man ikke kender en teoretisk sammenhæng, så bliver man nødt til at analysere sine data for at finde frem til en model, der passer. Det findes der forskellige metoder til, én af disse er beskrevet i kapitel 4.

Tabel 1.2: Sammenhængen temperaturen målt i °C og temperaturen i °F.

x (°C)	y (°F)
0	32
10	50
20	68
30	86
40	104

Eksempel 1.2 Sammenhængen mellem temperaturen når man måler den i °C (grader celsius) og når man måler den i °F (grader fahrenheit), kan ses i 1.2.[4]

En matematisk analyse af disse data viser, at sammenhængen kan beskrives ved modellen

$$y = 1{,}8 \cdot x + 32\ ,$$

hvor x er temperaturen målt i °C, og y er temperaturen målt i °F.

Bemærk i øvrigt, at i modellen fra eksempel 1.1 er elforbruget den uafhængige variabel, mens prisen er den afhængige. Det skyldes at prisen man betaler afhænger af hvor meget el man forbruger – det er ikke sådan at man starter med at betale en pris og så får man et antal kWh der passer til.

I eksempel 1.2 kan man omvendt sagtens skrive sammenhængen om, så det er temperaturen i °C der er den afhængige variabel. I eksemplet er det i stedet temperaturen i °F der er den afhængige variabel, dvs. formlen kan bruges til at regne °C om til °F; men der er intet til hinder for at man skriver sammenhængen om, så man kan bruge den til at regne den modsatte vej.

1.3 Grafisk repræsentation

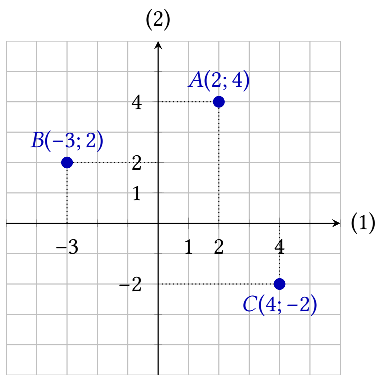
Hvis man har to variable, der afhænger af hinanden, er det muligt at tegne et billede, der illustrerer sammenhængen. Et sådant billede kaldes en *graf*, og den tegnes i et *koordinatsystem*.

Koordinatsystemer

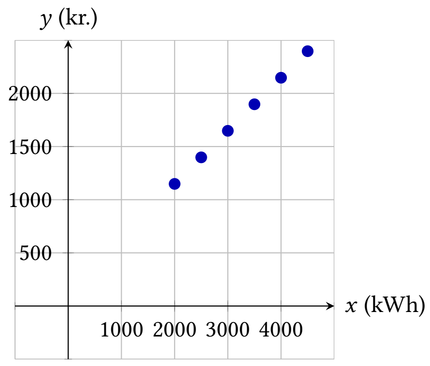
Et koordinatsystem kan forstås som en slags net, der lægges ud over planen, og som man bruger til at beskrive, hvor punkter befinder sig.

Man starter med at tegne to akser, første- og andenaksen (ofte kaldet x- og y-aksen), der står vinkelret på hinanden. De to akser er tallinjer, der skærer hinanden i deres nulpunkter, jf. figur 1.3. Skæringspunktet mellem de to akser kaldes *origo*.

Et punkt i et koordinatsystem befinder sig altid lodret ud for et tal på førsteaksen og vandret ud for et tal på andenaksen. Disse to værdier kaldes punktets *første-* og *andenkoordinat*. Et punkt består altså af et såkaldt koordinat*sæt* $(x; y)$, der fortæller, hvor punktet befinder sig i koordinatsystemet (se figur 1.3). Origo har f.eks. koordinaterne $(0; 0)$.



Figur 1.3: De tre punkter $A(2; 4)$, $B(-3; 2)$ og $C(4; -2)$ indtegnet i et koordinatsystem.



(a) Forbrug og pris. (b) Temperatur i °C og °F.

Figur 1.4: Data fra tabel 1.1 og 1.2 indsat i hver deres koordinatsystem.
Begge afbildninger tyder på, at der er en pæn sammenhæng – i begge tilfælde ser det ud til at punkterne ligger på en ret linje.

Fra tabeller til grafer

En tabel kan indtegnes i et koordinatsystem som en række punkter ved at lade førstekoordinaten svare til den uafhængige variabel og andenkoordinaten svare til den tilhørende værdi af den afhængige variabel.

Eksempel 1.3 Tabellerne fra eksempel 1.1 og 1.2 viser sammenhængene mellem hhv. elforbrug og pris, og temperatur i celsius og fahrenheit. Tallene fra tabel 1.1 kan omskrives til en række punkter:

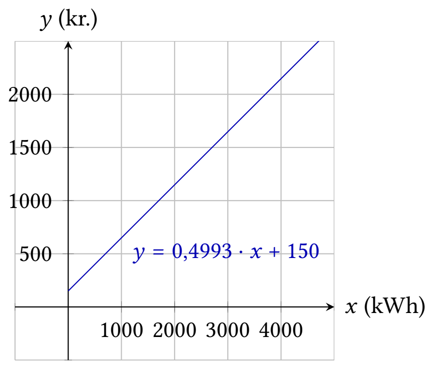
$$(2000, 1148.60)\,, \quad (2500, 1398.25)\,, \quad (3000, 1647.90)\,,$$
$$(3500, 1897.55)\,, \quad (4000, 2147.20)\,, \quad (4500, 2396.85)\,,$$

hvor førstekoordinaten er forbruget, og andenkoordinaten er prisen. Disse punkter kan derefter indsættes i et koordinatsystem, se figur 1.4(a).

På samme måde kan tabel 1.2 oversættes til koordinater, og punkterne indsættes i et koordinatsystem. Det giver billedet på figur 1.4(b).

I begge koordinatsystemer ser punkterne ud til at ligge på en ret linje. Det kunne derfor i begge tilfælde se ud som om, der er en simpel model, der ligger bag de to afbildninger.

De modeller der ligger bag de to afbildninger på figur 1.4 er beskrevet i eksempel 1.1 og 1.2. De to modeller kan beskrives som grafer, se figur 1.5.



(a) Forbrug og pris. (b) Temperatur i °C og °F.

Figur 1.5: Grafer over de to modeller fra eksempel 1.1 og 1.2.

Selve modellerne er de to ligninger

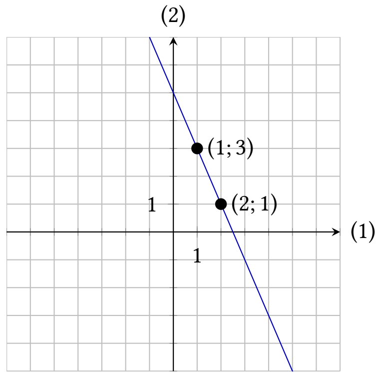
$$y = 0{,}4993 \cdot x + 150 \quad \text{og} \quad y = 1{,}8 \cdot x + 32\ .$$

Graferne består så af alle de punkter, hvor første- og andenkoordinaten tilsammen passer ind i den tilhørende ligning.

En graf er altså en billedlig beskrivelse af en ligning, der indeholder to variable. I princippet indeholder grafen og ligningen de samme informationer.

Eksempel 1.4 Ligningen $y = -2 \cdot x + 5$ beskriver en kurve i et koordinatsystem, se figur 1.6. På figuren kan man se, at punktet $(1;3)$ ligger på grafen. Det kan man også se af ligningen, idet man kan indsætte $x = 1$ og få

$$y = -2 \cdot 1 + 5 = 3\ .$$



Figur 1.6: Grafen for $y = -2 \cdot x + 5$.

Man kan også bruge grafen til at løse ligningen $-2 \cdot x + 5 = 1$. Dette svarer nemlig til at sætte $y = 1$ og finde de tilhørende værdier af x. Som man kan se på figuren, går grafen gennem punktet $(2;1)$. Dvs.

$$-2 \cdot x + 5 = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 2\ .$$

Det kunne man også have fundet ud af ved at løse ligningen algebraisk.

1.4 Lineære sammenhænge

De sammenhænge der er blevet beskrevet ind til nu har formler der følger samme mønster. Det drejer sig om formler som disse:

$$y = 3 \cdot x + 2, \qquad y = 7 \cdot x - 5 \qquad \text{og} \qquad y = -4 \cdot x + 3\ .$$

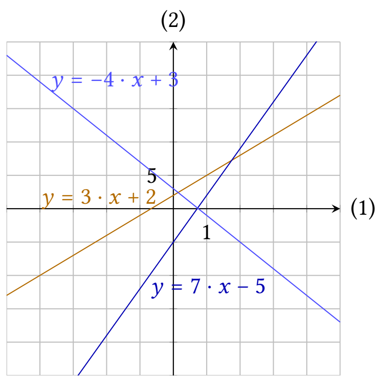
Sammenhænge der kan beskrives ved formler der ser sådan ud, kalder man *lineære* sammenhænge.

Definition 1.5

En *lineær sammenhæng* er en sammenhæng der kan beskrives ved formlen

$$y = a \cdot x + b\ ,$$

hvor a og b er to tal.



Figur 1.7: Graferne for de tre lineære sammenhænge $y = 3 \cdot x + 2$, $y = 7 \cdot x - 5$ og $y = -4 \cdot x + 3$.

Det viser sig at når man tegner grafen for en lineær sammenhæng i et koordinatsystem, får man en ret linje; det er derfor sammenhængene kaldes lineære (se figur 1.7). Omvendt kan man derfor også sige at en ret linje i et koordinatsystem kan beskrives ved en ligning af formen

$$y = a \cdot x + b\ .$$

1.5 Proportionalitet

Andre vigtige sammenhænge der kan være mellem variable, er såkaldt *proportionalitet*. Det defineres på følgende måde.

Definition 1.6: Proportionalitet

Man har:

1. y er *ligefrem proportional* med x betyder, at $y = k \cdot x$.
2. y er *omvendt proportional* med x betyder, at $y = \frac{k}{x}$.

Konstanten k kaldes *proportionalitetskonstanten*.

Når man taler om ligefrem proportionalitet, udelader man ofte ordet »ligefrem«. Hvis der i en tekst står »y er proportional med x«, menes der altså » ... ligefrem proportional med ... «.[4]

[4] Af og til kalder man også ligefrem proportionalitet for *direkte proportionalitet*.

Hvis man bytter lidt rundt på formlerne i definition 1.6 kan de to proportionalitetsformer også udtrykkes på denne måde:

1. y er ligefrem proportional med x, hvis $\frac{y}{x} = k$.
2. y er omvendt proportional med x, hvis $y \cdot x = k$.

Desuden kan man se, at hvis $y = k \cdot x$, er $x = \frac{1}{k} \cdot y$. Dvs. at hvis y er ligefrem proportional med x (med proportionalitetskonstant k) er x også ligefrem proportional med y (med proportionalitetskonstant $\frac{1}{k}$).

For omvendt proportionalitet har man, at hvis $y = \frac{k}{x}$ gælder også $x = \frac{k}{y}$. Dvs. hvis y er omvendt proportional med x, er x også omvendt proportional med y (med den samme proportionalitetskonstant).

Eksempel 1.7 Har man et mobiltelefonabonnement med fri SMS, hvor man kun betaler for opkald, og minutprisen er 0,70 kr., vil den samlede udgift være ligefrem proportional med antallet af talte minutter.

Kalder man udgiften for y og antallet af talte minutter for x har man nemlig:

$$y = 0{,}70 \cdot x \, .$$

Her er proportionalitetskonstanten 0,70.

Eksempel 1.8 Hvis man kører fra Odense til København (en strækning på ca. 160 km), vil rejsetiden være omvendt proportional med hastigheden, man kører med.

Hvis tiden y måles i timer og hastigheden x måles i kilometer pr. time, vil proportionalitetskonstanten være 160, og man får

$$y = \frac{160}{x} \, .$$

Af denne sammenhæng ses det (som man skulle forvente), at hvis man kører 80 km/h tager det 2 timer at køre fra Odense til København, og hvis man kører 160 km/h, tager det kun 1 time.

Eksempel 1.9 »T er proportional med kvadratet på p og omvendt proportional med s.«

Denne sammenhæng kan under ét udtrykkes som

$$T = k \cdot \frac{p^2}{s} \ ,$$

hvor k er proportionalitetskonstanten. [5]

[5] Bemærk her, at »kvadratet på p« altså betyder p^2.

1.6 Øvelser

Øvelse 1.1
Herunder er angivet en række begreber, der er helt centrale når man skal beskrive *sammenhænge* ved hjælp af matematik. Forklar hvad hvert af begreberne betyder.

a) Uafhængig variabel
b) Afhængig variabel
c) Konstant

Øvelse 1.2
Sammenhængen mellem en cirkels areal A og dens radius r er givet ved følgende udtryk

$$A = \pi \cdot r^2 \ .$$

a) Angiv hvilke størrelser der er *variable* og hvilke der er *konstante*.
b) Hvilken variabel er den *uafhængige variabel* i udtrykket?
c) Hvilken variabel er den *afhængige variabel* i udtrykket?

Øvelse 1.3
En sammenhæng mellem x og y er givet ved tabellen

x:	-2	-1	0	1	3	6
y:	11	9	7	5	1	-5

a) Afsæt tabellens data som punkter i et koordinatsystem.
b) Tegn den graf der ser ud til bedst at passe på punkterne.
c) Brug grafen til at bestemme y-værdien når $x = 4$.
d) Brug grafen til at bestemme x-værdien når $y = 15$.

Øvelse 1.4
En lineær sammenhæng mellem x og y er givet ved ligningen

$$y = 2 \cdot x - 3 \ .$$

a) Bestem på baggrund af ligningen to punkter der ligger på grafen.
b) Afsæt de to punkter i et koordinatsystem og tegn grafen.

Øvelse 1.5
Beskriv sammenhængen mellem x og y med en formel, når

a) y er ligefrem proportional med x med proportionalitetskonstant 4.
b) y er omvendt proportional med x med proportionalitetskonstant 9.

Øvelse 1.6
T er ligefrem proportional med S, og når $S = 4$ er $T = 12$.

Beskriv sammenhængen mellem T og S vha. en formel.

Øvelse 1.7
Udfyld de manglende felter i tabellen herunder, når det er givet, at y og x er ligefrem proportionale.

x:	1	3	⬚	9
y:	⬚	18	42	⬚

Øvelse 1.8
Udfyld de manglende felter i tabellen herunder, når det er givet, at y og x er omvendt proportionale.

x:	1	4	⬚	16
y:	⬚	⬚	4	2

Rette linjer 2

Som beskrevet i afsnit 1.4 er graferne for lineære sammenhænge rette linjer. Dvs. en ret linje i et koordinatsystem kan beskrives ved en ligning på formen

$$y = a \cdot x + b \, .$$

2.1 Hældning og skæring med akserne

Det er det muligt at aflæse værdierne af tallene a og b i ved at se på linjen i et koordinatsystem. Der gælder nemlig følgende sætning.

Sætning 2.1

For en den rette linje med ligningen $y = a \cdot x + b$ gælder:

1. Hvis x vokser med 1, vil y vokse med a.
2. Linjen skærer andenaksen i b.

Bevis
Når x vokser med 1, vokser y fra $a \cdot x + b$ til $a \cdot (x + 1) + b$. Dvs. y vokser med

$$(a \cdot (x + 1) + b) - (a \cdot x + b) = a \cdot x + a + b - a \cdot x - b = a \, .$$

På andenaksen er $x = 0$, dvs. skæringen med andenaksen er

$$y = a \cdot 0 + b = b \, .$$ ∎

For rette linjer i et koordinatsystem gælder altså at y vokser med et fast tal (a), hver gang x vokser med 1. Dette er årsagen til at denne type ligning svarer til en ret linje. Jo større a er, jo hurtigere vokser y, og linjen bliver så mere stejl. Tallet a kalder man derfor for linjens *hældning* eller *hældningskoefficient*.[1]

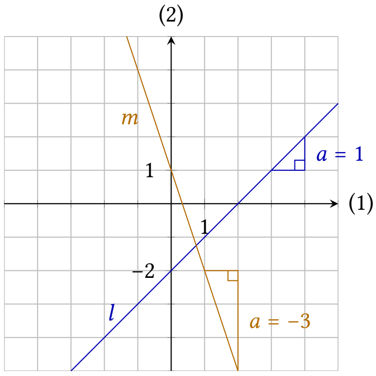
[1] En *koefficient* er en konstant, som er ganget på en variabel.

Hvis a er et negativt tal, aftager y når x vokser, og linjen vil derfor hælde den anden vej; dvs. der er tale om en aftagende graf.

Sætning 2.2

For den rette linje med ligningen $y = a \cdot x + b$ fortæller *hældningskoefficienten* a følgende:

1. Hvis $a > 0$ er linjen voksende.
2. Hvis $a < 0$ er linjen aftagende.



Figur 2.1: Aflæsning af tallene a og b.

Eksempel 2.3 På figur 2.1 ses to rette linjer l og m.

Linjen l skærer andenaksen i -2, og når man går 1 til højre, skal man gå 1 op for at finde grafen igen, dvs. hældningskoefficienten er $a = 1$.

l er har derfor ligningen $y = 1 \cdot x + (-2)$, hvilket reduceres til

$$y = x - 2\ .$$

Linjen m skærer andenaksen i 1, og går man 1 ud langs førsteaksen, skal man gå 3 ned ad andenaksen, dvs. hældningen er -3. Linjens ligning er derfor

$$y = -3 \cdot x + 1\ .$$

I det specielle tilfælde hvor hældningskoefficienten for en ret linje er 0, er y konstant; dvs. linjen er parallel med førsteaksen. En sådan linje har af gode grunde ingen skæringspunkter med førsteaksen.[2]

[2]Med mindre linjen falder sammen med førsteaksen, for så har den uendeligt mange punkter fælles med denne.

En ret linje med en hældningskoefficient der ikke er 0, skærer til gengæld førsteaksen. Dette skæringspunkt kan man regne sig frem til ud fra formlen.

Sætning 2.4

Den rette linje med ligningen $y = a \cdot x + b$ skærer førsteaksen i punktet $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Bevis
På førsteaksen er andenkoordinaten 0.[3] Linjen skærer derfor førsteaksen, hvor

[3]Husk at alle punkter på førsteaksen har formen $(x; 0)$, og alle punkter på andenaksen har formen $(0; y)$.

$$y = 0\ ,$$

dvs.

$$a \cdot x + b = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a \cdot x = -b \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -\frac{b}{a}\ .$$

Linjen skærer altså førsteaksen i punktet $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$. ∎

Eksempel 2.5 Den rette linje med ligningen $y = 4 \cdot x - 12$ skærer andenaksen i $b = -12$ og har hældningen $a = 4$. Den skærer derfor førsteaksen i

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{-12}{4} = 3\ .$$

Linjen med ligningen $y = 4 \cdot x - 12$ skærer altså førsteaksen i punktet $(3, 0)$ og andenaksen i punktet $(0, -12)$.

2.2 Skæringspunkter

Hvis to linjer ikke er parallelle, vil de have et skæringspunkt. Man kan finde skæringspunktet ved at løse det ligningssystem, der udgøres af de to linjers ligninger. Dette skyldes at linjerne skærer hinanden i et punkt der ligger på begge linjer, dvs. et punkt der skal passe ind i begge ligningerne samtidig.

Fremgangsmåden illustreres nemmest ved et eksempel.

Eksempel 2.6 De to linjer med ligningerne

$$y = x - 5 \qquad \text{og} \qquad y = -2x + 1$$

skærer hinanden (se figur 2.2).

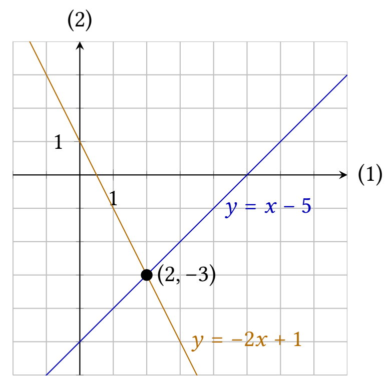
Koordinaterne til skæringspunktet bestemmer man ved at løse ligningssystemet. Idet y allerede er isoleret i begge ligninger, kan man sætte højresiderne lig med hinanden hvorved man får

$$\begin{aligned} x - 5 &= -2x + 1 && \Longleftrightarrow \\ 3x &= 6 && \Longleftrightarrow \\ x &= 2\ . \end{aligned}$$

Nu er førstekoordinaten x bestemt. For at finde punktet skal man også kende andenkoordinaten y. Den bestemmer man ved at sætte den fundne førstekoordinat ind i én af linjernes ligninger:

$$y = f(2) = 2 - 5 = -3\ .$$

De to linjer skærer altså hinanden i $(2, -3)$, som det også fremgår af figur 2.2.



Figur 2.2: Skæringspunktet mellem linjerne med ligningerne $y = x - 5$ og $y = -2x + 1$.

Grafisk fortolkning af ligningssystemer

Man kan finde skæringspunkter mellem linjer ved at løse et ligningssystem. Et ligningssystem kan omvendt fortolkes som to rette linjer. At løse ligningssystemet svarer så til at finde skæringspunktet mellem de to rette linjer.

Eksempel 2.7 Ligningssystemet

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -6x + 3y = 21 \end{cases}$$

kan omskrives til ligningerne for to rette linjer ved at isolere y i begge ligninger. Den første ligning giver

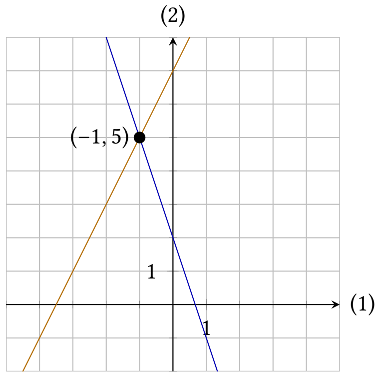
$$3x + y = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad y = -3x + 2\ ,$$

og den anden giver

$$-6x + 3y = 21 \quad \Longleftrightarrow \quad 3y = 6x + 21 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 2x + 7\ .$$

Ligningssystemet svarer altså til de to rette linjer med ligningerne

$$y = -3x + 2 \quad \text{og} \quad y = 2x + 7 \ .$$



Figur 2.3: Løsningen til ligningssystem kan aflæses som koordinaterne til skæringspunktet.

På figur 2.3 kan man se at de to linjer skærer hinanden i $(-1, 5)$. Ligningssystemet har derfor løsningen

$$x = -1 \qquad \wedge \qquad y = 5 \ .$$

2.3 Beregning af hældningskoefficienten

Hvis man kender to punkter på en ret linje, er linjens ligning entydigt bestemt.[4] Der er altså en sammenhæng mellem de to punkters koordinater og de to tal a og b. Det viser sig, at man kan finde en simpel formel for tallet a.

[4]Der går nemlig kun én bestemt ret linje gennem to givne punkter.

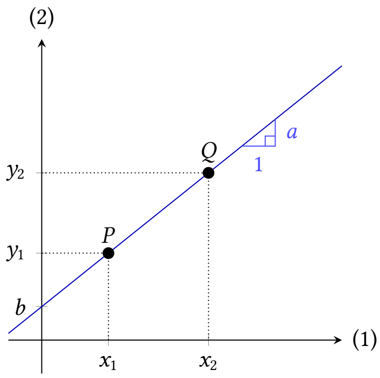
Sætning 2.8: To-punkts-formlen

Hvis den rette linje med ligningen $y = a \cdot x + b$ går gennem de to punkter $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$, er

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ .$$

Bevis

På figur 2.4 ses den rette linje med ligningen $y = a \cdot x + b$ og de to punkter $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$.



Figur 2.4: De to punkter P og Q på linjen med ligningen $y = a \cdot x + b$.

Da punkter P og Q ligger på linjen, gælder de to ligninger

$$\begin{aligned} y_2 &= a \cdot x_2 + b \ , \\ y_1 &= a \cdot x_1 + b \ . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Trækker man den nederste ligning fra den øverste, får man

$$y_2 - y_1 = (a \cdot x_2 + b) - (a \cdot x_1 + b) \ ,$$

som kan reduceres til

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 - a \cdot x_1 \ .$$

Nu sættes a uden for parentes, og man får

$$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a \ ,$$

og formlen er så bevist. ■

Eksempel 2.9 En ret linje går gennem punkterne $P(3, 5)$ og $Q(6, -7)$. Hvad er linjens ligning?

For at svare på dette spørgsmål, ser man på de to punkter. Heraf fremgår det, at

$$x_1 = 3 \ , \quad y_1 = 5 \ , \quad x_2 = 6 \quad \text{og} \quad y_2 = -7 \ .$$

Nu kan man bruge formlerne i sætning 2.8, og man får

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7 - 5}{6 - 3} = \frac{-12}{3} = -4 \ .$$

Den rette linje har altså ligningen $y = -4 \cdot x + b$, hvor b endnu er ukendt.

Tallet b kan man finde ved at indsætte koordinaterne til ét af de kendte punkter i ligningen. Idet linjen går gennem $P(3,5)$, ved man at $y = 5$ når $x = 3$, hvilket giver

$$-4 \cdot 3 + b = 5 \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 5 + 4 \cdot 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 17 \ .$$

Den rette linje har derfor ligningen $y = -4x + 17$.

Man kan også udlede følgende sætning, der giver formlen direkte, når man kender hældningskoefficienten:

Sætning 2.10

Hvis en ret linje har hældningskoefficienten a, og den går gennem punktet (x_1, y_1), så er linjens ligning

$$y = a \cdot (x - x_1) + y_1 \ .$$

Bevis

En ret linje har en ligningen på formen $y = a \cdot x + b$. Hvis punktet (x_1, y_1) ligger på linjen, må

$$y_1 = a \cdot x_1 + b \qquad \Leftrightarrow \qquad b = y_1 - a \cdot x_1 \ .$$

Dette udtryk for b indsættes i ligningen:

$$y = a \cdot x + (y_1 - a \cdot x_1) \ .$$

Omformer man denne ligning, får man

$$y = a \cdot x + y_1 - a \cdot x_1 = a \cdot x - a \cdot x_1 + y_1 = a \cdot (x - x_1) + y_1 \ ,$$

hvorved sætningen er bevist. ■

Eksempel 2.11 Hvis en ret linje går gennem punkterne $P(3,5)$ og $Q(6,-7)$, er hældningskoefficienten $a = -4$ (se eksempel 2.9).

Den rette linjes ligning kan så findes ved at indsætte én af de to punkter i ligningen fra sætning 2.10. Her vælges punktet $Q(6,-7)$:

$$y = a(x - x_1) + y_1 = -4(x - 6) - 7 = -4x + 24 - 7 = -4x + 17 \ .$$

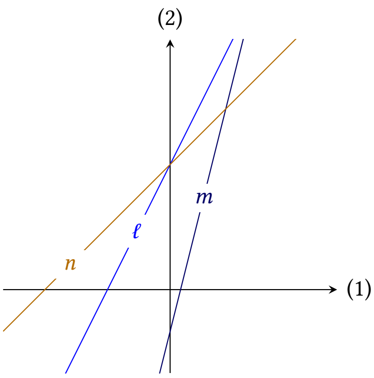
Man finder altså den samme ligning som i eksempel 2.9.

2.4 Øvelser

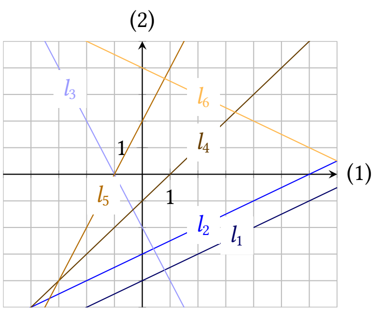
Øvelse 2.1
På tegningen til højre ses de 3 rette linjer ℓ, m og n som har ligningerne

$$y = 4x - 1\ ,$$
$$y = 2x + 3 \quad \text{og}$$
$$y = x + 3\ .$$

Hvilken linje har hvilken ligning?



Øvelse 2.2
Bestem ved aflæsning en ligning for hver af linjerne $l_1, \ldots, l_6$ som ses på billedet herunder.



Øvelse 2.3
Opskriv en ligning for den rette linje der går gennem punktet P, og som har hældningskoefficient a:

a) $P(0, 4)$ og $a = 2$.

b) $P(2, 1)$ og $a = -\frac{1}{2}$.

Øvelse 2.4
Bestem en ligning for den rette linje der går gennem punkterne:

a) $A(2, 3)$ og $B(-1, 9)$

b) $C(-3, 2)$ og $D(-4, 1)$

c) $P(-5, 1)$ og $Q(7, 1)$

Øvelse 2.5
Den rette linje ℓ går gennem punkterne $A(-4, 2)$ og $B(5, 5)$.

Bestem ved beregning en ligning for den rette linje der går gennem $C(3, -2)$ og er parallel med ℓ.

Øvelse 2.6
En ret linje ℓ går gennem punkterne $P(3, -7)$ og $Q(8, 8)$.

a) Bestem linjens ligning.

b) Bestem linjens skæringspunkt med førsteaksen.

Øvelse 2.7
Bestem skæringspunktet mellem de to linjer med ligningerne

$$y = 2x - 1 \quad \text{og} \quad y = 3x + 7\ .$$

Øvelse 2.8
En linje har hældningen 3 og går gennem punktet $(6, 14)$.

a) Bestem en ligning for linjen.

b) Hvilken tilvækst får y, når x stiger med 10?

Øvelse 2.9
Afgør ved beregning, om punkterne A, B og C ligger på en ret linje, når

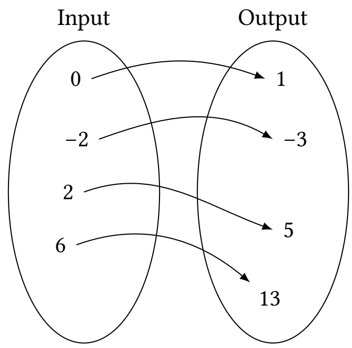
a) $A(19, 12)$, $B(27, 25)$ og $C(40, 46)$.

b) $A(-6, -3)$, $B(-1, 5)$ og $C(7, 18)$.

3 Funktioner

En *funktion* i matematik er en form for regneoperation. Man kan beskrive en funktion som en slags maskine, der til ethvert input giver et bestemt output – dvs. en funktion er en sammenhæng mellem tal.

På figur 3.1 er det vist, hvordan funktionen »gang tallet med 2 og læg 1 til« opfører sig. Man kan se hvilket output man får for 4 forskellige tal.



Figur 3.1: Funktionen »gang tallet med 2 og læg 1 til«.

Fordi det er besværligt at beskrive funktioner på denne måde, har man fundet på en matematisk notation, der gør det nemmere. Funktionen selv betegnes med et bogstav, f.eks. f. I stedet for »gang tallet med 2 og læg 1 til«, kan man altså skrive f. Bogstavet f indeholder i sig selv ingen information om, hvad funktionen f gør. Hvis man vil forklare det, kan man skrive en såkaldt *forskrift* op:

$$f(x) = 2 \cdot x + 1 \ .$$

Denne notation betyder, at hvis man sender et tal (x) gennem funktionen f, bliver der gjort det ved tallet, som er beskrevet på højre side. $f(x)$ læses »f af x«, og parentesen skal altså ikke forstås som en regneparentes, men en angivelse af, at det er tallet x som sendes gennem funktionen f. Det tal man får ud af regneoperationen kaldes funktions*værdien*.

Eksempel 3.1 Her ses på funktionen $f(x) = 3 \cdot x - 7$.

Funktionsværdierne $f(-1)$ og $f(4)$ beregnes således:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 3 \cdot (-1) - 7 = -3 - 7 = -10 \\ f(4) &= 3 \cdot 4 - 7 = 12 - 7 = 5 \ . \end{aligned}$$

Det er her vigtigt at bemærke, at x'et i funktionsudtrykket $f(x)$ egentlig bare er en »pladsholder«, dvs. det viser, hvor man skal erstatte med tal, når man beregner en funktionsværdi. Faktisk kan man ikke kun sætte tal ind på x'ets plads, man kan også sætte andre variable ind – eller hele regneudtryk.

Eksempel 3.2 Her ses igen på funktionen $f(x) = 3 \cdot x - 7$. Men nu beregnes $f(t)$ og $f(x-1)$, dvs. man skal sætte hhv. t og $x-1$ ind i stedet for x:

$$\begin{aligned} f(t) &= 3 \cdot t - 7 \\ f(x-1) &= 3 \cdot (x-1) - 7 = 3 \cdot x - 3 \cdot 1 - 7 = 3 \cdot x - 10 \ . \end{aligned}$$

Hvis man sender et variabeludtryk gennem en funktion, får man altså et variabeludtryk ud igen.

Hvis man vil have et overblik over, hvordan en funktion opfører sig, kan det være nyttigt at tegne dens graf.

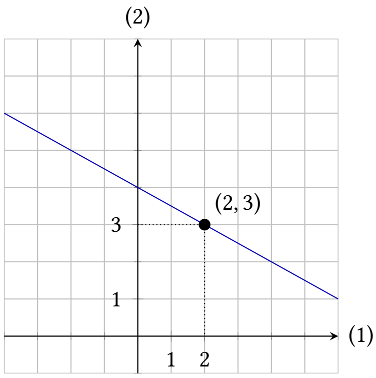
Eksempel 3.3 Her ses på en funktion

$$f(x) = -\tfrac{1}{2} \cdot x + 4\ .$$

Grafen for funktionen er det samme som grafen for ligningen $y = f(x)$, dvs.

$$y = -\tfrac{1}{2} \cdot x + 4\ ,$$

og den kan ses på figur 3.2.



Figur 3.2: Grafen for $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 4$.

Som det kan ses på figuren går funktionens graf igennem punktet $(2, 3)$, dvs.

$$f(2) = 3\ .$$

Dette kunne man også have regnet ud ved at indsætte 2 i funktionen f:

$$f(2) = -\tfrac{1}{2} \cdot 2 + 4 = -1 + 4 = 3\ .$$

Men det kan altså også aflæses direkte på grafen.

Hvis man omvendt kender funktionsværdien, kan man finde ud af, hvilken værdi af den uafhængige variabel, der giver denne funktionsværdi. Dette kan gøres ved aflæsning, men problemet kan også løses ved udregning, som i følgende eksempel.

Eksempel 3.4 Hvornår antager funktionen $g(x) = 2x + 1$ værdien 17?

Svaret på dette spørgsmål finder man frem til ved at løse ligningen $g(x) = 17$. Det gøres på følgende måde:

$$\begin{aligned} g(x) &= 17 &&\Leftrightarrow \\ 2x + 1 &= 17 &&\Leftrightarrow \\ 2x &= 16 &&\Leftrightarrow \\ x &= 8\ . \end{aligned}$$

Svaret på spørgsmålet er altså, at $g(x) = 17$, når $x = 8$.

3.1 Lineære funktioner

De funktioner der blev omtalt i det foregående afsnit, var alle såkaldt *lineære* funktioner. Dvs. der er tale om funktioner hvis grafer er rette linjer. Man har altså følgende definition:

Definition 3.5

En *lineær* funktion er en funktion af typen

$$f(x) = a \cdot x + b\ ,$$

hvor a og b er to konstanter.

Idet lineære funktioner har formen $f(x) = a \cdot x + b$, vil grafen for en lineær funktion have en ligning på formen

$$y = a \cdot x + b \, .$$

Grafen for en lineær funktion er altså netop en ret linje. Dvs. alle de egenskaber en ret linje har, har grafen for en lineær funktion også.

Specielt kan man aflæse tallene a og b på grafen for en lineær funktion, eller man kan beregne deres værdi ud fra to punkter på grafen.

Eksempel 3.6 Om den lineære funktion f gælder at

$$f(2) = 6 \quad \text{og} \quad f(5) = 18 \, .$$

Hvad er funktionens forskrift?

Her skal man først gennemskue at når $f(2) = 6$, betyder det at grafen går gennem punktet $(2, 6)$. Den anden oplysning fortæller at grafen også går gennem punktet $(5, 18)$. Man kender altså to punkter på funktionens graf, og dette er tilstrækkeligt til at bestemme ligningen for grafen som jo er en ret linje.

For at bestemme linjens hældningskoefficient kan man anvende to-punktsformlen (sætning 2.8):

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{18 - 6}{5 - 2} = \frac{12}{3} = 4 \, .$$

Man kan herefter bruge formlen i sætning 2.10 hvorved man finder linjens ligning:

$$y = a \cdot (x - x_1) + y_1 = 4 \cdot (x - 2) + 6 = 4 \cdot x - 8 + 6 = 4 \cdot x - 2 \, .$$

Grafen for f er altså en ret linje med ligningen $y = 4 \cdot x - 2$, dvs. funktionen har forskriften

$$f(x) = 4 \cdot x - 2 \, .$$

3.2 Lineær vækst

Lineære funktioner vokser på følgende måde[1]

Sætning 3.7

For en lineær funktion $f(x) = ax + b$ gælder, at når x vokser med Δx, så vokser funktionsværdien med $a \cdot \Delta x$.

Bevis
Hvis x vokser fra x_1 til x_2, hvor $x_2 = x_1 + \Delta x$, så vil funktionsværdien vokse fra

$$y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$$

til

$$y_2 = f(x_2) = f(x_1 + \Delta x) = a(x_1 + \Delta x) + b = ax_1 + a \cdot \Delta x + b \, .$$

Funktionsværdien er så vokset med

$$y_2 - y_1 = (ax_1 + a \cdot \Delta x + b) - (ax_1 + b) = a \cdot \Delta x \, .$$

Hermed er sætningen bevist. ∎

[1] Denne sætning kan man også argumentere for ud fra sætning 2.1.

Tabel 3.3: Vækst af $f(x) = 3x + 7$.

	x	y	
	-2	1	
$+2$			$+3 \cdot 2$
	0	7	
$+2$			$+3 \cdot 2$
	2	13	
$+2$			$+3 \cdot 2$
	4	19	

Eksempel 3.8 I tabel 3.3 ses et eksempel på væksten af en lineær funktion.

Funktionen $f(x) = 3x + 7$ vokser således, at hver gang x vokser med 2, vokser funktionsværdien med $3 \cdot 2$.

Eksempel 3.9 Her ses på funktionen $f(x) = 3x - 4$, som har hældningskoefficienten $a = 3$. Hvis x vokser med $\Delta x = 5$, vil funktionsværdien vokse med

$$a \cdot \Delta x = 3 \cdot 5 = 15 \ .$$

Hver gang, x vokser med 5, vokser funktionsværdien altså med 15.

Omvendt kan man spørge, hvor meget x skal vokse, for at funktionsværdien vokser med 60? I dette tilfælde er $a \cdot \Delta x = 60$, dvs.

$$3 \cdot \Delta x = 60 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta x = 20 \ .$$

x skal altså vokse med 20, for at funktionsværdien vokser med 60.

Eksempel 3.10 For funktionen $f(x) = -2x + 7$ gælder, at når x vokser med $\Delta x = 3$, vokser funktionsværdien med

$$a \cdot \Delta x = -2 \cdot 3 = -6 \ .$$

At funktionsværdien vokser med -6 betyder, at funktionsværdien *aftager* med 6, hver gang x vokser med 3.[2]

[2]En negativ stigning svarer altid til et fald. I mange matematiske modeller, hvor man regner på vækst, kan det betale sig at regne med fortegn hele vejen igennem og først til sidst angive, om der er tale om stigning eller fald, afhængig af om resultatet er positivt eller negativt.

Her følger et par eksempler på, hvordan en matematisk beskrivelse af lineær vækst kan give svar på forskellige spørgsmål.

Eksempel 3.11 I en bestemt by er antallet af indbyggere givet ved

$$N(x) = 213x + 14\,752 \ ,$$

hvor $N(x)$ er antallet af indbyggere x år efter år 2000.

I forskriften er der to konstanter,[3] 213 og 14 752. Funktionen $N(x)$ er en lineær funktion, dvs. tallet 213 kan betragtes som en hældningskoefficient: Hver gang x vokser med 1, vokser funktionsværdien med 213. Da x måles i år, og funktionsværdien beskriver antallet af indbyggere, kan man altså sige, at antallet af indbyggere vokser med 213, hver gang x vokser med 1 år. Væksten i indbyggertallet er altså på 213 indbyggere om året.

[3]Husk, at en konstant er et fast tal.

14 752 er skæringen med andenaksen. Den opnås, når $x = 0$. Dette sker i år 2000,[4] og man kan derfor udlede, at indbyggertallet i byen var på 14 752 i år 2000.

[4]Idet år 2000 er 0 år efter år 2000.

Eksempel 3.12 Her ses på samme udvikling som i eksempel 3.11,

$$N(x) = 213x + 14\,752 \ .$$

Hvor meget vokser byens indbyggertal over en 10-års periode?

Ud fra forskriften kan man se, at indbyggertallet vokser med 213 om året. Over en 10-års periode kommer der derfor

$$10 \cdot 213 = 2130$$

nye indbyggere.

Eksempel 3.13 Et firma producerer et antal varer. Omkostningerne ved produktionen er 2000 kr. i startomkostninger og 17 kr. pr. produceret vare.

Omkostningerne er altså en funktion af antallet af producerede varer. Denne funktion har forskriften

$$o(x) = 17x + 2000 ,$$

hvor x er antallet af varer, og $o(x)$ er de samlede omkostninger.

Eksempel 3.14 Det viser sig, at middeltemperaturen i Vestgrønland er afhængig af breddegraden,[3] sådan at

$$T(x) = -0{,}732x + 46{,}1 ,$$

hvor T er middeltemperaturen (i $^\circ$C) og x er breddegraden.

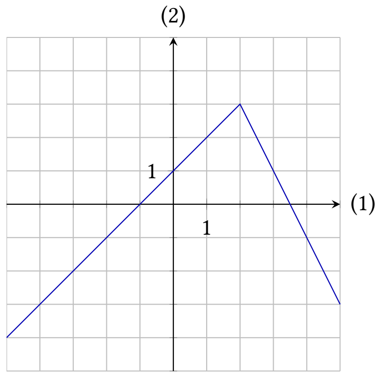
Dvs. at middeltemperaturen i Vestgrønland aftager med 0,732°C, hver gang breddegraden vokser med 1 grad.

Den umiddelbare fortolkning af tallet 46,1 er, at det er temperaturen ved breddegraden 0, dvs. ækvator. Denne fortolkning giver dog ikke mening, idet modellen kun gælder for Vestgrønland.

Det er således ikke muligt at give en fysisk fortolkning af tallet 46,1.

3.3 Stykkevis lineære funktioner

Funktioner, hvis grafer består af linjestykker, kaldes *stykkevis lineære* funktioner. Grafen for en stykkevis lineær funktion kan ses på figur 3.4.



Figur 3.4: Grafen for en stykkevis lineær funktion.

Her kan man aflæse, at når x er mindre end 2, så svarer grafen til linjen med ligningen

$$y = x + 1 ,$$

og når x er større end 2, svarer grafen til linjen med ligningen

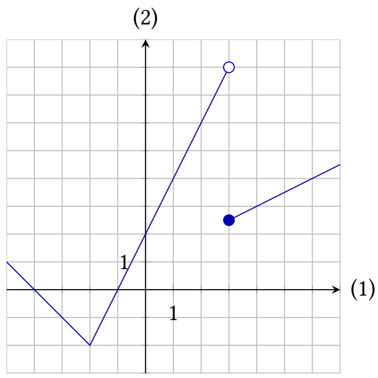
$$y = -2x + 7 ,$$

Hvis funktionen hedder f, skrives forskriften derfor på denne måde:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{for } x < 2 \\ -2x + 7 & \text{for } x \geq 2 \end{cases} .$$

En funktion, hvis graf er sammenhængende, kaldes en *kontinuert* funktion. Stykkevis lineære funktioner er ikke nødvendigvis kontinuerte. Et eksempel på en stykkevis lineær funktion, der ikke er kontinuert kunne være

$$g(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{for } x < -2 \\ 2x + 2 & \text{for } -2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{for } x \geq 3 \end{cases} .$$



Figur 3.5: Grafen for en stykkevis lineær funktion, der ikke er kontinuert.

Grafen for g kan ses på figur 3.5.

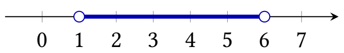
Den fyldte cirkel på grafen viser et punkt, der er med på grafen, mens den tomme cirkel viser, at punktet ikke er med. For funktionen g gælder, at funktionsværdien $g(3)$ skal beregnes ud fra den nederste »gren« i forskriften – derfor er punktet med på det linjestykke længst mod højre.

3.4 Intervaller

Når man taler om stykkevis lineære funktioner, så er forskriften forskellig for forskellige værdier af x. Man siger at man deler x-aksen ind i såkaldte *intervaller*. Et interval er udsnit af en tallinje, der indeholder alle tallene mellem to givne værdier, f.eks. »alle tal mellem 1 og 6« eller »alle tal fra −5 til og med 80«. De udsnit, der indeholder alle tal større end eller mindre end en given værdi, kalder man også intervaller.

Inden for matematikken har man mange steder brug for at tale om intervaller, og man har derfor fundet på en notation, der gør det nemt at tale om et bestemt interval. For eksempel kan »alle tal mellem 1 og 6« skrives som

$$]1;6[\quad .$$



Figur 3.6: Intervallet $]1;6[$. De tomme cirkler ud for 1 og 6 betyder, at disse tal ikke hører til intervallet.

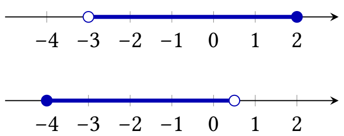
Dette betyder, at intervallet består af alle tallene mellem 1 og 6. Tallene 1 og 6 kaldes hhv. *venstre* og *højre endepunkt*. At parenteserne vender væk fra tallene betyder, at hverken 1 eller 6 regnes med i intervallet (se figur 3.6).

Hvis man i stedet vil angive det interval, der strækker sig fra 1 til 6, men hvor 1 og 6 skal tages med, skriver man

$$[1;6] \quad .$$

Et par andre eksempler kunne være (se figur 3.7).

$$\begin{aligned}]-3;2] &: \quad \text{alle tal fra (men ikke med) } -3 \text{ til og med } 2 \\ \left[-4;\tfrac{1}{2}\right[&: \quad \text{alle tal fra og med } -4 \text{ til (men ikke med) } \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$



Figur 3.7: Intervallerne $]-3;2]$ og $\left[-4;\frac{1}{2}\right[$.

Skal man angive intervallet af alle tal større end 3, anvender man tegnet ∞ (uendelig) for det højre endepunkt:

$$]3;\infty[\quad .$$

Intervallet består altså af alle de tal, der er større end 3. Hvis man i stedet skal tale om f.eks. alle de tal, der er mindre end eller lig med 5, skrives:

$$]-\infty;5] \quad .$$

Bemærk, at når man bruger symbolet ∞, skal parentesen vende væk fra symbolet (dette skyldes, at ∞ ikke er et tal, men blot en angivelse af, at intervallet ikke slutter i den ene eller den anden retning).

Hvis man lader intervallet være ubegrænset i begge retninger, får man det interval, der består af alle tal, dvs.

$$]-\infty;\infty[$$

er det interval der indeholder alle tallene på hele tallinjen.

3.5 Definitions- og værdimængde

Grafen for en lineær funktion er en ret linje der strækker sig uendeligt langt både mod højre og mod venstre. Dvs. for enhver tænkelig værdi af x findes der en tilhørende værdi af y, eller sagt med andre ord: Der er ingen værdier af x man ikke må bruge.

Men nogle gange har man brug for at en funktion kun er defineret for nogle afgrænsede værdier af x, end alle de tal der rent faktisk kan sættes ind i funktionsudtrykket. Det kan f.eks. være fordi funktionen er udtryk for en matematisk model hvor man kun vil se på bestemte tal.

Den afgrænsede mængde af tal som man vil tillade at bruge som x-værdi, kalder man funktionens *definitionsmængde*.

Eksempel 3.15 Befolkningstallet i en by i årene 2000–2017 kan modelleres vha. funktionen

$$b(x) = 24 \cdot x + 5309 \ , \qquad 0 \leq x \leq 17 \ ,$$

hvor x er antal år efter år 2000.

Her viser $0 \leq x \leq 17$ at definitionsmængden er tallene fra og med 0 til og med 17. Det skyldes at modellen kun gælder inden for disse årstal. Så selv om man sagtens kan sætte andre værdier (f.eks. -10 eller 123) ind på x's plads, så er det ikke tilladt i denne situation.

Tegner man grafen, så skal den derfor først starte ud for $x = 0$, og den skal slutte ud for $x = 17$.

I eksemplet oven for bestod definitionsmængden for funktionen b altså af tallene fra og med 0 til og med 17. Det skrives med matematisk notation således:

$$\mathrm{Dm}(b) = [0; 17] \ .$$

Dette udsagn kan altså læses som »definitionsmængden for funktionen b består af tallene fra og med 0 til og med 17«.

Hvis man indskrænker mængden af tal man vil tillade som x-værdier, vil man ikke længere kunne få alle mulige tal som y-værdi. Mængden af tilladte x-værdier kalder man – som nævnt – definitionsmængden; mængden af mulige y-værdier kalder man *værdimængden*.

Eksempel 3.16 I sidste eksempel blev der kigget på funktionen

$$b(x) = 24 \cdot x + 5309 \ , \qquad 0 \leq x \leq 17 \ .$$

Denne funktion er en lineær funktion med hældningskoefficient 24. Dvs. der er tale om en voksende funktion. Da definitionsmængden starter ved $x = 0$, må funktionen derfor have sin mindste funktionsværdi her; og tilsvarende findes den største funktionsværdi ved $x = 17$. Man kan altså finde den mindste og den største funktionsværdi ved at beregne $b(0)$ og $b(17)$:

$$b(0) = 24 \cdot 0 + 5309 = 5309$$

$$b(17) = 24 \cdot 17 + 5309 = 5717 \ .$$

Alle funktionsværdierne ligger derfor mellem 5309 og 5717, dvs. værdimængden for funktionen er

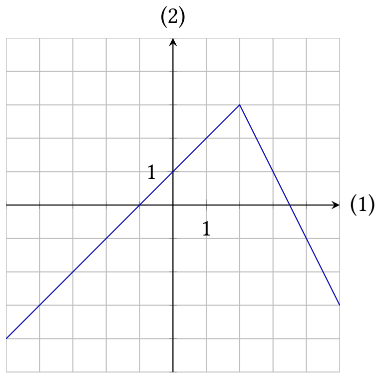
$$\mathrm{Vm}(b) = [5309; 5717] \ .$$

De to begreber kan opsummeres i følgende definition:

Definition 3.17

Lad f være en funktion.

1. *Definitionsmængden* for f, $\mathrm{Dm}(f)$ består af alle de x-værdier det er tilladt at bruge.
2. *Værdimængden* for f, $\mathrm{Vm}(f)$ består af alle de y-værdier det er muligt at få.



Figur 3.8: Grafen for den stykkevis lineære funktion f.

Eksempel 3.18 Den stykkevis lineære funktion f har forskriften

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{for } x < 2 \\ -2x+7 & \text{for } x \geq 2 \end{cases} .$$

Denne funktion har definitionsmængden $\mathrm{Dm}(f) = \ ]-\infty; \infty[$, dvs. alle x-værdier er tilladte.

Grafen for f er tegnet på figur 3.8. Her kan man se at selv om alle værdier af x er »lovlige«, så er det ikke muligt at få alle værdier af y. Idet grafen er sammensat af et stykke der vokser, og derefter et stykke der aftager, vil grafen have et maksimum.

Dette maksimum ligger der hvor de to grene i forskriften mødes, dvs. i $x = 2$. Man kan derfor beregne den maksimale y-værdi som

$$f(2) = -2 \cdot 2 + 7 = -4 + 7 = 3 \ .$$

Da grafen til gengæld ikke er begrænset nedadtil, bliver værdimængden

$$\mathrm{Vm}(f) = \ ]-\infty; 3] \ .$$

3.6 Øvelser

Øvelse 3.1
»Oversæt« følgende regneopskrifter til en funktionsforskrift.

a) Læg fire til tallet.
b) Gang tallet med to, og læg fem til.
c) Gang tallet med en tredjedel og træk én fra.
d) Gang tallet med −7 og læg 9 til.

Øvelse 3.2
En funktion har forskriften $f(x) = 3x - 14$.

a) Bestem funktionsværdien for $x = 2$ og $x = 10$.
b) Bestem for hvilken x-værdi funktionsværdien er 78.

Øvelse 3.3
En funktion f er givet ved

$$f(x) = 3 \cdot x - 2 .$$

Beregn følgende funktionsværdier

a) $f(0)$ b) $f(4)$ c) $f(-1)$
d) $f(\frac{1}{3})$ e) $f(t)$ f) $f(u+4)$

Øvelse 3.4
En funktion g er givet ved

$$g(x) = -x + 6 .$$

Løs følgende ligninger

a) $g(x) = 5$ b) $g(x) = 0$
c) $g(x) = -7$ d) $g(x) = \frac{2}{3}$

Øvelse 3.5
For den lineære funktion $h(x)$ gælder $h(-1) = -13$ og $h(4) = 32$.

a) Bestem en forskrift for funktionen.
b) Løs ligningen $h(x) = 23$.

Øvelse 3.6
De to funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = 3x + 8$$
$$g(x) = 7x - 4$$

Bestem skæringspunktet mellem graferne for de to funktioner.

Øvelse 3.7
Grafen for den lineære funktion f har hældningen 4 og går gennem punktet $(2, 5)$.

a) Bestem en forskrift for f.
b) Hvor meget vokser funktionsværdien når x vokser med 12?

Øvelse 3.8
Grafen for den lineære funktion g har hældningen −2 og går gennem punktet $(3, 1)$.

a) Bestem en forskrift for g.
b) Hvor meget er x vokset, hvis funktionsværdien er vokset med 38?

Øvelse 3.9
En bestemt vares pris vokser lineært med tiden. Prisen i 2010 var 66 kr. og i 2015 var prisen 76 kr.

a) Hvad vil prisen være i 2019?
b) Hvornår vil prisen være 100 kr?

Øvelse 3.10
En lineær funktion f vokser med 8, når x øges med 4. Endvidere ved man, at grafen for f går gennem punktet $(3, 4)$.

Bestem en forskrift for f.

Øvelse 3.11
Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{for } x \leq -1 \\ 2x - 1 & \text{for } x > -1 \end{cases}$$

a) Tegn grafen for f.
b) Beregn $f(5)$ og $f(-2)$.
c) Løs ligningen $f(x) = 6$.
d) Løs ligningen $f(x) = -3$.

Øvelse 3.12
Skriv de følgende intervaller op med interval-notation:

a) Tallene fra og med 3 til (men ikke med) 21.
b) Tallene fra (men ikke med) −9 til og med 0.
c) Alle tal mindre end 10.
d) Alle tal større end eller lig med 67.

Øvelse 3.13
Tegn graferne for de følgende funktioner, og bestem deres værdimængder:

a) $f(x) = x + 7 \,, \quad -3 < x < 3$

b) $g(x) = 2x - 1 \,, \quad -4 \leq x \leq 7$

c) $h(x) = -4x + 3 \,, \quad 0 < x \leq 12$

d) $k(x) = 9x - 5 \,, \quad x \geq 3$

Øvelse 3.14
Den stykkevis lineære funktion g er givet ved

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{for } x \leq -3 \\ \frac{1}{3}x + 4 & \text{for } x \geq -3 \end{cases}$$

a) Tegn grafen for g.

b) Bestem skæringspunkterne mellem grafen for g og grafen for $f(x) = x + 6$.

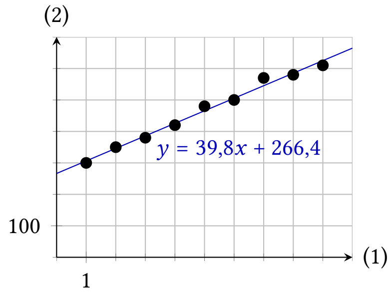
c) Bestem værdimængden for g.

4 Lineær regression

Når man beskriver vækst ud fra målte data, kan man komme ud for, at man har en række målepunkter, som ikke ligger præcist på en ret linje, men dog gør det med god tilnærmelse. Et eksempel kan ses på figur 4.1.

Da punkterne ikke ligger præcist på en linje, vil det være forkert at bruge sætning 2.8 til at beregne en forskrift. Afhængig af, hvilke to punkter, man sætter ind i formlerne, vil man nemlig få vidt forskellige resultater for forskriften.

I stedet bruger man en metode, der kaldes *lineær regression* til at bestemme den rette linje, der ligger tættest muligt på alle punkterne. Denne metode er indbygget i de fleste regneark og matematikprogrammer, således at man blot skal indskrive punkterne i programmet, så får man at vide hvilken ligning, linjen har. Ligningen på figur 4.1 er fundet på denne måde.



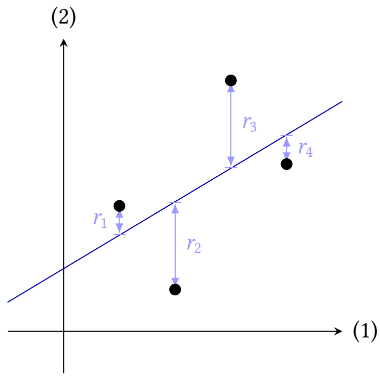
Figur 4.1: En række målepunkter samt den bedste rette linje gennem punkterne.

Metoden fungerer i praksis på den måde, at man finder den linje, der har den mindste afstand til alle punkterne. Afstanden defineres her som *kvadratsummen SSE*[1] af den lodrette afstand fra linjen til punkterne. På figur 4.2 er denne afstand givet ved

$$SSE = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 \ .$$

[1] *SSE* er en forkortelse for »sum of squares of errors of prediction«, altså kvadratsummen af fejlene/afvigelserne. »Afvigelsen« skal her forstås som afstanden mellem et målepunkt og det tilsvarende modellerede punkt på linjen.

Denne sum indeholder flere led, jo flere målepunkter der er. Den rette linje, der passer bedst på punkterne, defineres så til at være den, der gør *SSE* mindst mulig.



Figur 4.2: Man minimerer kvadratsummen $SSE = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2$.

Hvis man har n forskellige punkter med koordinaterne

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \ ,$$

så kan man finde frem til to formler, der giver linjens hældningskoefficient a og dens skæring med andenaksen b ud fra alle x-værdierne $x_1, \ldots, x_n$ og alle y-værdierne $y_1, \ldots, y_n$.

Det kræver ret avanceret matematik at udlede de to formler for a og b, og formlerne er i sig selv også ret komplicerede, så derfor bliver formlerne ikke præsenteret her. Man behøver nemlig slet ikke kende formlerne for at kunne bruge dem da de er indbygget i alle regneark og CAS-værktøjer.

Eksempel 4.1 Tabel 4.3 viser sammenhørende værdier af den uafhængige variabel x og den uafhængige variabel y.

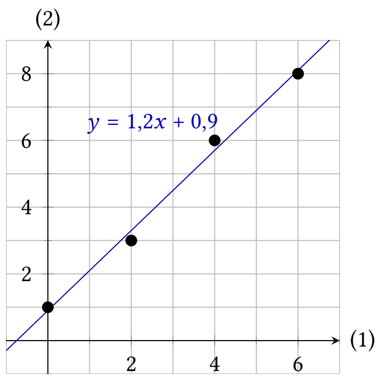
Anvender man et CAS-værktøj til at udføre lineær regression, finder man at den bedste rette linje har ligningen

$$y = 1{,}2x + 0{,}9 \ .$$

Punkterne og linjen kan ses på figur 4.4.

Tabel 4.3: Sammenhørende målte værdier af x og y.

x	y
0	1
2	3
4	6
6	8



Figur 4.4: Den bedste rette linje gennem de 4 punkter.

4.1 Forklaringsgrad og residualer

Hvis man beregner den bedste rette linje vha. et CAS-værktøj, får man som regel også beregnet en størrelse kaldet *determinationskoefficienten* eller *forklaringsgraden*, normalt betegnet med R^2. Det er et tal mellem 0 og 1, som fortæller, hvor godt den rette linje passer på punkterne. Jo tættere tallet er på 1, jo bedre er overensstemmelsen mellem punkterne og linjen.

Med målepunkterne fra eksempel 4.1 ovenfor bliver $R^2 = 0{,}9931$ Dette tal er meget tæt på 1, så den rette linje passer altså ret godt på punkterne, hvilket også fremgår af grafen på figur 4.4.

Man skal dog passe på med alene at vurdere ud fra forklaringsgraden idet man godt kan finde eksempler hvor R^2 ligger tæt på 1, men punkterne tydeligvis ikke kan modelleres med en ret linje. Det er derfor *altid* en god idé at tegne grafen for at få et visuelt indtryk af om en linje er en god model.

Residualplot

Når man har beregnet den rette linje, som passer bedst på en række punkter, så ligger punkterne som regel ikke helt på linjen. Dvs. punktet (x_i, y_i) opfylder ikke ligningen $y = ax + b$, men i stedet

$$y_i = ax_i + b + r_i \ ,$$

hvor r_i er den lodrette afstand fra punktet til linjen. På sin vis er r_i et udtryk for, hvor stor en fejl, man begår, hvis man bruger linjens ligning til at modellere sammenhængen. Dette kalder man også *residualet* for punktet.

Hvis man isolerer r_i i ligningen (4.1), får man, at

$$r_i = y_i - ax_i - b \ .$$

Man kan forholdsvist let vise, at gennemsnittet af residualerne er 0. Dette overlades som en øvelse til læseren.

Hvis den rette linje er en god model for den undersøgte sammenhæng, så er residualerne små i forhold til de målte y-værdier, og de ligger tilfældigt fordelt. Om dette er tilfældet kan man undersøge ved at lave et *residualplot*, som er en afbildning af residualerne som funktion af x-værdierne.

Eksempel 4.2 I eksempel 4.1 fandt man den rette linje, der passede bedst på en række sammenhørende værdier af x og y. Den rette linje havde ligningen

$$y = 1{,}2x + 0{,}9 \ .$$

Vha. $a = 1{,}2$ og $b = 0{,}9$ kan man beregne residualerne. F.eks. er

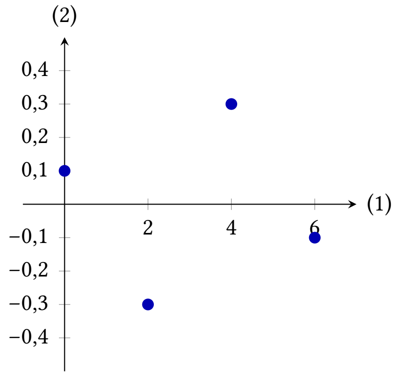
$$r_1 = y_1 - ax_1 - b = 1 - 1{,}2 \cdot 0 - 0{,}9 = 0{,}1 \ .$$

En samlet oversigt over punkterne og residualerne ses i tabel 4.5.

Tabel 4.5: De sammenhørende værdier af x og y samt residualerne r.

x	y	r
0	1	0,1
2	3	−0,3
4	6	0,3
6	8	−0,1

Residualplottet kan ses på figur 4.6. Her ses det på andenaksen, at residualernes værdier er små i forhold til de målte y-værdier. Plottet viser også, at residualerne ligger nogenlunde tilfældigt omkring førsteaksen. Det virker derfor rimeligt at anvende den lineære model i dette tilfælde.

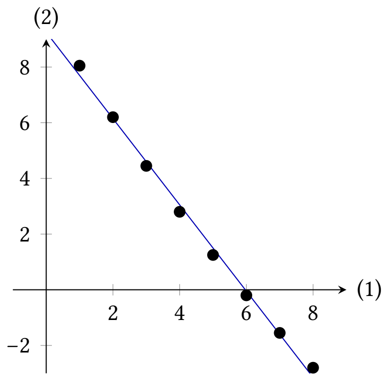


Figur 4.6: Residualplot over værdierne i tabel 4.5.

En række målepunkter kan sagtens se ud til at kunne modelleres med en ret linje, selvom det i virkeligheden er en anden type model, der ligger bag. Dette vil typisk afsløre sig ved at residualplottet ikke ser tilfældigt ud, men viser en eller anden form for regelmæssighed.

Eksempel 4.3 Figur 4.7 viser et koordinatsystem med indsatte punkter samt en regressionslinje. Ved første øjekast ser punkterne ud til med rigtigt god tilnærmelse at ligge på en ret linje.

Men ser man på residualplottet 4.8 bliver det tydeligt at den rette linje ikke er en god model i forhold til disse punkter. Man kan nemlig se at residualerne ikke ligger tilfældigt, men på en form for kurve. Dette kunne tyde på at den model der ligger til grund for målingerne, slet ikke er lineær. Man skal derfor lede efter en anden type model.



Figur 4.7: En række målepunkter indsat i et koordinatsystem samt regressionslinjen.

Residualspredning

Som nævnt ovenfor skal residualerne være små i forhold til y-værdierne for at regressionslinjen er en god model. Den såkaldte *residualspredning* er et mål for hvor tæt residualerne i gennemsnit ligger på linjen. Den beregnes på følgende måde:

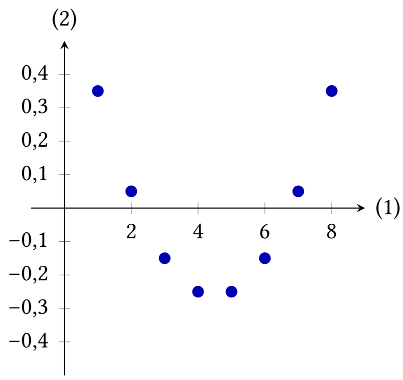
Definition 4.4

Hvis en række datapunkter $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ modelleres med den rette linje $y = a \cdot x + b$, er *residualspredningen* givet ved

$$s = \sqrt{\frac{SSE}{n-2}} = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2}{n-2}} \ ,$$

hvor $r_1, r_2, \ldots, r_n$ er residualerne.

Det drejer sig ikke om et egentligt gennemsnit i traditionel forstand, men det viser sig i praksis at 95% af residualerne maksimalt vil ligge i en afstand på $2 \cdot s$ fra linjen hvis modellen er god.[1]



Figur 4.8: Residualplot over målepunkterne fra figur 4.7.

Eksempel 4.5 For de målepunkter der blev brugt i eksempel 4.1 og 4.2 fandt man regressionsligningen

$$y = 1{,}2 \cdot x + 0{,}9 \ .$$

Residualerne kan ses i tabel 4.5. Residualspredningen bliver så

$$s = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{0{,}1^2 + (-0{,}3)^2 + 0{,}3^2 + (-0{,}1)^2}{4-2}} = \sqrt{\frac{0{,}2}{2}} = 0{,}32 \ .$$

Man kan nu sammenligne dette tal med y-værdierne. Da tallet er lille i forhold til y-værdierne, ligger punkterne med god tilnærmelse tæt på linjen.

I praksis er det besværligt selv at beregne kvadratsummen SSE som det er gjort ovenfor, især hvis der er mange punkter. Heldigvis kan de fleste CAS-værktøjer regne dette tal ud. Dvs. hvis ens CAS-værktøj fortæller at $SSE = 0{,}2$ (som den er i dette tilfælde), bliver udregningen

$$s = \sqrt{\frac{SSE}{n-2}} = \sqrt{\frac{0{,}2}{4-2}} = \sqrt{0{,}1} = 0{,}32\ .$$

4.2 Øvelser

Øvelse 4.1
Der er målt en sammenhæng mellem de to variable x og y. De målte tal kan ses i tabellen herunder:

x:	1	2	3	4
y:	5	7	8	11

a) Bestem vha. lineær regression a og b for den bedste rette linje.

b) Beregn residualerne.

Øvelse 4.2
De følgende 3 tabeller viser 3 forskellige sammenhænge mellem de variable x og y.

x:	1	2	3	4	5	6
y:	3,2	4,9	7,3	8,8	10,9	13,4

x:	1	2	3	4	5	6
y:	1,4	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8

x:	1	2	3	4	5	6
y:	0,1	1,4	2,9	4,6	6,5	8,6

a) Bestem den bedste rette linje og tegn residualplottene for hver af de tre sammenhænge.

b) Brug residualplottene og residualspredningen til at vurdere for hvilke(n) af de tre sammenhænge, den rette linje er en god model.

Øvelse 4.3
For en kobbertråd er der med god tilnærmelse en lineær sammenhæng mellem modstand, målt i Ω, og temperaturen, målt i °C. Ved en række målinger har man fundet følgende data:

Temperatur (°C):	0	15	30	45	60
Modstand (Ω) :	54,9	58,4	61,9	66,2	69,0

a) Bestem en lineær model, der beskriver sammenhængen.

b) Ved hvilken temperatur er modstanden 75 Ω?

Øvelse 4.4
En række målinger giver følgende sammenhæng mellem vindhastigheden og den støj, som en vindmølle udsender:

Vindhastighed (m/s):	6,3	7,2	8,5	9,4
Støj (dB) :	51	56	65	71

Med god tilnærmelse kan denne beskrives ved ligningen $y = ax + b$, hvor x er vindhastigheden, og y er støjen.

a) Bestem tallene a og b i ligningen.

b) Forklar, hvad konstanterne a og b beskriver i denne model.

c) Bestem den vindhastighed, der giver en støj på 75 dB.

d) Hvor meget skal vindhastigheden falde, for at støjen aftager med 10 dB?

Bibliografi

[1] Per Bruun Brockhoff, Claus Thorn Ekstrøm og Ernst Hansen. »Lineær regression – lidt mere tekniske betragtninger om R^2 og et godt alternativ«. I: *LMFK-bladet* nr. 2 (2017).

[2] Energi Fyn. *NaturEl*. URL: https://www.energifyn.dk/privat/elhandel/produkter-og-bestilling/produkt?pid=%5C%7B717D4676-C18C-4FEF-B83A-DEF6EEB5CA85%5C%7D (bes. 09.08.2019).

[3] Jesper Ruggaard Mehus og Svend Erik Nielsen. *Klimaforandringer i arktis*. Biofag nr. 6/2012. Særnummer. Forlaget Nucleus, 2012.

[4] Ib Wessel. »Fahrenheit«. I: *Den Store Danske* (2017). URL: http://denstoredanske.dk/index.php?sideId=73945 (bes. 09.08.2019).

Brøkregning

Forkorte	(1)	$\frac{a}{b} = \frac{a/k}{b/k}$
Forlænge	(2)	$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}$
Addition	(3)	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$
Subtraktion	(4)	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$
Multiplikation	(5)	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
Division	(6)	$\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Potenser og rødder

	(7)	$a^0 = 1$
Negativ eksponent	(8)	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
Brøk som eksponent	(9)	$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$
Samme grundtal	(10)	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
	(11)	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
	(12)	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
Samme eksponent	(13)	$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
	(14)	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
Samme rod	(15)	$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{a \cdot b}$
	(16)	$\frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b}} = \sqrt[x]{\frac{a}{b}}$

Algebra

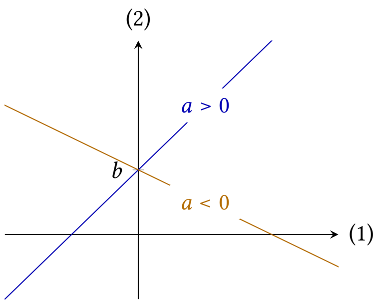
Den associative lov	(17)	$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$
	(18)	$a(bc) = (ab)c = abc$

Den distributive lov	(19)	$a(b + c) = ab + ac$
Kvadratet på en sum	(20)	$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
Kvadratet på en differens	(21)	$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
To tals sum gange de samme to tals differens	(22)	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Funktioner

y er ligefrem proportional med x	(23)	$y = k \cdot x$
y er omvendt proportional med x	(24)	$y = \dfrac{k}{x}$

Lineære funktioner



Lineær funktion	(25)	$f(x) = ax + b$
Hældningskoefficient ud fra to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) på grafen	(26)	$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Skæring med andenaksen	(27)	$b = y_1 - ax_1$

Lineær regression

Residual	(28)	$r_i = y_i - ax_i - b$
Kvadratsum af residualerne	(29)	$SSE = r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2$
Residualspredning	(30)	$s = \sqrt{\dfrac{SSE}{n - 2}}$