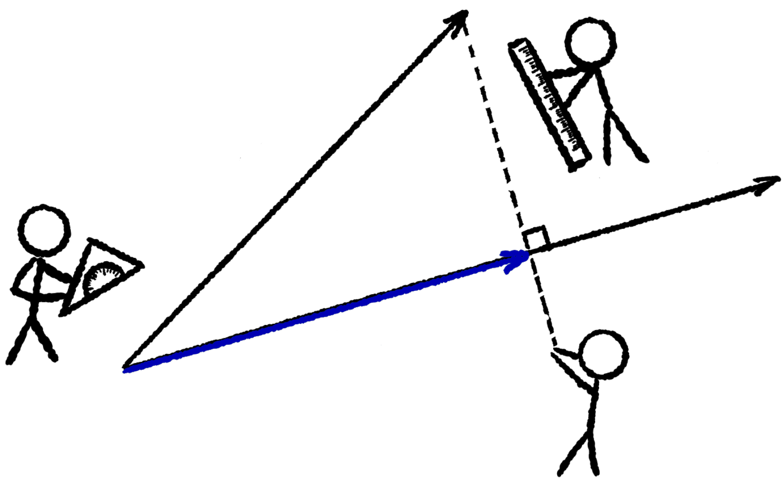
Plangeometri

Version 1.0
26. juni 2022



Mike Vandal Auerbach
www.mathematicus.dk

Plangeometri
Version 1.0, 2022

Disse noter dækker kernestoffet i plangeometri på stx A- og B-niveau efter gymnasiereformen 2017.

Al geometrien tager udgangspunkt i vektorer i planen; således indføres f.eks. de trigonometriske funktioner uden henvisning til enhedscirklen, men udelukkende ud fra vinkler i forbindelse med vektorer.

Enkelte grafer/figurer er markeret med symbolet der fungerer som link til et interaktivt GeoGebra-arbejdsark. Se også www.geogebra.org.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Indhold

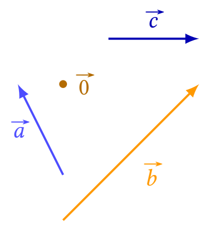
1 Vektorer i planen

Hvis man skal beskrive hvordan man bevæger sig mellem to punkter A og B i en plan, har man brug for både at vide hvad retningen er fra A til B, og hvor langt der er. Denne beskrivelse kan man give vha. en såkaldt *vektor* som er en matematisk størrelse der angiver en retning og en længde. Vektorer navngives med et bogstav med en lille pil over, f.eks. $\vec{a}$. Mere formelt kan man definere vektorer således:

Definition 1.1

En *vektor* $\vec{a}$ er en matematisk størrelse i planen der har en længde og en retning. Længden af vektoren $\vec{a}$ benævnes $|\vec{a}|$.

To vektorer er lig med hinanden hvis de har samme længde og retning.



Figur 1.1: Repræsentanter for nogle forskellige vektorer.

Figur 1.1 viser nogle *repræsentanter* for forskellige vektorer. Bemærk den specielle vektor $\vec{0}$ der er tegnet som en prik. Denne vektor kaldes *nulvektoren* og beskriver en bevægelse hvor man ikke flytter sig ud af stedet. Nulvektoren er den eneste vektor der har længden 0. Denne vektor kaldes også en *uegentlig vektor*, idet den ikke har nogen veldefineret retning.[1]

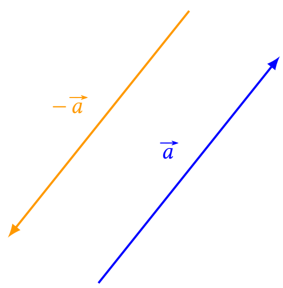
[1]Hvis man ikke bevæger sig ud af stedet, kan man ikke angive en retning for bevægelsen.

At pilene på figuren kaldes repræsentanter for vektorerne, skyldes at en vektor kun angiver længde og retning, men ikke har et startsted. Den samme længde og retning kan tegnes et vilkårligt andet sted, og de viste pile er derfor kun en angivelse af hvordan vektoren ser ud, men ikke af hvor den ligger (fordi den egentlig ikke ligger noget sted).

Til enhver vektor hører en såkaldt *modsat* vektor som er den vektor der peger i den modsatte retning (se figur 1.2). Den er defineret på følgende måde:

Definition 1.2

Til enhver vektor $\vec{a}$, definerer man den modsatte vektor $-\vec{a}$ som den vektor der har samme længde som $\vec{a}$, men den modsatte retning.

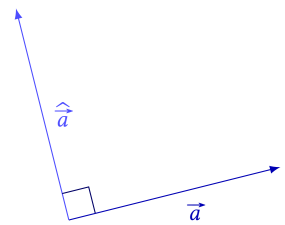


Figur 1.2: En vektor $\vec{a}$ og dens modsatte vektor $-\vec{a}$.

Enhver vektor $\vec{a}$ har også en såkaldt *tværvektor* som står vinkelret på $\vec{a}$. Den defineres således:

Definition 1.3

For en vektor $\vec{a}$ defineres *tværvektoren* $\widehat{\vec{a}}$ som den vektor man får ved at dreje $\vec{a}$ 90° i positiv omløbsretning (dvs. mod uret).



Figur 1.3: Tværvektoren $\hat{\vec{a}}$ til $\vec{a}$.

Et eksempel på en tværvektor kan ses på figur 1.3.

Den modsatte vektor bevæger sig altså i modsat retning af en given vektor, mens en tværvektor står vinkelret på. Når man sammenligner to forskellige vektorer, kan man også undersøge om de er modsat rettede eller står vinkelret på hinanden.

Definition 1.4

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kaldes

ensrettede
hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ peger i samme parallelle retning,

modsat rettede
hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ peger i modsatte parallelle retninger,

parallelle, $\vec{a} \parallel \vec{b}$
hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er enten ensrettede eller modsat rettede,

ortogonale, $\vec{a} \perp \vec{b}$
hvis $\vec{a}$ står vinkelret på $\vec{b}$.

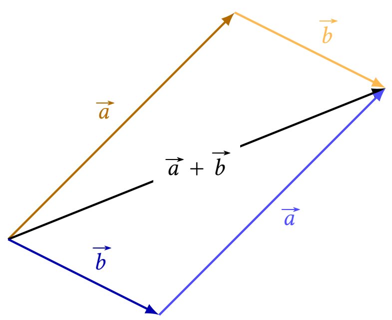
Da nulvektoren $\vec{0}$ ikke er en egentlig vektor, er denne hverken parallel med eller vinkelret på nogen anden vektor.

1.1 Regning med vektorer

Der findes forskellige regneoperationer for vektorer. Bl.a. kan man lægge dem sammen. Det gør man ved at lægge de pile der repræsenterer vektorerne, i forlængelse af hinanden.

Definition 1.5

Summen $\vec{a} + \vec{b}$ af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er den vektor man får ved at tegne en pil fra $\vec{a}$'s begyndelsespunkt til $\vec{b}$'s slutpunkt når vektor $\vec{b}$ lægges i forlængelse af vektor $\vec{a}$.



Figur 1.4: Addition af vektorer.

Fremgangsmåden er illustreret på figur 1.4. På figuren ses at $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, rækkefølgen man lægger vektorer sammen i er altså ligegyldig – præcis som når man lægger tal sammen. Af figuren kan man også se at man kan bestemme $\vec{a} + \vec{b}$ som diagonalen i det parallelogram der udspændes af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ når de har samme begyndelsespunkt. (Parallelogrammet kaldes også »kræfternes parallelogram«.)

Differensen mellem to vektorer bestemmes som en addition med den modsatte vektor.

Definition 1.6

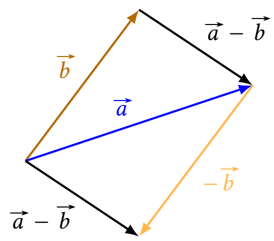
Differensen $\vec{a} - \vec{b}$ mellem de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) \ .$$

Man kan også fortolke subtraktion af vektorer geometrisk. Man har følgende sætning (se også figur 1.5):

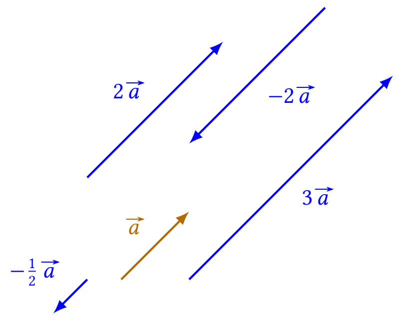
Sætning 1.7

Differensen $\vec{a} - \vec{b}$ af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er den vektor man får ved at tegne en pil fra $\vec{b}$'s slutpunkt til $\vec{a}$'s slutpunkt når $\vec{a}$ og $\vec{b}$ tegnes med samme begyndelsespunkt.



Figur 1.5: Subtraktion af vektorer.

Man kan også gange en vektor med et tal. Når en vektor ganges med et tal, ændres dens længde. Hvis man f.eks. ganger en vektor med 2, bliver den dobbelt så lang, og hvis man ganger med -2 bliver den dobbelt så lang og skifter retning (se figur 1.6).



Figur 1.6: Multiplikation af en vektor med et tal.

Definition 1.8

Hvis $\vec{a}$ er en vektor, og k er et tal, defineres vektoren $k \cdot \vec{a}$ på følgende måde:

- Længden af $k \cdot \vec{a}$ er $|k| \cdot |\vec{a}|$.
- Hvis $k > 0$ har $k \cdot \vec{a}$ samme retning som $\vec{a}$.
- Hvis $k < 0$ har $k \cdot \vec{a}$ den modsatte retning af $\vec{a}$.

Bemærk at retningen af $k \cdot \vec{a}$ ikke er defineret for $k = 0$. Det skyldes at længden af $0 \cdot \vec{a}$ er $0 \cdot |\vec{a}| = 0$. Dvs. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$, og denne vektor har slet ikke en retning. Af definitionen følger i øvrigt også at $(-1) \cdot \vec{a}$ er den vektor der har samme længde som $\vec{a}$, men peger i modsat retning. Dvs.

$$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a} \ .$$

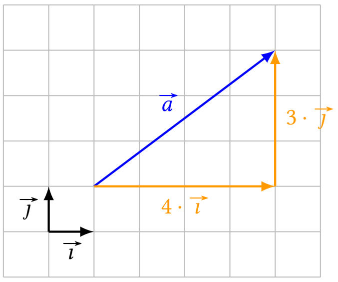
1.2 Koordinater

Hvis man skal bruge vektorer til at tale om bevægelse i planen, er det nødvendigt at sætte nogle tal på; dette kan man gøre ved at indtegne vektorerne i et koordinatsystem. Man kan definere et koordinatsystem ved at bestemme to vektorer $\vec{\imath}$ og $\vec{\jmath}$ som har retning langs hhv. første- og andenaksen, og hvor begge har længden 1.

Definition 1.9

I planen betegner $\vec{\imath}$ en vektor med længde 1 i førsteaksens retning, og $\vec{\jmath}$ betegner en vektor med længde 1 i andenaksens retning.

Bemærk her at $\vec{\jmath} = \widehat{\vec{\imath}}$. Det skyldes at man altid vil få andenaksen ved at dreje førsteaksen 90° mod uret.



Figur 1.7: Vektoren $\vec{a}$ er givet ved $\vec{a} = 4 \cdot \vec{\imath} + 3 \cdot \vec{\jmath}$.

Figur 1.7 viser hvordan en vilkårlig vektor kan tildeles koordinater. Vektor $\vec{a}$ på figuren bevæger sig 4 skridt mod højre og 3 opad. Vektoren kan derfor skrives som en sum af $4 \cdot \vec{\imath}$ og $3 \cdot \vec{\jmath}$, idet man bevæger sig 4 skridt i $\vec{\imath}$'s regning og 3 skridt i $\vec{\jmath}$'s regning. Dvs.

$$\vec{a} = 4 \cdot \vec{\imath} + 3 \cdot \vec{\jmath} \ .$$

Fordi det er besværligt at skrive vektorer på denne måde, har man opfundet en lettere notation, sådan at man i stedet skriver

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} ,$$

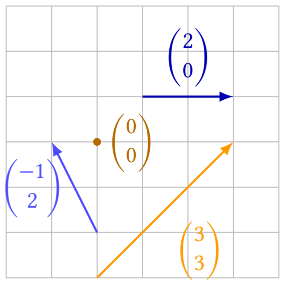
hvor det øverste tal altså viser hvor mange skridt man skal gå i førsteaksen retning, og det andet tal viser hvor mange skridt man skal gå i andenaksens retning.

Definition 1.10

Hvis en vektor $\vec{a}$ har koordinatsættet $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, betyder det at

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{\imath} + a_2 \cdot \vec{\jmath} \ .$$

Bemærk her at hvis a_1 er et negativt tal, vil vektoren bevæge sig mod venstre (dvs. modsat $\vec{\imath}$). Og hvis a_2 er et negativt tal, vil vektoren bevæge sig nedad (i modsat retning af $\vec{\jmath}$). Tegner man en vektor i et koordinatsystem, kan man altså angive vektoren ved et koordinatsæt som viser hvor mange enheder man har bevæget sig højre/venstre, og hvor mange enheder man har bevæget sig op/ned. Figur 1.8 viser vektorerne fra figur 1.1 indtegnet i et koordinatsystem og angivet med koordinater.



Figur 1.8: Vektorer i et koordinatsystem.

Koordinatsættet for en vektor skrives altid lodret med førstekoordinaten øverst og andenkoordinaten nederst – på denne måde kan man let se forskel på en vektor og et punkt. Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

beskriver derfor den følgende bevægelse i et koordinatsystem: 1 skridt mod venstre og 2 skridt opad. De to vektorer $\vec{\imath}$ og $\vec{\jmath}$ kan også tildeles koordinater. Idet de to vektorer repræsenterer en bevægelse på hhv. et skridt til højre og ét skridt opad, må der gælde at

$$\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Når man har indført koordinater, kan man også omskrive beregninger med vektorer til koordinater. F.eks. gælder der om den omvendte vektor at hvis $-\vec{a}$ har den modsatte retning af $\vec{a}$, så går $-\vec{a}$ mod venstre hvis $\vec{a}$ går mod højre. På samme måde må $-\vec{a}$ gå ned når $\vec{a}$ går op. Altså må $-\vec{a}$ have de samme koordinater som $\vec{a}$, men med modsat fortegn.

Sætning 1.11

Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, har den modsatte vektor $-\vec{a}$ koordinaterne

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} .$$

Eksempel 1.12 Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, så er den modsatte vektor givet ved

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -(-3) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Her kan man se, at $\vec{a}$ betegner en bevægelse på 3 til venstre og 1 op, mens den modsatte vektor $-\vec{a}$ betegner en bevægelse på 3 til højre og 1 ned.

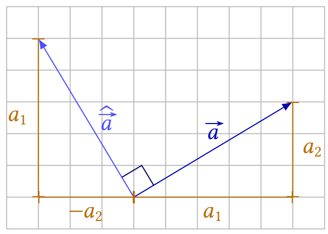
Koordinaterne til en tværvektor kan beregnes på følgende måde:

Sætning 1.13

Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, så er $\widehat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Bevis (skitse)
På figur 1.9 er de to vektorer $\vec{a}$ og $\widehat{\vec{a}}$ indtegnet i et koordinatsystem. Som det ses af figuren er

$$\widehat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} . \qquad \blacksquare$$



Figur 1.9: Koordinaterne til $\widehat{\vec{a}}$ kan findes ud fra koordinaterne til $\vec{a}$.

For tværvektorer gælder følgende sætning som kan bevises ved regning med koordinaterne:

Sætning 1.14

For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder

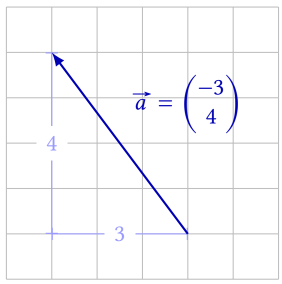
1. $\widehat{\widehat{\vec{a}}} = -\vec{a}$, og
2. $\widehat{\vec{a} + \vec{b}} = \widehat{\vec{a}} + \widehat{\vec{b}}$.

Ud fra koordinaterne kan man også bestemme vektorens længde. Længden af vektoren svarer til længden af en pil der repræsenterer vektoren. Denne længde kan findes vha. Pythagoras' sætning. Ser man på figur 1.10, ser man at pilen der repræsenterer vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} ,$$

er hypotenuse i en retvinklet trekant hvor kateterne er hhv. 3 og 4. Vektorens længde $|\vec{a}|$ kan altså beregnes ved at bruge Pythagoras' sætning på vektorens koordinater

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 .$$



Figur 1.10: Længden af en vektor kan beregnes ud fra dens koordinater.

Der gælder derfor følgende sætning:

Sætning 1.15

Hvis vektoren $\vec{a}$ har koordinaterne $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, så er vektorens længde

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\ .$$

Det viser sig at man let kan lægge vektorer sammen eller trække dem fra hinanden hvis man kender deres koordinater. Den følgende sætning viser hvordan.

Sætning 1.16

Hvis der er givet to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\ ,$$

så er

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}\ .$$

Bevis
Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, så er

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{\imath} + a_2 \cdot \vec{\jmath} \quad \text{og} \quad \vec{b} = b_1 \cdot \vec{\imath} + b_2 \cdot \vec{\jmath}\ .$$

Derfor er

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{a}_1 \cdot \vec{\imath} + a_2 \cdot \vec{\jmath} + b_1 \cdot \vec{\imath} + b_2 \cdot \vec{\jmath} \\ &= a_1 \cdot \vec{\imath} + b_1 \cdot \vec{\imath} + a_2 \cdot \vec{\jmath} + b_2 \cdot \vec{\jmath} \\ &= (a_1 + b_1) \cdot \vec{\imath} + (a_2 + b_2) \cdot \vec{\jmath} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}\ . \end{aligned}$$

For differensen mellem de to vektorer gælder at (se sætning 1.11)

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + (-b_1) \\ a_2 + (-b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}\ .$$

Hermed er sætningen vist. ■

Når man ganger en vektor med et tal k, bliver vektoren $|k|$ gange så lang, og den skifter retning hvis $k < 0$. Det betyder at begge koordinater må blive $|k|$ gange så store, og skifte fortegn hvis $k < 0$. Dette sker netop når man ganger koordinaterne med k.

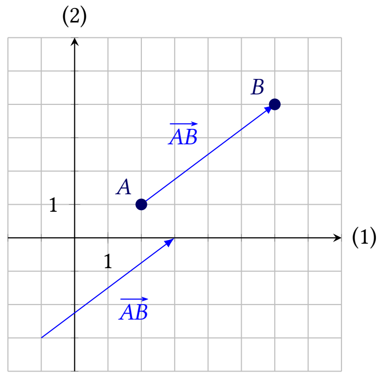
Sætning 1.17

Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ er en vektor, og k er et tal, så er

$$k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}\ .$$

1.3 Forbindelsesvektorer

Har man to punkter i planen, fastlægger disse en vektor. På figur 1.11 ses to repræsentanter for vektoren $\overrightarrow{AB}$ dvs. den vektor der beskriver en bevægelse der starter i punktet A og slutter i punktet B. Pilen fra A til B fastlægger vektoren $\overrightarrow{AB}$; men fordi alle pile med samme længde og retning er repræsentanter for den samme vektor, kan man altså lige så godt tegne vektoren et andet sted – som det også er gjort på figuren. Man har følgende definition:

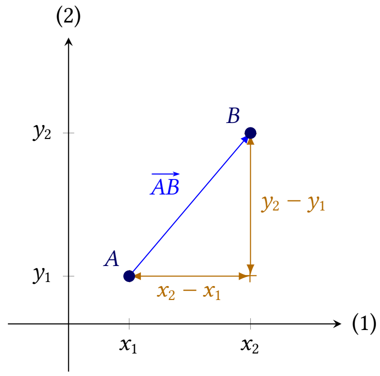


Figur 1.11: To repræsentanter for vektoren $\overrightarrow{AB}$.

Definition 1.18: Forbindelsesvektor

Hvis A og B er to punkter i planen, så er *forbindelsesvektoren* $\overrightarrow{AB}$ den vektor der kan repræsenteres ved en pil *fra A til B*.

Koordinaterne for vektoren $\overrightarrow{AB}$ kan man finde ved at undersøge hvor meget x-koordinaterne ændrer sig når man flytter sig fra A til B. Hvis de to punkters koordinater er $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$, så må x-koordinaten vokse med $x_2 - x_1$ og y-koordinaten vokse med $y_2 - y_1$ (se figur 1.12). Man har derfor følgende sætning:



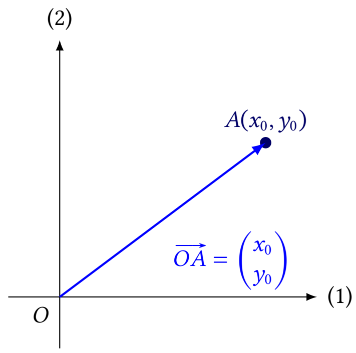
Figur 1.12: Sådan beregnes koordinaterne til vektoren $\overrightarrow{AB}$.

Sætning 1.19

Vektoren $\overrightarrow{AB}$ mellem punkterne $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ har koordinaterne

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} .$$

Hvis man har ét punkt i et koordinatsystem, kan man herudfra definere en vektor der har samme koordinater som punktet, dette er en såkaldt *stedvektor* der går fra origo (dvs. $(0, 0)$) til punktet (se figur 1.13).



Figur 1.13: Vektoren $\overrightarrow{OA}$ har samme koordinater som punktet A.

Definition 1.20

Hvis $A(x_0, y_0)$ er et punkt i et koordinatsystem, defineres *stedvektoren* til punktet som

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} .$$

$\overrightarrow{OA}$ er vektoren fra $O(0, 0)$ til $A(x_0, y_0)$.

For vektorer mellem punkter gælder specielt følgende vigtige sætning.

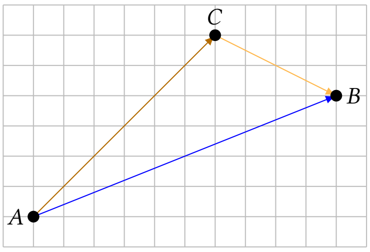
Sætning 1.21: Indskudssætningen

Hvis A, B og C er tre punkter i planen, så er

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} .$$

Bevis

Lad de tre punkter have koordinaterne $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ og $C(x_3, y_3)$. Så er



Figur 1.14: Indskudssætningen: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ y_2 - y_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_3 - x_1 + x_2 - x_3 \\ y_3 - y_1 + y_2 - y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\,.$$

Idet der altså gælder at $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$, er sætningen bevist. ■

Indskudssætningen er illustreret på figur 1.14. Sætningen siger at man kan beregne vejen fra A til B ved at gå en omvej over C.

1.4 Øvelser

Øvelse 1.1
Tegn repræsentanter for to vilkårlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Indtegn herefter vektorerne

a) $-\vec{a}$ b) $2\cdot\vec{a}$
c) $\vec{a} + \vec{b}$ d) $\vec{a} - \vec{b}$
e) $3\cdot\vec{a} + \vec{b}$ f) $2\cdot\vec{a} - 3\cdot\vec{b}$

Øvelse 1.2
Tegn repræsentanter for to vilkårlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, indtegn herefter $\vec{a} + \vec{b}$.

a) Brug din skitse til at argumentere for at det altid må være sandt at $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \le |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$.
b) Hvordan ligger de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i forhold til hinanden hvis $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$?

Øvelse 1.3
Bestem den modsatte vektor til de følgende vektorer:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Øvelse 1.4
Bestem længden af vektorerne i øvelse 1.3.

Øvelse 1.5
Bestem tværvektoren til de følgende vektorer:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Øvelse 1.6
Der er givet de tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Beregn vektorerne

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $2\cdot\vec{a}$
c) $\vec{b} - \vec{c}$ d) $\vec{c} + 3\cdot\vec{a}$
e) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ f) $4\cdot\vec{a} + 3\cdot\vec{c} - 5\cdot\vec{b}$
g) $2\cdot\widehat{\vec{a}} - b$ h) $\widehat{\vec{b}} - 5\cdot a + \widehat{\vec{c}}$

Øvelse 1.7
Punkterne A, B, C og D er givet ved koordinaterne $A(2,1)$, $B(3,5)$, $C(-4,0)$ og $D(2,9)$. Bestem koordinaterne til de følgende vektorer:

a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{BC}$
c) $\overrightarrow{DC}$ d) $\overrightarrow{AD}$
e) $\overrightarrow{CA}$ f) $\overrightarrow{BD}$

Øvelse 1.8
Reducér så meget som muligt:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{DA}$
c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$

2 Vinkler i planen

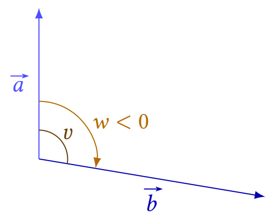
I dette kapitel gennemgås sammenhængen mellem vektorkoordinater og vinkler. Skal man måle vinklen mellem vektorer direkte, kan den måles på forskellig vis. Enten kan man måle den mindst mulige vinkel. Eller man kan måle vinklen ved at gå i en bestemt retning fra den ene vektor til den anden.

Definition 2.1: Vinkler mellem vektorer

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er to vektorer, definerer man

1. vinklen *mellem* vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som er den mindste vinkel der udspændes mellem vektorerne, og
2. vinklen *fra* $\vec{a}$ *til* $\vec{b}$ som er den vinkel med *fortegn* man får ved at bevæge sig fra vektor $\vec{a}$ til vektor $\vec{b}$.[1]

Vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ betegnes også med $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Forskellen på de to vinkler kan ses på figur 2.1.



Figur 2.1: Vinklen v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og w er vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$.

[1]Positiv omløbsretning er *mod uret* så hvis man bevæger sig med uret, er vinklen negativ.

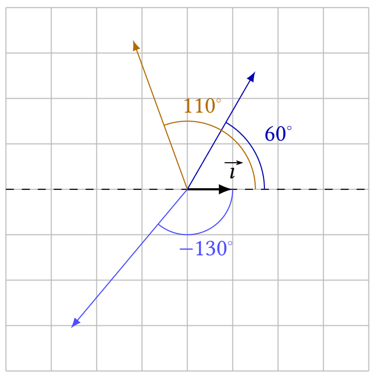
Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er altså en vinkel mellem 0° og 180°, mens vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ er en vinkel mellem -180° og 180°.

Enhver vektor har også en *retningsvinkel* der angiver denne vektors retning i koordinatsystemet. Den defineres på følgende måde:

Definition 2.2

Retningsvinklen for vektoren $\vec{a}$ er vinklen fra $\vec{i}$ til $\vec{a}$.

På figur 2.2 ses 3 forskellige vektorer og deres retningsvinkler.



Figur 2.2: Vektoren $\vec{e}_x$ og retningsvinklerne for forskellige vektorer.

2.1 Enhedsvektorer

For at kunne regne på sammenhængen mellem vektorkoordinater og vinkler viser det sig at være praktisk først at introducere såkaldte *enhedsvektorer*, dvs. vektorer med længde 1. Hvis man skal undersøge vinkler i planen, ser man nemlig kun på retningen af vektorerne og ikke deres længder.

Definition 2.3

En *enhedsvektor* er en vektor $\vec{e}$ med længden 1.

I det sædvanlige koordinatsystem i planen er to retninger specielle, nemlig de retninger der er givet ved første- og andenaksen (x- og y-aksen), disse retninger er givet ved enhedsvektorerne $\vec{\imath}$ og $\vec{\jmath}$ som er blevet introduceret tidligere. Man kan dog lave en enhedsvektor i en vilkårlig retning. Der gælder nemlig den følgende sætning.

Sætning 2.4

Hvis $\vec{a}$ er en vilkårlig vektor, vil en enhedsvektor $\vec{e}_{\vec{a}}$ i samme retning som $\vec{a}$ kunne beregnes som

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a}\ .$$

Man beregner $\vec{e}_{\vec{a}}$ ved at gange $\vec{a}$ med et positivt tal, så de to vektorer har samme retning. At vise at $\vec{e}_{\vec{a}}$ er en enhedsvektor (dvs. at dens længde er 1) overlades som en øvelse til læseren.

Da alle enhedsvektorer har den samme længde, er den eneste forskel på dem hvilken retning de peger i. Denne retning kan beskrives vha. en vinkel.

2.2 Cosinus, sinus og tangens

Enhedsvektorer kan sammen med retningsvinkler bruges til at definere de såkaldte *trigonometriske* funktioner *cosinus* og *sinus*. De to funktioner omregner en retningsvinkel til første- og andenkoordinaterne for den tilsvarende enhedsvektor.

Definition 2.5

Lad enhedsvektoren $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ have retningsvinklen v. Så defineres de tre trigonometriske funktioner cos, sin og tan som

1. $\cos(v) = e_1$,
2. $\sin(v) = e_2$, og
3. $\tan(v) = \dfrac{\sin(v)}{\cos(v)} = \frac{e_2}{e_1}$.

Bemærk at $\tan(v)$ er udefineret når $\cos(v) = 0$, dvs. hvis $v = \pm 90^\circ$.

Det vil altså sige at $\cos(v)$ er førstekoordinaten til den enhedsvektor der har retningsvinkel v, og $\sin(v)$ er andenkoordinaten til denne vektor – altså at

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$

når $\vec{e}$ har retningsvinkel v. De tre trigonometriske funktioner er indbygget i de fleste lommeregnere og alle CAS-værktøjer.

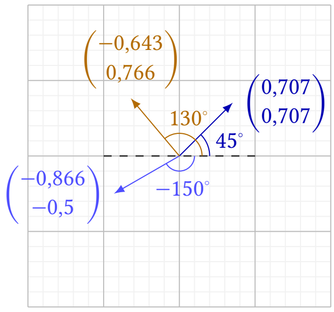
Bemærk at da $\cos(v)$ og $\sin(v)$ er hhv. første- og andenkoordinaten til en enhedsvektor, så vil $\cos(v)$ og $\sin(v)$ kun kunne give værdier mellem -1 og 1, så

$$-1 \le \cos(v) \le 1 \qquad \text{og} \qquad -1 \le \sin(v) \le 1\ .$$

Eksempel 2.6 Den enhedsvektor $\vec{e}$, der har retningsvinklen $v = 130^\circ$ har koordinaterne

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \cos(130^\circ) \\ \sin(130^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}643 \\ 0{,}766 \end{pmatrix} .$$

Denne vektor og to andre enhedsvektorer kan ses på figur 2.3.



Figur 2.3: Nogle enhedsvektorer og deres koordinater.

Ved at analysere symmetri i planen kan man bevise følgende sætning:

Sætning 2.7

Der gælder

1. $\cos(-v) = \cos(v)$
2. $\sin(-v) = -\sin(v)$
3. $\cos(180^\circ - v) = -\cos(v)$
4. $\sin(180^\circ - v) = \sin(v)$
5. $\cos(90^\circ - v) = \sin(v)$
6. $\sin(90^\circ - v) = \cos(v)$

Idet længden af en enhedsvektor er 1, kan man også udlede følgende sætning:

Sætning 2.8: Grundrelationen mellem cosinus og sinus

Der gælder

$$\cos(v)^2 + \sin(v)^2 = 1 .$$

Enhver vektor kan beskrives vha. dens længde og dens retningsvinkel, og de to funktioner cos og sin kan bruges til at omregne dette til koordinater.

Eksempel 2.9 Vektoren $\vec{a}$ har længden $|\vec{a}| = 4$ og retningsvinkel $v = 35^\circ$. Vektorens koordinater kan da findes vha. følgende beregning:[2]

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{e}_{\vec{a}} = 4 \cdot \begin{pmatrix} \cos(35^\circ) \\ \sin(35^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0{,}819 \\ 4 \cdot 0{,}574 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}28 \\ 2{,}29 \end{pmatrix} .$$

[2]Husk at $\vec{e}_{\vec{a}}$ er en enhedsvektor i $\vec{a}$'s retning (se definition 2.5).

2.3 Inverse trigonometriske funktioner

I eksempel 2.9 blev en vektors koordinater beregnet ud fra retningsvinklen og længden. Det ville være praktisk hvis man også kunne regne den anden vej – altså finde længden og retningsvinklen ud fra koordinaterne.

Længden af en vektor kan beregnes vha. formlen i sætning 1.15, men hvad med vinklen? Hvis man har en enhedsvektor $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$, gælder der at

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} ,$$

dvs.

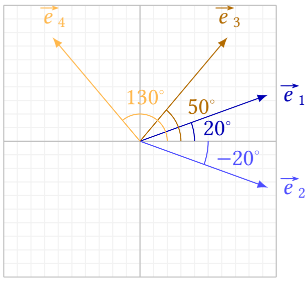
$$\cos(v) = e_1 \qquad \text{og} \qquad \sin(v) = e_2 ,$$

For at finde retningsvinklen v har man altså brug for at kunne løse sådanne ligninger. Dvs. man har brug for funktioner, der virker modsat cos og sin.

At det ikke er helt trivielt at konstruere disse funktioner ses af følgende eksempel:

Eksempel 2.10 Lad $\vec{e}_1$ være enhedsvektoren med retningsvinkel 20°, og $\vec{e}_2$ være enhedsvektoren med retningsvinkel -20°. Da har de to vektorer koordinaterne

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos(20^\circ) \\ \sin(20^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}940 \\ 0{,}342 \end{pmatrix}$$
$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos(-20^\circ) \\ \sin(-20^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}940 \\ -0{,}342 \end{pmatrix} .$$



Figur 2.4: Enhedsvektorer med samme første- eller andenkoordinat.

De to vektorer $\vec{e}_1$ og $\vec{e}_2$ har altså forskellige retningsvinkler, men samme førstekoordinat.

Hvis $\vec{e}_3$ og $\vec{e}_4$ er enhedsvektorerne med retningsvinklerne 50° og 130° er deres koordinater

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \cos(50^\circ) \\ \sin(50^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}643 \\ 0{,}766 \end{pmatrix}$$
$$\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} \cos(130^\circ) \\ \sin(130^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}643 \\ 0{,}766 \end{pmatrix} .$$

Her er der altså tale om enhedsvektorer med forskellige retningsvinkler, men samme andenkoordinat.

De fire vektorer kan ses på figur 2.4.

De såkaldte *inverse* trigonometriske funktioner kan derfor kun give én af to mulige retningsvinkler hvis man kender enten første- eller andenkoordinaten. Funktionerne defineres på følgende måde:[3]

[3]De to funktioner kaldes undertiden også arccos og arcsin. »arc« står for *arcus*, som betyder »bue« på latin. arcsin er altså den bue (vinkel), hvis sinus har en bestemt værdi.

I computerprogrammer/CAS-værktøjer kaldes de to funktioner i øvrigt ofte asin og acos.

Definition 2.11

Funktionen $\cos^{-1}$ kaldes *invers cosinus*. $\cos^{-1}(t)$ er den vinkel v i intervallet mellem 0° og 180° der løser ligningen $\cos(v) = t$.

Funktionen $\sin^{-1}$ kaldes *invers sinus*. $\sin^{-1}(t)$ er den vinkel v i intervallet mellem -90° og 90° der løser ligningen $\sin(v) = t$.

Eksempel 2.12 Hvis man vil løse ligningen

$$\cos(v) = 0{,}5 ,$$

beregner man vha. en lommeregner at

$$v = \cos^{-1}(0{,}5) = 60^\circ .$$

$v = 60^\circ$ er altså en løsning til ligningen.

Hvis man løser en ligning med cosinus eller sinus på denne måde, skal man være opmærksom på at man ikke finder alle løsninger.

Af eksempel 2.10 følger at -60° faktisk også er en løsning til ligningen $\cos(v) = 0{,}5$, dvs. i virkeligheden burde ligningen være løst på denne måde:

$$\cos(v) = 0{,}5 \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \pm\cos^{-1}(0{,}5) \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \pm 60^\circ .$$

(Her angiver tegnet $\pm$ at der er to løsninger: én med $+$ og én med $-$.)

Nu er det muligt at udlede en formel til at finde retningsvinklen for en vektor ud fra koordinaterne:

Sætning 2.13

Lad vektoren $\vec{a}$ være givet ved koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} .$$

Vektorens retningsvinkel er da

$$v = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}\right) & \text{hvis } a_2 \geq 0 \\ -\cos^{-1}\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}\right) & \text{hvis } a_2 < 0 \end{cases} .$$

Bevis
Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, vil en enhedsvektor i $\vec{a}$'s retning være givet ved

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{|\vec{a}|} \\ \frac{a_2}{|\vec{a}|} \end{pmatrix} .$$

Enhedsvektoren har også koordinaterne $\vec{e}_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$ hvor v er retningsvinklen for $\vec{a}$. Dvs.

$$\cos(v) = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \pm\cos^{-1}\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}\right) .$$

Hvis vektoren $\vec{a}$ har en positiv y-koordinat ($a_2 \geq 0$), så vil retningsvinklen være positiv, dvs. løsningen med + er den korrekte. Den anden løsning er korrekt hvis $a_2 < 0$. Hermed er sætningen bevist. ■

Eksempel 2.14 I dette eksempel bestemmes længden og retningsvinklen for de to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} .$$

Længden af vektor $\vec{a}$ er

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 ,$$

og retningsvinklen er

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 53{,}13^\circ .$$

Længden af vektor $\vec{b}$ er

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + (-7)^2} = \sqrt{53} = 7{,}28 ,$$

og retningsvinklen er

$$w = -\cos^{-1}\left(\frac{2}{7{,}28}\right) = -74{,}05^{\circ}\ .$$

Bemærk at retningsvinklen for $\vec{b}$ er negativ fordi vektor $\vec{b}$ har en negativ andenkoordinat.

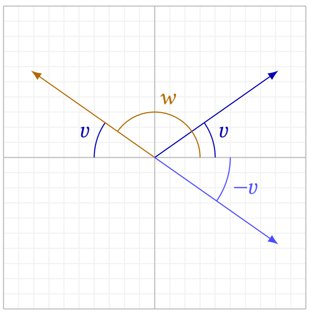
2.4 Øvelser

Øvelse 2.1
Bestem koordinaterne til enhedsvektorerne med retningsvinkel

a) 15°
b) 60°
c) -30°
d) 145°

og tegn vektorerne i et koordinatsystem.

Øvelse 2.2
Billedet herunder viser 3 enhedsvektorer med retningsvinklerne v, $-v$ og $w = 180^{\circ} - v$.



a) Brug billedet til at argumentere for sætning 2.7.

Øvelse 2.3
Bestem koordinaterne til vektoren $\vec{a}$ med retningsvinkel v når

a) $|\vec{a}| = 4$ og $v = 36^{\circ}$
b) $|\vec{a}| = 5{,}3$ og $v = 100^{\circ}$
c) $|\vec{a}| = 12$ og $v = -120^{\circ}$

Øvelse 2.4
Der er givet de tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\ ,\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}\ .$$

Tegn de følgende vektorer i et koordinatsystem, og beregn derefter deres længde og retningsvinkel.

a) $\vec{a}$
b) $\vec{b}$
c) $\vec{c}$
d) $\vec{a} + \vec{b}$
e) $\vec{b} - \vec{c}$
f) $2 \cdot \vec{a} - 5 \cdot \vec{b}$
g) $\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$

Skalarprodukt og determinant

3

Indtil videre er der kun set på addition og subtraktion når man regner med vektorer. Der findes dog også andre regneoperationer, nemlig skalarproduktet og determinanten som gennemgås i dette kapitel. Man kan ikke gange to vektorer med hinanden, men begge de to regneoperationer kan fortolkes som en slags multiplikation.

Hvis man ganger to tal med hinanden, kan resultatet fortolkes på to måder, enten som en længde eller som et areal. F.eks. kan $2 \cdot 3$ forstås som det sted på tallinjen der er 2 gange så langt henne som 3, men det kan også forstås som arealet af et rektangel med sidelængder 2 og 3. Skalarproduktet svarer på sin vis til den første af disse to fortolkninger, mens determinanten svarer til den anden.

3.1 Skalarprodukt

Det er som sagt ikke muligt at gange to vektorer med hinanden og få en ny vektor; men man kan gange deres længder (da disse jo er helt almindelige tal). Når man beregner det såkaldte *skalarprodukt*,[1] skal man dog også tage højde for at de to vektorer ikke nødvendigvis peger i samme retning. Vinklen mellem de to vektorer indgår derfor også.

[1] Det kaldes også somme tider »prikprodukt« fordi symbolet er en prik.

Definition 3.1: Skalarprodukt

Lad der være givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og lad v være vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$. *Skalarproduktet* mellem de to vektorer er tallet

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v) \ .$$

Når man regner med almindelige variable, er det normalt at udelade gangetegnet og skrive f.eks. ab i stedet for $a \cdot b$; men ved skalarproduktet *skal* man *altid* skrive symbolet. Det skyldes at skalarproduktet netop ikke er en multiplikation, men en regneoperation mellem vektorer der giver et tal som resultat. Derfor siger man heller ikke at man »ganger« to vektorer, men at man *prikker* dem.

Eksempel 3.2 Hvis de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har længderne

$$|\vec{a}| = 5 \quad \text{og} \quad \left|\vec{b}\right| = 3 \ ,$$

og vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ er
$$v = 42^\circ \ ,$$
så er skalarproduktet mellem de to vektorer tallet
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 5 \cdot 3 \cdot \cos(42^\circ) = 11{,}15 \ .$$

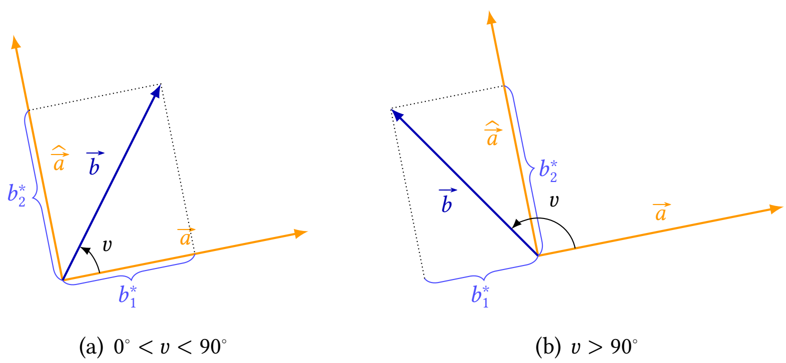
Af definitionen på skalarproduktet følger at hvis man *prikker* en vektor $\vec{a}$ med sig selv, får man kvadratet på dens længde. Det skyldes at vinklen fra en vektor til sig selv er 0°, dvs.
$$\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(0^\circ) = |\vec{a}|^2 \cdot 1 = |\vec{a}|^2 \ . \tag{3.1}$$

Hvis to vektorer er ortogonale er vinklen fra den ene til den anden 90° eller -90°. Idet
$$\cos(90^\circ) = \cos(-90^\circ) = 0 \ ,$$
følger det også af definitionen at
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b} \ , \tag{3.2}$$
altså at skalarproduktet giver 0 for ortogonale vektorer.

Bemærk i øvrigt at fordi $\cos(v) = \cos(-v)$ (se sætning 2.7), er det faktisk lige meget i beregningen af skalarproduktet om man anvender vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ eller vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, dvs. om vinklen har fortegn eller ej. Vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ anvendes udelukkende her for at der er en tydeligere sammenhæng med determinanten der defineres senere i dette kapitel.

For at kunne give en fortolkning af hvad skalarproduktet egentlig er for en størrelse, kan man begynde med at undersøge betydningen af $\left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v)$. Sæt
$$b_1^* = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v) \quad \text{og} \quad b_2^* = \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(v) \ , \tag{3.3}$$
hvor $*$ markerer at v ikke er $\vec{b}$'s retningsvinkel, men vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$. Hvis v var vektor $\vec{b}$'s retningsvinkel (dvs. vinklen fra $\vec{i}$ til $\vec{b}$), ville b_1^* være $\vec{b}$'s førstekoordinat. Men nu er v vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$, altså må der gælde at b_1^* og b_2^* er en slags koordinater i retning af $\vec{a}$ og $\widehat{\vec{a}}$.

Figur 3.1 viser hvordan b_1^* og b_2^* ligger i forhold til vektorerne $\vec{a}$ og $\widehat{\vec{a}}$. Bemærk at b_1^* er negativ når vinklen v er stump, mens b_2^* er negativ når vinklen er negativ – dvs. når man går med uret fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$.



Figur 3.1: Fortolkning af b_1^* og b_2^*. Bemærk at når $v > 90^\circ$ er størrelsen b_1^* negativ.

Idet $b_1^* = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos v$, kan skalarproduktet $\vec{a} \bullet \vec{b}$ fortolkes på den følgende måde:

> *Størrelsen af skalarproduktet $\vec{a} \bullet \vec{b}$ er produktet af længden af $\vec{a}$ med den del af $\vec{b}$ der ligger parallelt med $\vec{a}$. Fortegnet er negativt hvis vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ er stump, dvs. hvis den del af $\vec{b}$ der ligger parallelt med $\vec{a}$, er modsat rettet $\vec{a}$.*

3.2 Vektorprojektion

At *projicere* vektor $\vec{b}$ på $\vec{a}$ gøres ved at nedfælde vektor $\vec{b}$ vinkelret på vektor $\vec{a}$. Det illustreres lettest ved at lade de to vektorer have samme begyndelsespunkt. På figur 3.2 ses hvordan vektor $\vec{b}_{\vec{a}}$ der er projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$, ligger når vinklen mellem de to vektorer er spids, og når den er stump.

Som man kan se på figuren er er længden af projektionen $\vec{b}_{\vec{a}}$ lig med størrelsen af tallet b_1^* defineret i foregående afsnit. Der gælder derfor følgende sætning:

Sætning 3.3

For projektionen $\vec{b}_{\vec{a}}$ af vektor $\vec{b}$ på $\vec{a}$ gælder at

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \,,$$

og

$$\left|\vec{b}_{\vec{a}}\right| = \frac{\left|\vec{a} \bullet \vec{b}\right|}{|\vec{a}|} \,.$$

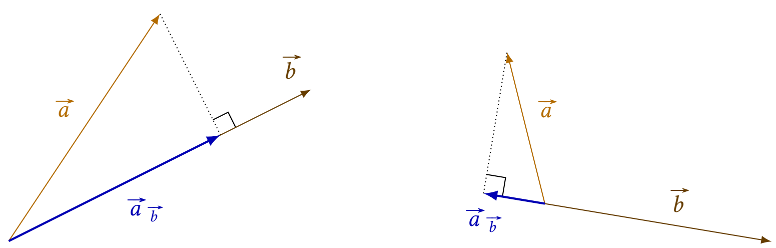
Bevis

Hvis man sammenligner figur 3.1 og 3.2, finder man at

$$\vec{b}_{\vec{a}} = b_1^* \cdot \vec{e}_{\vec{a}} \,,$$

hvor $\vec{e}_{\vec{a}}$ er en enhedsvektor i samme retning som $\vec{a}$, dvs.

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \,.$$



(a) Spids vinkel.

(b) Stump vinkel.

Figur 3.2: Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ når vinklen mellem de to vektorer er hhv. spids og stump.

Idet $b_1^* = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v)$, har man så at

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v)}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v)}{|a|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \ .$$

Den anden del af sætningen omhandler længden af projektionsvektoren. Men da man kender en formel for vektoren, tager man blot længden af denne og får

$$\left|\vec{b}_{\vec{a}}\right| = \left|\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}\right| = \frac{\left|\vec{a} \bullet \vec{b}\right|}{|\vec{a}|^2} |\vec{a}| = \frac{\left|\vec{a} \bullet \vec{b}\right|}{|\vec{a}|} \ ,$$

og sætningen er dermed vist. ■

3.3 Skalarprodukt og koordinater

Projektionsvektorerne kan bruges til at vise nogle grundliggende regneregler for skalarproduktet. Det viser sig nemlig at skalarproduktet både er *kommutativt* (dvs. rækkefølgen af vektorerne er ligegyldig) og *distributivt* (dvs. man kan »prikke« ind i parenteser).

Sætning 3.4

Lad der være givet to vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og et tal k. Da gælder

1. $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$.
2. $\vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$.
3. $(k \cdot \vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \left(k \cdot \vec{b}\right) = k \cdot \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)$.

Her bevises kun de første to af regnereglerne i sætningen, den sidste overlades til læseren.

Bevis
Hvis v er vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$, så går vinklen fra $\vec{b}$ til $\vec{a}$ den modsatte vej, dvs. den er lig med $-v$. Derfor er

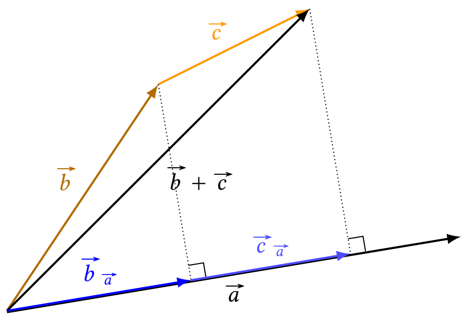
$$\vec{b} \bullet \vec{a} = \left|\vec{b}\right| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(-v) \ ,$$

men idet $\cos(v) = \cos(-v)$ (se sætning 2.7), har man

$$\left|\vec{b}\right| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(-v) = \left|\vec{b}\right| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(v) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v) = \vec{a} \bullet \vec{b} \ .$$

Dette beviser den første del af sætningen.

For at bevise den anden del kan man se på følgende tegning:



Som man kan se på tegningen, er projektionen af $\vec{b}+\vec{c}$ på $\vec{a}$ lig med summen af projektionerne af $\vec{b}$ på $\vec{a}$ og af $\vec{c}$ på $\vec{a}$, altså

$$\left(\vec{b}+\vec{c}\right)_{\vec{a}} = \vec{b}_{\vec{a}} + \vec{c}_{\vec{a}} .$$

Ifølge sætning 3.3 har man derfor

$$\begin{aligned} \frac{\vec{a}\bullet(\vec{b}+\vec{c})}{|a|^2}\cdot\vec{a} &= \frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|a|^2}\cdot\vec{a} + \frac{\vec{a}\bullet\vec{c}}{|a|^2}\cdot\vec{a} \qquad \Leftrightarrow \\ \frac{\vec{a}\bullet(\vec{b}+\vec{c})}{|a|^2}\cdot\vec{a} &= \left(\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|a|^2} + \frac{\vec{a}\bullet\vec{c}}{|a|^2}\right)\cdot\vec{a} . \end{aligned}$$

Vektorerne på venstre og højre side er begge lig et tal ganget med vektor $\vec{a}$. Hvis de skal være lig hinanden, skal tallene derfor være lig hinanden, og man får

$$\frac{\vec{a}\bullet(\vec{b}+\vec{c})}{|a|^2} = \frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|a|^2} + \frac{\vec{a}\bullet\vec{c}}{|a|^2} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\bullet(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\bullet\vec{b} + \vec{a}\bullet\vec{c} ,$$

hvorved den anden del af sætningen er bevist. ■

Når man kender disse regneregler for skalarproduktet, er det muligt at finde ud af hvordan man beregner skalarproduktet ud fra vektorernes koordinater. Det viser sig nemlig at man kan beregne skalarproduktet uden at kende vinklen mellem vektorerne hvis blot man kender deres koordinater.

Sætning 3.5

Hvis de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} ,$$

så kan skalarproduktet af de to vektorer beregnes som

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 .$$

Bevis
Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, er

$$\vec{a} = a_1\cdot\vec{\imath} + a_2\cdot\vec{\jmath} \quad \text{og} \quad \vec{b} = b_1\cdot\vec{\imath} + b_2\cdot\vec{\jmath} .$$

Anvender man nu regnereglerne i sætning 3.4, får man

$$\begin{aligned}\vec{a} \bullet \vec{b} &= (a_1 \cdot \vec{\imath} + a_2 \cdot \vec{\jmath}) \bullet (b_1 \cdot \vec{\imath} + b_2 \cdot \vec{\jmath}) \\ &= (a_1 \cdot \vec{\imath}) \bullet (b_1 \cdot \vec{\imath}) + (a_1 \cdot \vec{\imath}) \bullet (b_2 \cdot \vec{\jmath}) \\ &\qquad + (a_2 \cdot \vec{\jmath}) \bullet (b_1 \cdot \vec{\imath}) + (a_2 \cdot \vec{\jmath}) \bullet (b_2 \cdot \vec{\jmath}) \\ &= (a_1 \cdot b_1) \cdot \vec{\imath} \bullet \vec{\imath} + (a_1 \cdot b_1) \cdot \vec{\imath} \bullet \vec{\jmath} \\ &\qquad + (a_2 \cdot b_1) \cdot \vec{\jmath} \bullet \vec{\imath} + (a_2 \cdot b_2) \cdot \vec{\jmath} \bullet \vec{\jmath}\ .\end{aligned}$$

Idet $\vec{\imath}$ og $\vec{\jmath}$ er ortogonale, er deres skalarprodukt 0, se (3.2). Derfor kan dette reduceres til

$$\begin{aligned}\vec{a} \bullet \vec{b} &= (a_1 \cdot b_1) \cdot \vec{\imath} \bullet \vec{\imath} + (a_2 \cdot b_2) \cdot \vec{\jmath} \bullet \vec{\jmath} \\ &= a_1 \cdot b_1 \cdot |\vec{\imath}|^2 + a_2 \cdot b_2 \cdot |\vec{\jmath}|^2 \\ &= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2\ ,\end{aligned}$$

hvor det sidste lighedstegn følger af at både $\vec{\imath}$ og $\vec{\jmath}$ er enhedsvektorer, dvs. deres længder er 1. Hermed er sætningen bevist. ■

Det er altså simpelt at beregne skalarproduktet af to vektorer hvis man kender deres koordinater.

Eksempel 3.6 Hvis

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}\ ,$$

så er

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 3 \cdot 8 + 2 \cdot (-5) = 24 + (-10) = 14\ .$$

Når man kan beregne skalarproduktet ud fra koordinaterne, kan man også projicere en vektor på en anden uden at kende vinklen mellem dem direkte:

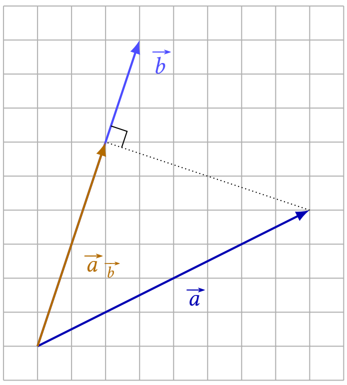
Eksempel 3.7 Hvis

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}\ ,$$

så er $\vec{a}$'s projektion på $\vec{b}$ (se sætning 3.3)

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + 9^2}^2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{8 \cdot 3 + 4 \cdot 9}{9 + 81} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{60}{90} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}\ .$$

Vektorerne kan ses på figur 3.3.



Figur 3.3: Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Sammenhængen mellem skalarproduktet og vektorernes koordinater, kan man bruge også bruge til at bestemme vinklen mellem to vektorer. Hvis man skriver lidt om på definitionen af skalarproduktet får man nemlig

Sætning 3.8

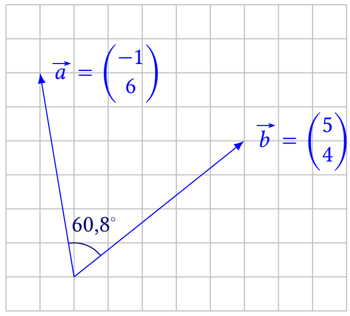
Hvis der er givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og v er vinklen mellem de to vektorer, så er

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Denne sætning kan bruges direkte til at bestemme vinklen mellem to vektorer.

Eksempel 3.9 Her beregnes vinklen mellem de to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} .$$



Figur 3.4: Vinklen mellem vektor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 60,8°.

Først beregnes de to vektorers længder:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 6^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} .$$

Disse kan nu indsættes i formlen

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{37}\sqrt{41}} = \frac{-1 \cdot 5 + 6 \cdot 4}{\sqrt{37 \cdot 41}} = \frac{19}{\sqrt{1517}} ,$$

og man finder vinklen v

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{19}{\sqrt{1517}}\right) = 60{,}8^\circ .$$

Altså er vinklen mellem de to vektorer 60,8° (se figur 3.4).

Vinklen mellem to vektorer ligger mellem 0° og 180°. Hvis der for en vinkel v gælder at $0^\circ \leq v < 90^\circ$, er $\cos(v) > 0$. Hvis $90^\circ < v \leq 180^\circ$, er $\cos(v) < 0$. Specielt for $v = 90^\circ$ gælder $\cos(v) = 0$. Sætning 3.8 fører derfor til følgende:

Sætning 3.10

Lad v være vinklen mellem de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Der gælder da

1. Hvis $\vec{a} \bullet \vec{b} > 0$, så er $0^\circ \leq v < 90^\circ$.
2. Hvis $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$, så er $v = 90^\circ$, dvs. $\vec{a} \perp \vec{b}$.
3. Hvis $\vec{a} \bullet \vec{b} < 0$, så er $90^\circ < v \leq 180^\circ$.

Denne sætning giver en nem test for om to vektorer er ortogonale. Man skal blot beregne deres skalarprodukt. Hvis det giver 0, så er vektorerne ortogonale. Ellers er de ikke.

Eksempel 3.11 For de to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ er

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) = 0 .$$

Da $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ er disse to vektorer ortogonale.

Eksempel 3.12 Der er givet to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} ,$$

hvor t er et tal. Hvis de to vektorer er ortogonale, hvad er så tallet t?

Her beregnes først

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + t \cdot 4 = 6 + 4t .$$

Idet de to vektorer er ortogonale, er $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$, dvs.

$$6 + 4t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4t = -6 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} .$$

Hvis de to vektorer er ortogonale, har man altså, at $t = -\frac{3}{2}$.

For skalarproduktet gælder der også nogle regneregler der minder om de kvadratsætninger der gælder for regning med tal. Disse viser sig at være meget brugbare i geometriske beregninger.

Sætning 3.13

Hvis $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er vektorer, gælder der

1. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2 \cdot \vec{a} \bullet \vec{b}$.
2. $\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2 \cdot \vec{a} \bullet \vec{b}$.
3. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2$.

Bevis
Alle regnereglerne kan bevises ved regning med koordinater. Her bevises kun regneregel 1; resten overlades til læseren.

For de to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gælder

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} + \vec{b}\right) &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \\
&= (a_1 + b_1)(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)(a_2 + b_2) \\
&= a_1^2 + b_1^2 + 2a_1b_1 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_2b_2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) + 2(a_1b_1 + a_2b_2) \\
&= |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2 \cdot \vec{a} \bullet \vec{b} ,
\end{aligned}$$

hvorved 1 er bevist. ■

3.4 Determinant

Vha. skalarproduktet kan man afgøre om to vektorer er ortogonale. Der findes en anden størrelse, *determinanten*, som kan bruges til at afgøre om vektorer er parallelle.

Definition 3.14

For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ definerer man *determinanten* mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ til at være tallet

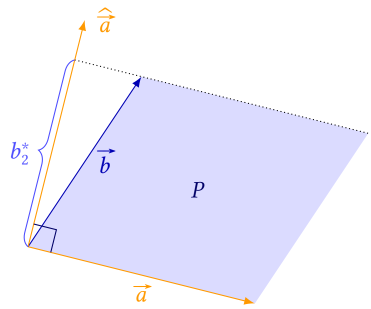
$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(v) ,$$

hvor v er vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$.

Det viser sig at determinanten har en geometrisk fortolkning. Figur 3.5 viser parallelogrammet udspændt af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Tallet b_2^* der er markeret på figuren svarer til definitionen i ligning 3.3, altså

$$b_2^* = \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(v) ,$$

hvor v er vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$. Som man kan se på figuren svarer størrelsen af b_2^* til højden af parallelogrammet, mens $|\vec{a}|$ er længden af grundlinjen.



Figur 3.5: Parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot b_2^* ,$$

dvs. størrelsen af determinanten er lig arealet af det parallelogram der udspændes af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Man har derfor den følgende sætning.

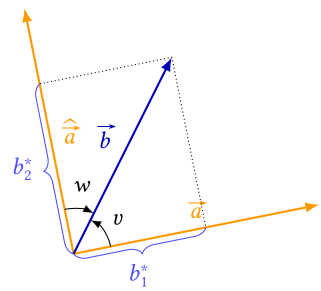
Sætning 3.15

Det parallelogram der udspændes af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, har arealet

$$P = \left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| .$$

I sætningen ovenfor beregnes den numeriske værdi af determinanten fordi $\sin(v)$ er negativ når v er negativ, dvs. når man bevæger sig med uret fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$. Dvs. determinanten angiver størrelsen af arealet, og dens fortegn angiver hvordan vektorerne ligger i forhold til hinanden.

Lige som skalarproduktet kan determinanten beregnes ud fra de to vektorers koordinater. Hvis b_1^* og b_2^* er defineret som i ligning (3.3), ligger de to tal som på figur 3.6. Vinklen v på figuren er vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$, mens w er vinklen fra $\widehat{\vec{a}}$ til $\vec{b}$.



Figur 3.6: Vektor $\vec{b}$'s »koordinater« i retning af $\vec{a}$ og $\widehat{\vec{a}}$.

På figuren ser man at der må gælde at

$$b_1^* = \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(w) \quad \text{og} \quad b_2^* = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(w) .$$

Idet $\left|\widehat{\vec{a}}\right| = |\vec{a}|$, må der derfor gælde at

$$\widehat{\vec{a}} \bullet \vec{b} = \left|\widehat{\vec{a}}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(w) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(v) = \det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \ .$$

Determinanten kan altså omskrives til et skalarprodukt, og indsætter man koordinater får man

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \widehat{\vec{a}} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \ .$$

Dette er opsummeret i den følgende sætning.

Sætning 3.16

For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kan determinanten beregnes som

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \widehat{\vec{a}} \bullet \vec{b} \ .$$

Hvis de to vektorer har koordinaterne $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, får man

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \ .$$

Notationen $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ er opfundet for gøre beregningen af determinanten mere overskuelig. Den skal forstås på den måde at man først beregner produktet af diagonalen fra øverste venstre hjørne til nederste højre og derefter fratrækker produktet af diagonalen fra nederste venstre hjørne til øverste højre:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \ .$$

Eksempel 3.17 Determinanten af de to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-4) = 3 - (-8) = 11 \ .$$

Når man beregne determinanten ud fra vektorernes koordinater, kan man også beregne arealet af parallelogrammet udspændt mellem dem:

Eksempel 3.18 Her beregnes arealet af parallelogrammet udspændt af vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Ifølge sætning 3.15 er arealet

$$\left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| = \left|\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = |3 \cdot 1 - 2 \cdot 5| = |-7| = 7 \ .$$

Arealet af parallelogrammet er altså 7.

Eksempel 3.19 De to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

udspænder et parallelogram med areal 10. Hvad er tallet t?

Anvender man sætning 3.15, kan man opstille et udtryk for arealet:

$$\left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| = \left|\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ t & 4 \end{vmatrix}\right| = |2 \cdot 4 - t \cdot 1| = |8 - t| \ .$$

Da man ved at arealet er 10, får man derfor ligningen

$$|8 - t| = 10 \ .$$

Idet der er tale om en ligning med numerisk værdi, er der i virkeligheden to ligninger. Hvis $8 - t$ giver 10, er ligningen opfyldt; men det er den også hvis $8 - t$ giver -10, dvs.

$$\begin{aligned} 8 - t = 10 \quad &\vee \quad 8 - t = -10 \qquad \Leftrightarrow \\ t = -2 \quad &\vee \qquad\quad t = 18 \ . \end{aligned}$$

Altså er arealet af parallelogrammet 10, hvis $t = -2$ eller $t = 18$.

Som tidligere nævnt angiver fortegnet for determinanten, hvordan vektorerne ligger i forhold til hinanden. Når man tager determinanten af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er rækkefølgen derfor ikke ligegyldig. Følgende sætning angiver en række regneregler for determinanten:

Sætning 3.20

For vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ gælder der

1. $\det\left(\vec{b}, \vec{a}\right) = -\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$,
2. $\det\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) = \det(\vec{a}, \vec{c}) + \det\left(\vec{b}, \vec{c}\right)$,
3. $\det\left(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right) = \det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \det(\vec{a}, \vec{c})$.

Bevis
Den første del kan bevises ud fra definitionen på determinanten. Hvis v er vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$, er vinklen fra $\vec{b}$ til $\vec{a}$ lig med $-v$. Dvs.

$$\det\left(\vec{b}, \vec{a}\right) = \left|\vec{b}\right| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin(-v) = -|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(v) = -\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \ .$$

For $\det\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right)$ gælder der ifølge sætning 3.13, 1.14 og 3.20 at

$$\begin{aligned} \det\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) &= \widehat{(\vec{a} + \vec{b})} \bullet \vec{c} \\ &= \left(\hat{\vec{a}} + \hat{\vec{b}}\right) \bullet \vec{c} = \hat{\vec{a}} \bullet \vec{c} + \hat{\vec{b}} \bullet \vec{c} \\ &= \det(\vec{a}, \vec{c}) + \det\left(\vec{b}, \vec{c}\right) \ . \end{aligned}$$

Den sidste del af beviset overlades som en øvelse til læseren. ■

Hvis det $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$ er $\widehat{\vec{a}} \cdot \vec{b} = 0$. Ifølge sætning 3.10 betyder det at $\widehat{\vec{a}}$ og $\vec{b}$ er ortogonale. Hvis $\widehat{\vec{a}}$ og $\vec{b}$ er ortogonale, må $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være parallelle. Der gælder derfor følgende sætning:

Sætning 3.21

For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder der

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b} \, .$$

Man kan altså ved at beregne determinanten afgøre om to vektorer er parallelle.

3.5 Øvelser

Øvelse 3.1
For de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder der

$$|\vec{a}| = 5 \, , \quad \left|\vec{b}\right| = 6 \quad \text{og} \quad \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 43^\circ \, .$$

a) Bestem $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Øvelse 3.2
De to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} ;.$$

a) Tegn en skitse af de to vektorer, og bestem vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$.

b) Bestem $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

c) Bestem $\vec{a}_{\vec{b}}$.

Øvelse 3.3
Beregn

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Øvelse 3.4
To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestem

a) $\vec{a}_{\vec{b}}$

b) $\vec{b}_{\vec{a}}$

c) $\vec{a}_{\vec{a}+\vec{b}}$

Øvelse 3.5
Der er givet de tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix} .$$

a) Bestem længden af $\vec{a}$'s projektion på $\vec{b}$.

b) Bestem t så $\vec{c}_{\vec{a}} = \vec{a}$.

c) Bestem t så længden af $\vec{c}$'s projektion på $\vec{b}$ er 2.

Øvelse 3.6
Der er givet de tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Bestem vinklen mellem vektorerne

a) $\vec{a}$ og $\vec{b}$

b) $\vec{a}$ og $\vec{c}$

c) $\vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{c}$

d) $\vec{b} - \vec{c}$ og $\vec{a} + \vec{b}$

e) $\vec{a}$ og $\vec{b} - \vec{a}$

f) $\vec{c}$ og $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

Øvelse 3.7
Afgør om de vinklen mellem de følgende vektorer er spids, ret eller stump.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$

Øvelse 3.8
Der er givet de tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \;, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} \;.$$

Bestem tallet t, så

a) $\vec{a}$ og $\vec{c}$ er ortogonale

b) $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er ortogonale

c) $\vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{c}$ er ortogonale

d) $\vec{c}$ og $\vec{a} - \vec{c}$ er ortogonale

Øvelse 3.9
Beregn følgende determinanter:

a) $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 5 & -9 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$

Øvelse 3.10
Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} \;.$$

Bestem t så

a) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle

b) $\vec{a} + \vec{b}$ og $\hat{\vec{b}}$ er parallelle

Øvelse 3.11
De tre punkter P, Q og R er givet ved koordinaterne

$$P(3,2) \;, \quad Q(8,-1) \quad \text{og} \quad R(4,0) \;.$$

Bestem arealet af det parallelogram der er udspændt af vektorerne

a) $\overrightarrow{PQ}$ og $\overrightarrow{PR}$

b) $\overrightarrow{PR}$ og $\widehat{\overrightarrow{QR}}$

c) $2 \cdot \overrightarrow{PR}$ og $\widehat{\overrightarrow{RQ}}$

d) $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QP}$ og $3 \cdot \overrightarrow{PQ}$

Linjer 4

I dette kapitel ses på linjer i planen. Vha. punkter og vektorer kan man udlede ligninger for de punkter, der ligger på en linje. Det er nyttigt at kunne tale om *afstanden* mellem to punkter i et koordinatsystem. Der gælder følgende sætning:

Sætning 4.1

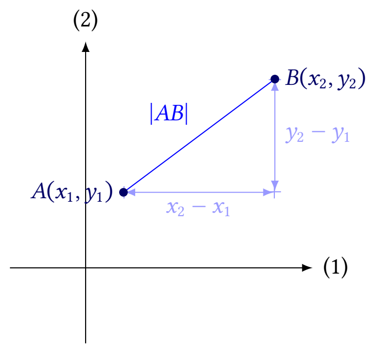
Afstanden mellem punkterne $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ er

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ .$$

Bevis
Afstanden fra A til B er lig med længden af vektoren $\overrightarrow{AB}$, dvs.

$$|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ . \qquad \blacksquare$$

Sætningen kan også bevises ved at betragte linjen AB som hypotenusen i en retvinklet trekant, og derefter anvende Pythagoras' sætning. Se figur 4.1.



Figur 4.1: Afstanden mellem to punkter kan findes vha. Pythagoras' sætning.

4.1 Linjens parameterfremstilling

En linje i et koordinatsystem kan beskrives ud fra et punkt på linjen og den retning linjen har i koordinatsystemet. Når man skal beskrive en linjes retning, kan dette gøres vha. en vektor.

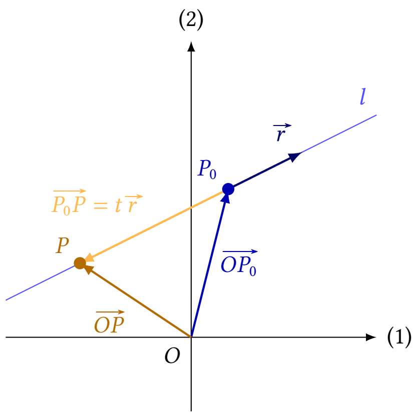
Definition 4.2

En vektor $\vec{r}$ der er parallel med en linje l, kaldes en *retningsvektor* for l, og en vektor $\vec{n}$ der står vinkelret på linjen, kaldes en *normalvektor* for l.

Det er her vigtigt at bemærke at en linje ikke har én retningsvektor, men uendeligt mange. Hvis $\vec{r}$ er en retningsvektor, så vil enhver vektor der er parallel med $\vec{r}$, nemlig også være en retningsvektor. Det samme gælder for en normalvektor.

Når man skal beskrive linjen er det ligeledes ligegyldigt hvilket punkt man starter med. En linje indeholder uendeligt mange punkter, og ethvert af disse koblet med en retningsvektor kan bruges til at beskrive linjen.

Har man et punkt og en retningsvektor for en linje, kan linjen beskrives ved en såkaldt *parameterfremstilling* som er en ligning der fortæller hvordan ethvert punkt på linjen kan beregnes ud fra et startpunkt og en retningsvektor.



Figur 4.2: Ud fra denne figur kan man udlede en sammenhæng mellem et tilfældigt punkt P på linjen, det kendte punkt P_0 og retningsvektoren $\vec{r}$.

På figur 4.2 ses en linje l, et punkt $P_0(x_0, y_0)$ på linjen og en retningsvektor $\vec{r}$ for linjen. På figuren er der også indtegnet et tilfældigt punkt $P(x, y)$ på linjen. Ifølge indskudssætningen (sætning 1.21) gælder der

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}\ .$$

Dette kan også ses på figuren.

Men vektoren $\overrightarrow{P_0P}$ er parallel med $\vec{r}$, dvs. der findes et tal t så $\overrightarrow{P_0P} = t\,\vec{r}$. Altså får man ligningen

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\,\vec{r}\ .$$

$\overrightarrow{OP}$ og $\overrightarrow{OP_0}$ er stedvektorerne til de to punkter $P(x, y)$ og $P_0(x_0, y_0)$ så det er vektorer der har samme koordinater som de to punkter. Dvs. man kan sætte dette ind i ligningen og få

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\,\vec{r}\ . \tag{4.1}$$

Ethvert punkt $P(x, y)$ på linjen kan findes ud fra denne ligning for en eller anden værdi af t. Lader man nu t gennemløbe alle de reelle tal, får man alle punkterne på linjen. En ligning af typen (4.1) hvor $t \in \mathbb{R}$, kaldes en *parameterfremstilling* for linjen l. Tallet t der gennemløber de reelle tal, kaldes *parameteren.* Der gælder altså

Sætning 4.3

En *parameterfremstilling* for en linje i planen er givet ved

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}\ , \quad t \in \mathbb{R}\ ,$$

hvor (x_0, y_0) er et punkt på linjen, og $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$ er en retningsvektor for linjen.

Eksempel 4.4 Hvis en linje l går gennem punktet $(3, 2)$ og har en retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, så er dens parameterfremstilling

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}\ , \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

Eksempel 4.5 Her findes en parameterfremstilling for den linje m der går gennem de to punkter $A(3, 4)$ og $B(-2, 6)$.

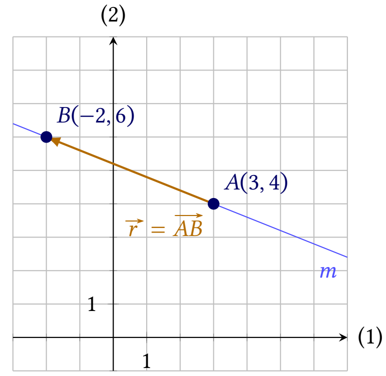
For at kunne opskrive en parameterfremstilling, skal man bruge en retningsvektor. Da både A og B ligger på linjen, kan $\overrightarrow{AB}$ bruges som retningsvektor.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}\ .$$

Man skal tillige bruge et punkt linjen går igennem. Her er det oplagt at vælge enten A eller B. Bruger man A, bliver parameterfremstillingen

$$m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Punkterne A og B, linjen m og retningsvektoren $\overrightarrow{AB}$ kan ses på figur 4.3.



Figur 4.3: Punkterne A og B samt linjen m.

Idet m går igennem uendeligt mange punkter og har uendeligt mange retningsvektorer (alle vektorer der er parallelle med $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$), er f.eks.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

også parameterfremstillinger for m.

En parameterfremstilling er i virkeligheden en vektor-ligning hvor koordinaterne til retningsvektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ er funktioner af parameteren t. Det betyder at man ud fra parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kan finde de to *koordinatfunktioner* $x(t)$ og $y(t)$ givet ved

$$x(t) = x_0 + r_x t \qquad \text{og} \qquad y(t) = y_0 + r_y t\,.$$

De to funktioner viser hvordan punktets x- og y-koordinat ændrer sig som funktion af parameteren t.

Parameteren t i en parameterfremstilling fortolkes derfor ofte som en tid. Dvs. efterhånden som tiden t går, bevæger punktet $(x(t), y(t))$ sig langs den kurve som parameterfremstillingen angiver.[1]

Hvis to linjer ikke er parallelle, har de et skæringspunkt. Koordinatfunktionerne kan her bruges til at bestemme skæringspunktet mellem to linjer.

Eksempel 4.6 To linjer er givet ved parameterfremstillingerne[2]

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

For linjen l er koordinatfunktionerne derfor

$$x_l = 3 + t \cdot (-1) \qquad \text{og} \qquad y_l = -3 + t \cdot 6,$$

og for m får man

$$x_m = -4 + s \cdot (5) \qquad \text{og} \qquad y_m = 1 + s \cdot 8\,.$$

[1] Det er ikke kun linjer der har parameterfremstillinger. Der kan stilles parameterfremstillinger op for uendeligt mange forskellige kurver i et koordinatsystem, f.eks. cirkler eller parabler.

[2] Når man opstiller flere parameterfremstillinger, er det vigtigt at parametrene kaldes noget forskelligt da det ikke drejer sig om den samme variabel.

For at finde skæringspunktet skal man finde den værdi af t og den værdi af s der giver samme punkt når man sætter dem ind i ligningerne. Dvs. de værdier for t og s hvor $x_l = x_m$ og $y_l = y_m$. Det giver to ligninger med to ubekendte:

$$\begin{aligned} 3 - t &= -4 + 5s \qquad (4.2) \\ -3 + 6t &= 1 + 8s \ . \end{aligned}$$

Disse to ligninger kan løses vha. lige store koefficienters metode. Forlænger man den øverste ligning med 6, får man

$$\begin{aligned} 18 - 6t &= -24 + 30s \\ -3 + 6t &= 1 + 8s \ . \end{aligned}$$

Lægger man disse to ligninger sammen, forsvinder parameteren t; man får nemlig

$$15 = -23 + 38s \qquad \Leftrightarrow \qquad s = 1 \ .$$

Da man nu kender parameteren s, kan skæringspunktet beregnes ud fra parameterfremstillingen for m. Sætter man $s = 1$ i parameterfremstillingen, får man

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} \ .$$

Altså skærer de to linjer hinanden i $(1, 9)$.

Hvis man vil bekræfte denne beregning, kan man beregne værdien af parameteren t, f.eks. vha. ligningen (4.2). Sætter man $s = 1$ ind i denne ligning, får man

$$3 - t = -4 + 5 \cdot 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = 2 \ .$$

Når man sætter $t = 2$ ind i parameterfremstillingen for l, får man

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

hvilket blot bekræfter at de to linjer skærer hinanden i $(1, 9)$.

4.2 Linjens ligning

Som bekendt kan linjer også beskrives ved ligninger. En parameterfremstilling for en linje kan derfor altid omskrives til en ligning for linjen. Antag f.eks. at en given linje l har parameterfremstillingen

$$l : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\vec{r} \ , \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

Så kan parameterfremstillingen omskrives til

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = t\vec{r} \ . \qquad (4.3)$$

Tværvektoren $\hat{\vec{r}}$ til retningsvektoren $\vec{r}$ står vinkelret på linjen. Den er derfor en normalvektor for linjen. Koordinaterne til denne normalvektor kan findes ud fra $\vec{r}$'s koordinater. Nedenfor kaldes koordinaterne blot a og b, dvs. $\widehat{\vec{r}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Hvis man tager skalarproduktet med denne vektor på begge sider af ligningen (4.3), får man

$$\widehat{\vec{r}} \bullet \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \widehat{\vec{r}} \bullet t\vec{r} \ ,$$

men fordi $\widehat{\vec{r}} \perp \vec{r}$, giver højre side 0, dvs. man får

$$\begin{aligned} \widehat{\vec{r}} \bullet \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Der gælder altså følgende sætning:

Sætning 4.7

En linje som går gennem punktet (x_0, y_0) og har normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, kan beskrives ved ligningen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

der også kan skrives

$$ax + by + c = 0$$

hvor $c = -ax_0 - by_0$.

Eksempel 4.8 Linjen gennem $(3, 1)$ som har normalvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, har ligningen

$$\begin{aligned} 5(x - 3) + (-2)(y - 1) &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ 5x - 15 - 2y + 2 &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ 5x - 2y - 13 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Eksempel 4.9 Linjen med parameterfremstillingen

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \ , \quad t \in \mathbb{R} \ ,$$

kan omskrives til en ligning ved først at finde en normalvektor. Her tages tværvektoren til linjens retningsvektor, dvs.

$$\vec{n} = \widehat{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -(-3) \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \ .$$

Linjen går gennem punktet $(-1, 5)$. Linjens ligning er derfor

$$l: \quad 3(x - (-1)) + 4(y - 5) = 0 \ ,$$

som kan reduceres til

$$l: \quad 3x + 4y - 17 = 0 \ .$$

Det er vigtigt at bemærke at tallet a som optræder i ligningen $ax+by+c=0$, *ikke er en hældningskoefficient.* Hvis $b \neq 0$ kan linjens ligning dog omskrives

$$ax+by+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\ .$$

dvs. linjens hældningskoefficient er $-\frac{a}{b}$. Hvis $b=0$ kan denne omskrivning ikke lade sig gøre fordi man som bekendt ikke kan dividere med 0. Er $b=0$ har linjens ligning formen

$$ax+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{c}{a}\ ,$$

dvs. linjen er parallel med andenaksen (altså »lodret«).

Formen $ax+by+c=0$ kan altså beskrive *enhver* linje i et koordinatsystem, også de lodrette – hvilket man ikke kan med en ligning på formen $y=\alpha x+\beta$,[3]

[3] Linjens hældningskoefficient og skæring med andenaksen kaldes her α og β for at de ikke skal forveksles med konstanterne a og b i ligningen $ax+bx+c=0$.

Ud fra ovenstående argument får man sætningen

Sætning 4.10

Hvis en linje er givet ved ligningen

$$ax+by+c=0\ ,$$

hvor $b \neq 0$, kan den omskrives til

$$y=\alpha x+\beta$$

hvor $\alpha=-\frac{a}{b}$ er hældningskoefficienten, og $\beta=-\frac{c}{b}$ er skæringen med andenaksen.

Hvis $b=0$, er linjen parallel med andenaksen, og ligningen kan ikke omskrives til denne form.

Vha. en omskrivning mellem de to former for linjens ligning kan man komme frem til følgende sætning om ortogonale linjer:

Sætning 4.11

De to linjer l og m med ligningerne

$$\begin{aligned} l:&\quad y=\alpha_1 x+\beta_1 \\ m:&\quad y=\alpha_2 x+\beta_2 \end{aligned}$$

er ortogonale netop når $\alpha_1\alpha_2=-1$.

Bevis
De to ligninger omskrives til formen $ax+by+c=0$:

$$\begin{aligned} l:&\quad \alpha_1 x-y+\beta_1=0 \\ m:&\quad \alpha_2 x-y+\beta_2=0\ . \end{aligned}$$

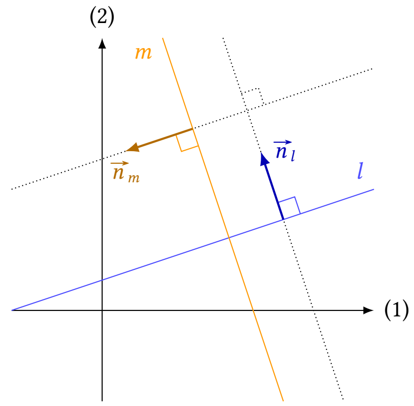
Det ses nu at normalvektorerne for de to linjer er

$$\vec{n}_l=\begin{pmatrix}\alpha_1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{n}_m=\begin{pmatrix}\alpha_2\\-1\end{pmatrix}\ .$$

Hvis de to linjer er ortogonale, så er deres normalvektorer også ortogonale (se figur 4.4), dvs.

$$\begin{aligned} \vec{n}_l \bullet \vec{n}_m &= 0 &\Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -1 \end{pmatrix} &= 0 &\Leftrightarrow \\ \alpha_1\alpha_2 + (-1)\cdot(-1) &= 0 &\Leftrightarrow \\ \alpha_1\alpha_2 + 1 &= 0 &\Leftrightarrow \\ \alpha_1\alpha_2 &= -1\ . \end{aligned}$$

Hvis man omvendt ved at $\alpha_1\alpha_2 = -1$, kan man udføre ovenstående omskrivning baglæns og nå frem til at normalvektorerne er ortogonale, og så er linjerne det også. ■



Figur 4.4: Hvis to linjer er ortogonale, så er deres normalvektorer også ortogonale.

Eksempel 4.12 Her bestemmes den linje m gennem $(8,1)$ der står vinkelret på linjen

$$l: \quad y = -4x + 3\ .$$

Hvis de to linjer er ortogonale, så er produktet af deres hældningskoefficienter -1. Kaldes hældningskoefficienten for m for α, så gælder der altså

$$\alpha \cdot (-4) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{4}\ .$$

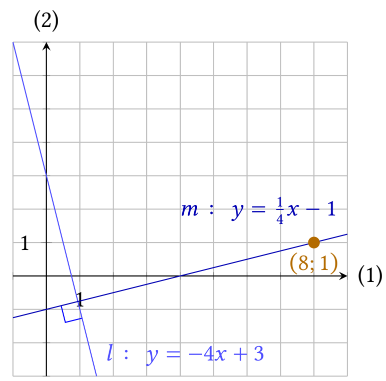
Da linjen m går gennem punktet $(8,1)$, har linjen derfor ligningen

$$y = \tfrac{1}{4}(x-8) + 1$$

som reduceres til

$$m: \quad y = \tfrac{1}{4}x - 1\ .$$

De to linjer og punktet kan ses på figur 4.5.



Figur 4.5: De to linjer l og m er ortogonale.

4.3 Afstanden fra et punkt til en linje

Hvis man har en linje i planen og et punkt der ikke ligger på linjen, kan det være nyttigt at beregne hvor langt punktet ligger fra linjen. Afstanden måles her altid som den *korteste* afstand fra punktet til linjen. Der gælder da følgende sætning:

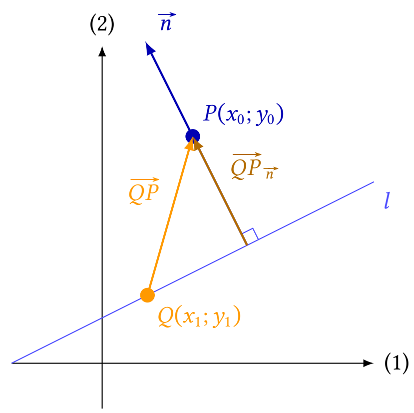
Sætning 4.13

Afstanden fra punktet $P(x_0, y_0)$ til linjen $l: \ ax + by + c = 0$ er

$$\mathrm{dist}(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ .$$

Bevis

På figur 4.6 ses linjen l og punktet P. Samtidig er der indtegnet en normalvektor $\vec{n}$ og et tilfældigt punkt $Q(x_1, y_1)$ på linjen.



Figur 4.6: Afstanden fra punktet til linjen kan findes som længden af vektoren $\overrightarrow{QP}_{\vec{n}}$.

Hvis man projicerer vektoren $\overrightarrow{QP}$ på normalvektoren $\vec{n}$, får man en vektor $\overrightarrow{QP}_{\vec{n}}$ hvis længde er den søgte afstand. Vha. sætning 3.3 kan man nu beregne længden af denne vektor. Man får

$$\operatorname{dist}(P,l) = \left|\overrightarrow{QP}_{\vec{n}}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{QP}\bullet\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} . \tag{4.4}$$

Fordi linjen har ligningen $ax+by+c=0$, og punkterne har koordinaterne $P(x_0,y_0)$ og $Q(x_1,y_1)$, har man

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix} .$$

Indsætter man det i ligningen (4.4), får man

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(P,l) &= \frac{\left|\begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|} \\ &= \frac{|(x_0-x_1)a+(y_0-y_1)b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \frac{|ax_0+by_0-ax_1-by_1|}{\sqrt{a^2+b^2}} . \end{aligned}$$

Punktet $Q(x_1,y_1)$ ligger på linjen, dvs. der gælder

$$ax_1+by_1+c=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad c=-ax_1-by_1 ,$$

og derfor bliver afstanden

$$\operatorname{dist}(P,l) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

■

Eksempel 4.14 Afstanden fra punktet $P(3,1)$ til linjen

$$l : \quad 5x+12y-6=0$$

kan findes vha. sætning 4.13. Koordinaterne $x_0=3$, $y_0=1$ og konstanterne $a=5$, $b=12$ og $c=-6$ sættes ind i formlen:

$$\operatorname{dist}(P,l) = \frac{|5\cdot 3+12\cdot 1-6|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{|21|}{\sqrt{169}} = \frac{21}{13} .$$

Eksempel 4.15 De to linjer

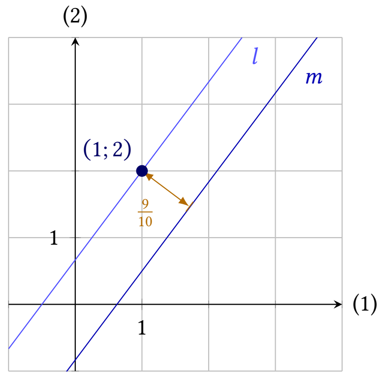
$$\begin{aligned} l &: \quad 4x-3y+2=0 \\ m &: \quad 8x-6y-5=0 \end{aligned}$$

er parallelle. Det kan man se fordi de to normalvektorer

$$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{n}_m = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

er parallelle ($\vec{n}_m = 2\vec{n}_l$). De to linjer ligger altså med en fast afstand fra hinanden.

Denne afstand kan også bestemmes vha. sætning 4.13. Det kan gøres ved at finde et punkt på den ene linje og bestemme afstanden fra dette punkt til den anden linje (se figur 4.7).



Figur 4.7: Afstanden fra l til m er lig afstanden fra et punkt på l til m.

Hvis man sætter $x = 1$, får man for linjen l at

$$4 \cdot 1 - 3y + 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 2\ .$$

Linjen l går derfor gennem punktet $(1, 2)$. Dette punkt anvendes i formlen sammen med konstanterne fra ligningen m, og man får så

$$\operatorname{dist}\big((1;2), m\big) = \frac{|8 \cdot 1 - 6 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}\ .$$

Afstanden mellem de to linjer er altså $\frac{9}{10}$.

4.4 Øvelser

Øvelse 4.1
Bestem afstanden mellem

a) $A(8, 3)$ og $B(2, 9)$,
b) $P(-4, 0)$ og $Q(5, -7)$.

Øvelse 4.2
Opstil en parameterfremstilling for den linje der har retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og går gennem punktet $P(9, 2)$.

Øvelse 4.3
Opstil en parameterfremstilling for den linje der går gennem punkterne

a) $A(-5, 3)$ og $B(1, 9)$,
b) $P(4, 7)$ og $Q(5, -3)$.

Øvelse 4.4
Opstil en parameterfremstilling for den linje der går gennem $P(7, 2)$ og har $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ som normalvektor.

Øvelse 4.5
To linjer l og m er givet ved parameterfremstillingerne

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

og

$$m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}\ .$$

a) Bestem skæringspunktet mellem de to linjer.

Øvelse 4.6
Linjen l er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

a) Bestem en parameterfremstilling for linjen m der går gennem $P(11, 5)$ og står vinkelret på l.
b) Bestem skæringspunktet mellem l og m.

Øvelse 4.7
Bestem en ligning for linjen gennem $P(8,2)$ med normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Øvelse 4.8
Linjen l er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestem en ligning for linjen m der går gennem $P(7,0)$ og står vinkelret på l.

b) Bestem skæringspunktet mellem l og m.

Øvelse 4.9
Omskriv følgende linjers ligninger til formen $y = \alpha x + \beta$ hvis det er muligt.

a) $3x - 6y + 12 = 0$

b) $-2x + y - 3 = 0$

c) $4x - 20 = 0$

d) $5x - 3y + 9 = 0$.

Øvelse 4.10
Linjen m står vinkelret på linjen l der er givet ved ligningen

$$l: \quad y = 4x - 5.$$

a) Bestem hældningskoeffienten for m.

Linjen m går gennem punktet $(0,15)$.

b) Bestem en ligning for m.

c) Bestem skæringspunktet mellem m og l.

Øvelse 4.11
Bestem afstanden fra punktet P til linjen l når

a) $P(4,5)$ og $l: \ 3x - 4y + 2 = 0$

b) $P(-1,0)$ og $l: \ 13x + 5y - 24 = 0$

c) $P(9,2)$ og $l: \ 5x - 2y = 6$

5 Cirkler

En cirkel beskrives nedenfor som alle de punkter der ligger på cirkelperiferien. Fælles for alle disse punkter er at de har samme afstand (radius) til ét bestemt punkt (centrum). Dette kan man bruge til at opstille en ligning for cirklen:

Sætning 5.1

Cirklen med centrum i $C(x_0, y_0)$ og radius r har ligningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \ .$$

Bevis
Cirklen består af alle de punkter $P(x, y)$, som har afstanden r til centrum, dvs. $|CP| = r$. Men ifølge sætning 4.1 er

$$|CP| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \ ,$$

dvs.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= r \qquad \Leftrightarrow \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2 \ . \end{aligned}$$

■

Eksempel 5.2 Cirklen med radius $r = 5$ og centrum i $C(4, -1)$ har ligningen

$$\begin{aligned} (x - 4)^2 + (y - (-1))^2 &= 5^2 \qquad \Leftrightarrow \\ (x - 4)^2 + (y + 1)^2 &= 25 \ . \end{aligned}$$

Ligningen kan reduceres yderligere ved at gange parenteserne ud. Man får så

$$\begin{aligned} x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + y^2 + 1^2 + 2 \cdot y \cdot 1 &= 25 \qquad \Leftrightarrow \\ x^2 + 16 - 8x + y^2 + 1 + 2y &= 25 \qquad \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Eksempel 5.3 Ligningen

$$x^2 + y^2 - 6x + 14y + 42 = 0$$

er ligningen for en cirkel. Hvis man vil finde centrum og radius for cirklen, bliver man nødt til at skrive ligningen om så den får samme form som ligningen i sætning 5.1.

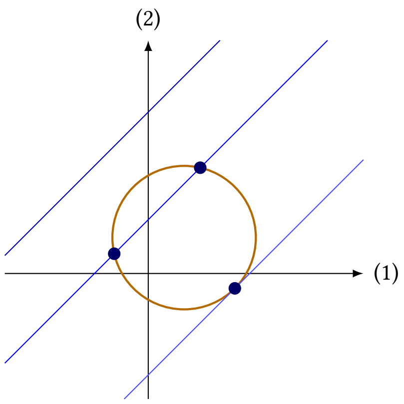
For at gøre det skal leddene x^2 og $-6x$ skrives om til kvadratet på en toleddet størrelse. Det samme gælder for y^2 og $14y$. Hvis x^2 og $-6x$ kommer af kvadratet på en toleddet størrelse, så er $-6x$ det dobbelte produkt. Det giver derfor mening at beregne

$$(x-3)^2 = x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 = x^2 + 9 - 6x \ ,$$

Her kan man se at $x^2 - 6x$ kan omskrives til $(x-3)^2 - 9$. På samme måde kan man vise at $y^2 + 14y = (y+7)^2 - 49$. Derfor kan cirklens ligning omskrives på følgende måde

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 14y + 42 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ x^2 - 6x + y^2 + 14y + 42 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ (x-3)^2 - 9 + (y+7)^2 - 49 + 42 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ (x-3)^2 + (y+7)^2 = 16 \quad &\Leftrightarrow \\ (x-3)^2 + (y-(-7))^2 = 4^2 \ . & \end{aligned}$$

Når ligningen nu står på denne form, kan man direkte aflæse at radius er $r = 4$, og centrum er $C(3, -7)$.



Figur 5.1: En linje kan skære en cirkel 0, 1 eller 2 steder.

5.1 Skæringspunkter mellem cirkler og linjer

En cirkel og en linje kan have 0, 1 eller 2 skæringspunkter, se figur 5.1. Hvis cirklen og linjen har præcist ét punkt fælles, er linjen en tangent til cirklen. Hvor mange skæringspunkter der er mellem cirklen og linjen, kan man finde ud af ved at bestemme afstanden mellem cirklens centrum og linjen. Hvis afstanden fra centrum til linjen er præcis lig med radius, så er linjen en tangent. Hvis afstanden er mindre end radius, er der to skæringspunkter, og hvis afstanden er større end radius, er der ingen skæringspunkter mellem cirklen og linjen.

Eksempel 5.4 Her bestemmes det om der er skæringspunkter mellem linjen med ligningen

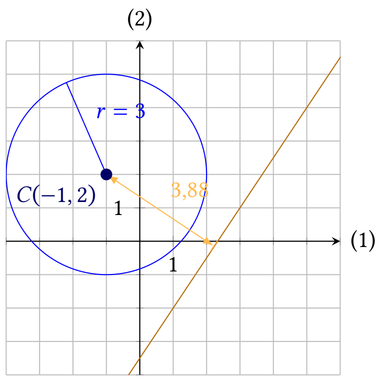
$$3x - 2y - 7 = 0$$

og cirklen med ligningen

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 \ .$$

Cirklens centrum er $C(-1, 2)$ og dens radius er $r = \sqrt{9} = 3$. Afstanden fra centrum til l er

$$\mathrm{dist}(C, l) = \frac{|3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 - 7|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{13}} = \frac{14}{\sqrt{13}} \approx 3{,}88 \ .$$



Figur 5.2: Afstanden fra centrum til linjen er større end radius.

Da afstanden fra centrum til linjen er større end radius, har linjen og cirklen ingen skæringspunkter (se figur 5.2).

Eksempel 5.5 Linjen med ligningen

$$x - 3y + 2 = 0$$

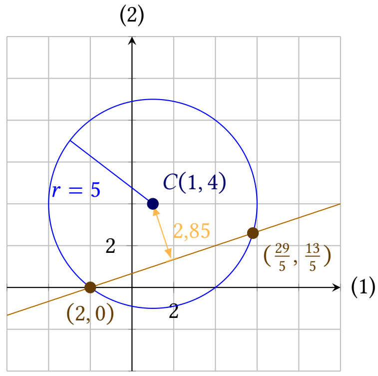
og cirklen med ligningen

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 25$$

har to skæringspunkter. Det ses af at afstanden fra cirklens centrum $C(1,4)$ til linjen er

$$\operatorname{dist}(C,l) = \frac{|1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{1+9}} = \frac{9}{\sqrt{10}} \approx 2{,}85$$

som er mindre end cirklens radius $r = \sqrt{25} = 5$ (se figur 5.3).



Figur 5.3: Afstanden fra centrum til linjen er mindre end radius.

Eksempel 5.6 Linjen og cirklen i eksempel 5.5 skærer hinanden to steder. Her bestemmes de to skæringspunkter (se figur 5.3).

Først omskrives linjens ligning

$$x - 3y + 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 3y - 2\ .$$

Denne værdi for x sættes ind i cirklens ligning som bliver til

$$(3y - 2 - 1)^2 + (y-4)^2 = 25\ .$$

Dette er en andengradsligning. Man kan løse den vha. et CAS-værktøj hvorved man får

$$y = 0 \quad \vee \quad y = \frac{13}{5}\ .$$

De to skæringspunkter har disse værdier af y. Værdien af x kan beregnes ud fra linjens ligning:

$$\begin{aligned} y = 0 &: \quad x = 3 \cdot 0 - 2 = -2 \\ y = \frac{13}{5} &: \quad x = 3 \cdot \frac{13}{5} - 2 = \frac{39}{5} - \frac{10}{5} = \frac{29}{5}\ . \end{aligned}$$

Linjen skærer altså cirklen i de to punkter $(-2,0)$ og $(\frac{29}{5}; \frac{13}{5})$.

Hvis en linje er givet ved en parameterfremstilling, kan man ikke uden videre beregne afstanden fra linjen til en cirkels centrum. Er man interesseret i dette, skal man altså først skrive parameterfremstillingen om til en ligning (se eksempel 4.9).

Men er man blot interesseret i skæringspunkterne mellem linjen og cirklen er dette ikke nødvendigt. Her kan man i stedet udnytte parameterfremstillingens koordinatfunktioner.

Eksempel 5.7 Hvis en linje er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\ , \quad t \in \mathbb{R}\ ,$$

og en cirkel er givet ved ligningen

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 18\ ,$$

kan man finde skæringspunkterne ved at sætte linjens koordinatfunktioner

$$x = 3 + 2t \quad \text{og} \quad y = 5 - t$$

ind i cirklens ligning. De to udtryk for x og y sættes ind i ligningen:

$$\begin{aligned}
(\overbrace{3 + 2t}^{x} - 2)^2 + (\overbrace{5 - t}^{y} - 1)^2 &= 18 \quad \Leftrightarrow \\
(1 + 2t)^2 + (4 - t)^2 &= 18 \quad \Leftrightarrow \\
1 + 4t^2 + 4t + 16 + t^2 - 8t &= 18 \quad \Leftrightarrow \\
5t^2 - 4t + 17 &= 18 \quad \Leftrightarrow \\
5t^2 - 4t - 1 &= 0 \ .
\end{aligned}$$

Løser man ligningen vha. et CAS-værktøj, finder man løsningerne

$$t = -\tfrac{1}{5} \quad \vee \quad t = 1 \ .$$

Man ved altså nu at der er to skæringspunkter idet de to løsninger er de værdier af parameteren t der svarer til skæringspunkterne. For at finde punkterne skal man sætte disse værdier af t ind i linjens parameterfremstilling:

$$\begin{aligned}
t = -\tfrac{1}{5} \ : \quad & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(-\tfrac{1}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{26}{5} \end{pmatrix} \\
t = 1 \ : \quad & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \ .
\end{aligned}$$

Linjen skærer altså cirklen i punkterne $\left(\frac{13}{5}, \frac{26}{5}\right)$ og $(5, 4)$.

5.2 Cirkeltangenter

En tangent til en cirkel er en linje der kun har ét punkt fælles med cirklen. Dette punkt kaldes *røringspunktet*. Derudover vil en tangent til en cirkel altid stå vinkelret på linjen gennem centrum og røringspunktet.

Som omtalt ovenfor kan man bestemme om en given linje er en tangent ved at beregne afstanden fra linjen til cirklens centrum. Afstanden fra centrum til en tangent er nemlig lig med radius. Alternativt kan man bestemme om en linje givet ved en parameterfremstilling er en tangent ved at bestemme antallet af skæringspunkter (se eksempel 5.7).

I de følgende eksempler vises hvordan man kan *konstruere* bestemte tangenter hvis man kender enten et punkt eller en hældning.

Eksempel 5.8 Punktet $P(5, -7)$ ligger på cirklen givet ved ligningen

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25 \ .$$

Her bestemmes en ligning til den tangent til cirklen der har dette punkt som røringspunkt.

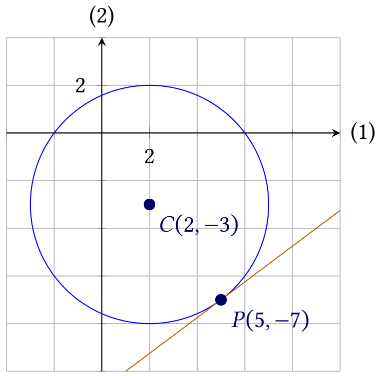
Cirklens centrum er $C(2, -3)$. Den søgte tangent står vinkelret på linjestykket CP, dvs. vektoren $\overrightarrow{CP}$ kan bruges som normalvektor for linjen:

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ -7-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Da man nu kender et punkt, $P(5, -7)$, som linjen går igennem, og en normalvektor, $\overrightarrow{CP}$, kan linjens ligning skrives op vha. sætning 4.7:

$$\begin{aligned} 3(x-5) + (-4) \cdot (y - (-7)) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \\ 3x - 4y - 43 = 0 \ . \end{aligned}$$

Cirklen og tangenten kan ses på figur 5.4.



Figur 5.4: Cirklens tangent gennem det givne punkt $P(5, -7)$.

Eksempel 5.9 Her bestemmes røringspunkterne for de tangenter til cirklen

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

der er parallelle med linjen l med ligningen

$$l : \quad 4x - 3y + 30 = 0 \ .$$

Cirklen må have to tangenter der er parallelle med den givne linje. En linje gennem de to røringspunkter må gå gennem centrum og stå vinkelret på linjen l. Idet den står vinkelret på l, kan man finde en parameterfremstilling for linjen ved at bruge en normalvektor for l som retningsvektor. Dvs.

$$\vec{r} = \vec{n}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Man ved at linjen gennem røringspunkterne går gennem centrum $C(2, 1)$. Dette punkt giver sammen med retningsvektoren parameterfremstillingen

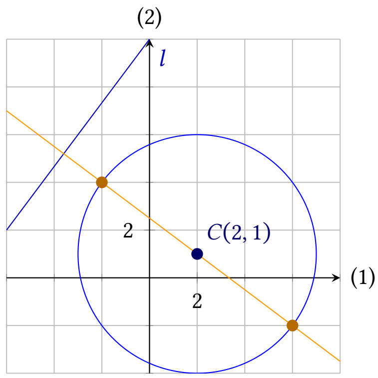
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \ , \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

Skæringspunkterne mellem denne linje og cirklen vil være de søgte røringspunkter (se figur 5.5). Disse skæringspunkter kan bestemmes på samme måde som i eksempel 5.7 vha. linjens koordinatfunktioner

$$x = 2 + 4t \qquad \text{og} \qquad y = 1 - 3t$$

som sættes ind i cirklens ligning:

$$\begin{aligned} (2 + 4t - 2)^2 + (1 - 3t - 1)^2 &= 25 \qquad \Leftrightarrow \\ (4t)^2 + (-3t)^2 &= 25 \qquad \Leftrightarrow \\ 16t^2 + 9t^2 &= 25 \qquad \Leftrightarrow \\ 25t^2 &= 25 \qquad \Leftrightarrow \\ t^2 &= 1 \qquad \Leftrightarrow \\ t = -1 \quad &\vee \quad t = 1 \ . \end{aligned}$$



Figur 5.5: Røringspunkterne for de cirkeltangenter der er parallelle med linjen l.

De to værdier af parameteren t kan nu sættes ind i parameterfremstillingen, og man får

$$\begin{aligned} t = -1 &: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ t = 1 &: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

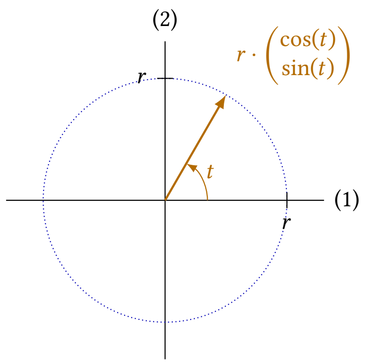
De to tangenter der er parallelle med l, rører altså cirklen i punkterne $(-2,4)$ og $(6,-2)$. Hvis man vil finde ligningerne for tangenterne, kan dette gøres på samme måde som i eksempel 5.8.

5.3 Cirklens parameterfremstilling

Som afslutning på dette kapitel vises hvordan cirkler også kan beskrives ved parameterfremstillinger.

Vektoren med længde r og retningsvinkel t har koordinaterne $r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Denne vektor er stedvektor for et punkt på cirklen med radius r og centrum i $(0,0)$. Hvis vinklen t løber fra -180° til 180°, får man beskrevet alle punkterne på cirkelperiferien. Dvs. denne cirklen kan beskrives ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} , \quad -180^\circ < t \leq 180^\circ .$$



Figur 5.6: Parametrisering af cirklen med radius r og centrum $(0;0)$.

Skal man udlede en parameterfremstilling for en cirkel med centrum i (x_0, y_0) i stedet for $(0,0)$, skal man blot lægge retningsvektoren for dette punkt til parameterfremstillingen, og man får derved den følgende sætning.

Sætning 5.10

Cirklen med centrum i $C(x_0, y_0)$ og radius r kan beskrives ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix} , \quad -180^\circ < t \leq 180^\circ .$$

Dette er ikke den eneste mulighed for en parameterfremstilling for cirklen. I virkeligheden vil enhver parameterfremstilling af typen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

kunne bruges. En parameterfremstilling som denne bruges til at beskrive et punkt der bevæger sig rundt i en jævn cirkelbevægelse. Størrelsen af konstanten ω hænger sammen med hvor hurtigt punktet bevæger sig rundt på cirklen.

5.4 Øvelser

Øvelse 5.1
Opstil en ligning for cirklen med centrum i C og radius r, når

a) $C(1,4)$ og $r = 2$
b) $C(0,6)$ og $r = 7$
c) $C(-3,7)$ og $r = 1$

Øvelse 5.2
Bestem centrum og radius for cirklerne givet ved følgende ligninger:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 23$
b) $x^2 + y^2 + 2x = 24$
c) $x^2 + y^2 + 8x + 4y = 61$

Øvelse 5.3
Bestem antallet af skæringspunkter mellem linjen l givet ved ligningen

$$l: \quad 4x - 7y + 8 = 0$$

og cirklen givet ved ligningen

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 16 .$$

Øvelse 5.4
Bestem skæringspunkterne mellem linjen l givet ved ligningen

$$l: \quad x + y = 6$$

og cirklen givet ved ligningen

$$(x-3)^2 + (x-2)^2 = 13 .$$

Øvelse 5.5
Bestem skæringspunkterne mellem linjen l givet ved parameterfremstillingen

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

og cirklen givet ved ligningen

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 25 .$$

Øvelse 5.6
Cirklen med ligningen

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

går gennem de tre punkter $A(-2,6)$, $B(2,8)$ og $C(7,3)$.

a) Bestem en ligning for tangenten til cirklen i hver af disse punkter.

Øvelse 5.7
Cirklen med ligningen

$$(x-5)^2 + (y+1)^2 = 169 ,$$

har to tangenter der er parallelle med linjen med ligningen

$$-12x + 5y + 10 = 0 .$$

a) Bestem røringspunkterne for disse tangenter.
b) Bestem en ligning for hver af tangenterne.

6 Trekanter

En trekant kan beskrives ud fra de tre punkter der udgør hjørnerne i trekanten. Trekanten ABC er således den trekant der har hjørner i de tre punkter A, B og C. Den side i trekanten der går fra punkt A til B, kan så kaldes AB. Længden af siden AB betegnes med $|AB|$.

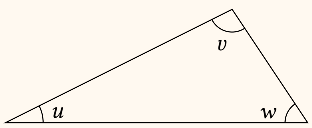
Det er her værd at bemærke at $|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, altså at længden af siden AB er det samme som længden af vektoren fra A til B. Hvis man kender koordinaterne for de tre punkter A, B og C, kan man altså beregne sidernes længder.

I en trekant er der tre vinkler. Størrelsen af disse kan også beregnes ud fra vektorer. Først vil vi dog se på nogle – forhåbentligt velkendte – egenskaber ved trekanter.

Sætning 6.1

Summen af vinklerne i en trekant er 180°:

$$u + v + w = 180^\circ \ .$$



Fra hvert hjørne i en trekant kan man tegne følgende tre linjer:

Medianen som er en linje fra en vinkelspids til *midten* af den modstående side.

Vinkelhalveringslinjen som går fra en vinkelspids til den modstående side, sådan at den *halverer vinklen*.

Højden der går fra en vinkelspids *vinkelret* på den modstående side. Hvis trekanten er stumpvinklet,[1] kan højden ligge uden for trekanten.

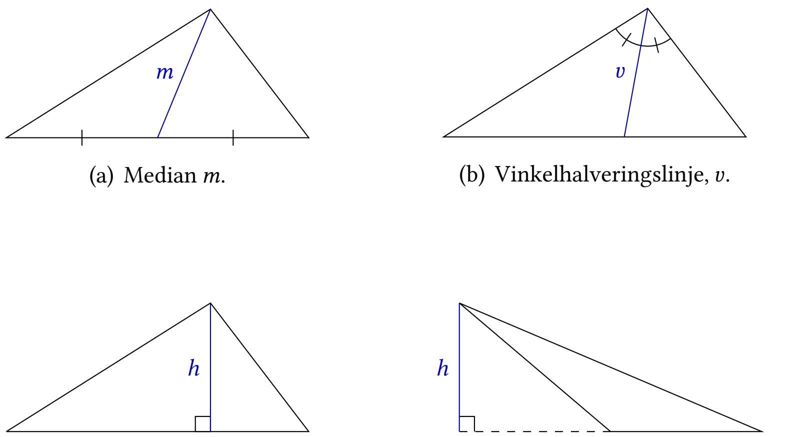
Disse tre typer af linjer er illustreret på figur 6.1.

En højde står som sagt vinkelret på den modstående side. Den side som højden står vinkelret på, kalder man *grundlinjen*,[2] og den kan bruges sammen med højden til at beregne en trekants areal.

Der gælder følgende meget kendte sætning om sammenhængen mellem en trekants areal, dens højde og grundlinje:

[1] En trekant kaldes *stumpvinklet* hvis en af vinklerne er stump, dvs. større end 90°.

[2] Da en trekant har tre højder, så er der derfor heller ikke én grundlinje. Hvilken side man vælger at kalde grundlinje, afhænger af hvilken højde man vælger at se på.



(a) Median m.

(b) Vinkelhalveringslinje, v.

(c) Højde, h.

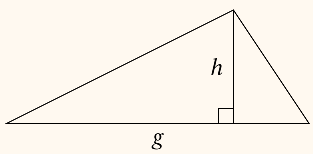
(d) Højde der falder uden for trekanten.

Figur 6.1: Hvert hjørne i en trekant har tilknyttet en median, en vinkelhalveringslinje og en højde. Bemærk at en højde kan ligge uden for trekanten.

Sætning 6.2

Arealet T af en trekant er det halve af en af højderne ganget med den længden af den tilhørende grundlinje:

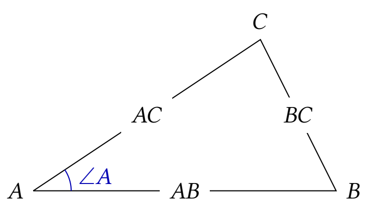
$$T = \tfrac{1}{2} \cdot h \cdot g\ .$$



6.1 Notation

Når man skal tale om siderne og vinklerne i en trekant, er det vigtigt at man har en notation som entydigt forklarer hvad man taler om.

Man følger den konvention der er illustreret på figur 6.2: Den vinkel der ligger ved punktet A, kaldes $\angle A$ osv., og siderne benævnes ved de punkter de går mellem.

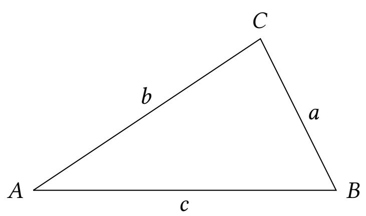


Figur 6.2: Sider og vinkler i $\triangle ABC$.

Nogle gange benævner man også sidernes længder ud fra det punkt de ligger *overfor*. Længden af siden over for punkt A benævnes så med a osv., sådan at

$$a = |BC|\ , \quad b = |AC|\ , \quad c = |AB|\ .$$

Dette ses på figur 6.3.

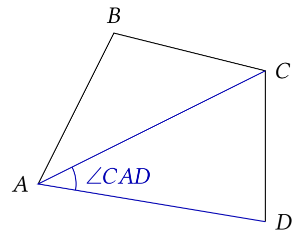


Figur 6.3: $\triangle ABC$ hvor sidelængderne benævnes a, b og c.

Notationen hvor man bruger små bogstaver som navne til sidelængderne, duer i princippet kun hvis man har én trekant at kigge på. Hvis man har en mere kompliceret figur med flere punkter end tre, kan der nemlig være flere sider der kan siges at ligge over for et bestemt punkt – notationen med små bogstaver bliver da ikke længere entydig. I den situation vil det være fornuftigst skrive sidelængderne som $|AB|$, $|BC|$ osv.

Hvis man har en figur med mere end tre punkter, kan der også nogle gange opstå en situation hvor det ikke er entydigt at benævne en vinkel med ét bogstav, f.eks. $\angle A$. I disse situationer benævner man i stedet en vinkel vha.

3 bogstaver. $\angle CAD$ er f.eks. den vinkel man får tegnet op når man tegner fra punkt C til punkt A til punkt D (se figur 6.4).



Figur 6.4: $\angle A$ kan være 3 forskellige vinkler på denne figur; derfor kalder man den markerede vinkel $\angle CAD$.

6.2 Ensvinklede trekanter

To trekanter hvor vinklerne er parvis lige store, kaldes *ensvinklede*, dvs.

Definition 6.3

Hvis der for to trekanter ABC og $A'B'C'$ gælder at

$$\angle A' = \angle A, \quad \angle B' = \angle B \quad \text{og} \quad \angle C' = \angle C\ ,$$

så kaldes de to trekanter *ensvinklede*.

Hvis to trekanter er ensvinklede, vil den ene være en forstørret eller formindsket kopi af den anden. Der gælder følgende sætning.

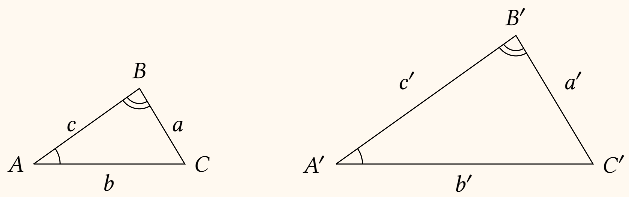
Sætning 6.4

Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle A'B'C'$ er ensvinklede med

$$\angle A' = \angle A, \quad \angle B' = \angle B \quad \text{og} \quad \angle C' = \angle C\ ,$$

så er forholdet mellem længderne af de ensliggende[3] sider ens, dvs.

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}\ .$$



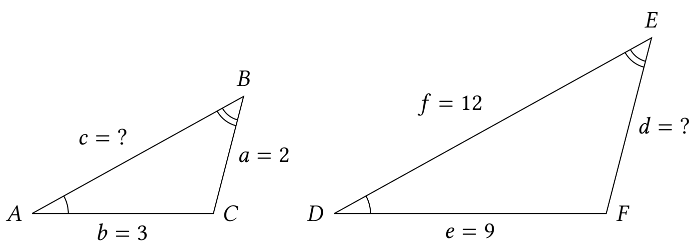
[3]To sider er *ensliggende* når de ligger mellem to ens vinkler.

Eksempel 6.5 Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er ensvinklede, sådan at

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \text{og} \angle C = \angle F\ ,$$

og man tillige ved at $a = 2$, $b = 3$, $e = 9$ og $f = 12$, så kan man beregne de resterende sidelængder.

Først tegner man en skitse (den behøver ikke være målfast) for at få et overblik:



Herefter ser man på forholdet mellem de ensliggende siders længder. I dette tilfælde er

$$\frac{d}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f}{c} \ .$$

Indsætter man de kendte værdier, får man

$$\frac{d}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{c} \ .$$

Dvs.

$$\frac{d}{2} = \frac{9}{3} \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{9}{3} \cdot 2 = 6 \ ,$$

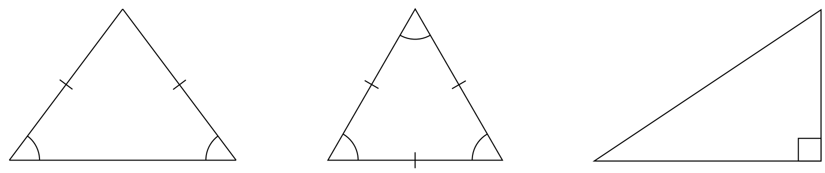
og

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{12} = \frac{3}{9} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{3}{9} \cdot 12 = 4 \ .$$

Nu kender man altså alle sidelængderne i de to trekanter.

6.3 Retvinklede trekanter

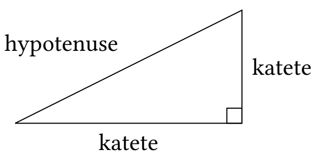
Der findes tre typer af trekanter som det er vigtigt at kende navnene på. Det er *ligebenede* trekanter, *ligesidede* trekanter og *retvinklede* trekanter. Disse er illustreret på figur 6.5.



(a) En ligebenet trekant (b) En ligesidet trekant. (c) En retvinklet trekant.

Figur 6.5: I en ligebenet trekant er to af siderne lige lange, i en ligesidet er alle sider lige lange, og i en retvinklet trekant er den ene vinkel ret.

I en retvinklet trekant har siderne også specielle navne. Den side der ligger over for den rette vinkel, kaldes *hypotenusen*, mens de to andre sider kaldes *kateter* (se figur 6.6).



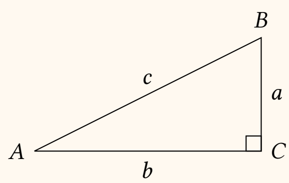
Figur 6.6: Siderne i en retvinklet trekant.

For retvinklede trekanter gælder der følgende sætning.

Sætning 6.6: Pythagoras' sætning

I en retvinklet trekant ABC hvor $\angle C$ er den rette vinkel, gælder der at

$$a^2 + b^2 = c^2 \ .$$



Hvis man i stedet for at referere til en konkret trekant ABC bruger de navne siderne i en retvinklet trekant har, kan Pythagoras' sætning også udtrykkes på følgende måde:

Sætning 6.7: Pythagoras' sætning

I en retvinklet trekant er summen af kvadraterne på kateterne lig kvadratet på hypotenusen,[4] dvs.

$$(\text{første katete})^2 + (\text{anden katete})^2 = (\text{hypotenusen})^2 \ .$$

[4] *Kvadratet på ...* betyder »opløftet i 2. potens«. *Kvadratet på a* betyder f.eks. a^2.

Eksempel 6.8 Hvis man om en retvinklet trekant ved at den ene katete har længden 5, og hypotenusen har længden 13, kan man beregne længden af den sidste katete vha. Pythagoras' sætning.

Længden af den sidste katete kan man kalde x. Sætter man de oplyste værdier ind i Pythagoras' sætning, får man ligningen

$$5^2 + x^2 = 13^2 \ .$$

Dvs.

$$x^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \ .$$

Længden af den sidste katete er så

$$x = \sqrt{144} = 12 \ .$$

Tegner man en vilkårlig retvinklet trekant, kan man se hypotenusen som en vektor $\vec{c}$. Dette kan sammenlignes med den samme retvinklede trekant hvor sidelængderne kaldes a, b og c (se figur 6.7). Denne sammenligning giver de to ligninger

$$a = c \cdot \sin(\angle A) \quad \text{og} \quad b = c \cdot \cos(\angle A) \ .$$

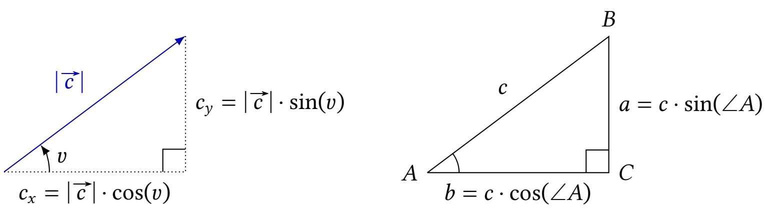
Disse kan omskrives til

$$\sin(\angle A) = \frac{a}{c} \quad \text{og} \quad \cos(\angle A) = \frac{b}{c} \ .$$

Ud fra dette kan man også finde en formel for $\tan(\angle A)$ idet

$$\tan(\angle A) = \frac{\sin(\angle A)}{\cos(\angle A)} = \frac{a}{c} \Big/ \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \ .$$

Alt dette kan opsummeres i følgende sætning:



(a) Vektor $\vec{c}$ som hypotenuse.

(b) Sidelængder a, b og c.

Figur 6.7: En vektor kan afbildes som hypotenusen i en retvinklet trekant. Heraf kan man udlede en sammenhæng mellem sidernes længder og hhv. cos og sin til vektorens retningsvinkel.

Sætning 6.9

I en retvinklet trekant ABC hvor $\angle C$ er den rette vinkel, er

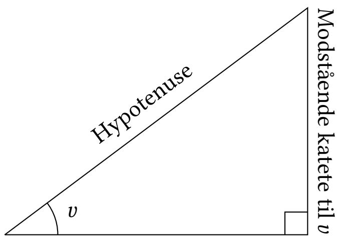
$$\sin(\angle A) = \frac{a}{c}\,, \quad \cos(\angle A) = \frac{b}{c} \quad \text{og} \quad \tan(\angle A) = \frac{a}{b}\,.$$

Nu er det jo ikke alle trekanter der hedder ABC. Sætning 6.9 skrives derfor også nogle gange op på følgende måde:

Sætning 6.10

I en retvinklet trekant hvor v er én af de spidse vinkler, er

$$\begin{aligned}\sin(v) &= \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}\,,\\ \cos(v) &= \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}\,,\\ \tan(v) &= \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}\,.\end{aligned}$$

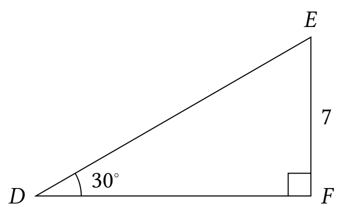


Figur 6.8: Sidernes navne i forhold til den spidse vinkel v.

Betegnelserne »modstående« og »hosliggende« katete henviser til om kateten ligger over for (modstående) eller op til (hosliggende) vinklen. Se også figur 6.8.

Vha. formlerne i sætning 6.10 er det muligt at beregne alle sider og vinkler i en retvinklet trekant hvis blot man kender mindst én side og enten en af de spidse vinkler eller en side mere.

Eksempel 6.11 I en retvinklet trekant DEF er $\angle D = 30^\circ$ og $|EF| = 7$. En skitse af trekanten ser således ud:



Siden EF er den modstående katete til $\angle D$, og DE er hypotenusen, så ifølge sætning 6.10 er

$$\sin(30^\circ) = \frac{7}{|DE|}\,.$$

Denne ligning løses, og man får

$$|DE| = \frac{7}{\sin(30^\circ)} = 14\,.$$

Den sidste side kan nu bestemmes vha. Pythagoras' sætning, og den sidste vinkel bestemmes ud fra at vinkelsummen i en trekant er 180°.

Eksempel 6.12 Hvis man skal bestemme længden af kateten DF i trekanten fra eksempel 6.11, kan dette gøres ved at benytte tangens.

Siden DF er den hosliggende katete til $\angle D$, og EF er den modstående. Man får så ifølge sætning 6.10 at

$$\tan(30^\circ) = \frac{7}{|DF|} \ .$$

Løser man denne ligning, får man

$$|DF| = \frac{7}{\tan(30^\circ)} = 12{,}1 \ .$$

6.4 Arealet af en trekant

I dette afsnit og det næste anvendes vektorgeometri til at udlede nogle sætninger om trekanter. Først ses på hvordan determinanten af to vektorer kan bruges til at bestemme en trekants areal.

Hvis en trekant har hjørner i punkterne A, B og C, vil dens areal være halvdelen af arealet af det parallelogram der er udspændt af vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Man kan derfor ud fra sætning 3.15 komme frem til følgende sætning, der omhandler arealet af trekanter:

Sætning 6.13

Trekanten med hjørner i punkterne A, B og C har arealet

$$T = \tfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| \ .$$

Eksempel 6.14 En trekant har hjørner i punkterne $A(-1,3)$, $B(0,5)$ og $C(7,2)$. Arealet af denne trekant kan bestemmes vha. sætning 6.13.

Først beregnes koordinaterne til vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Man får

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7-(-1) \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \ .$$

Arealet af trekant ABC kan nu beregnes:

$$T = \tfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 8 \\ 2 & -1 \end{matrix}\right\| = \tfrac{1}{2}\left|1\cdot(-1) - 2\cdot 8\right| = \tfrac{1}{2}\left|-17\right| = \tfrac{17}{2} \ .$$

Arealet af trekant ABC er altså $\frac{17}{2}$.

Sætning 6.13 giver i kombination med definition 3.14 at arealet af en trekant ABC er

$$T = \tfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\sin(v)\right| \ , \tag{6.1}$$

hvor v er vinklen fra $\overrightarrow{AB}$ til $\overrightarrow{AC}$. Hvis trekantens sidelængder kaldes a, b og c, kan (6.1) omskrives til følgende sætning:

Sætning 6.15

Arealet af trekanten ABC er givet ved

$$T = \tfrac{1}{2} b\, c \sin(\angle A)\ .$$

Formlen i sætning 6.15 siger at en trekants areal kan beregnes ud fra to sider og den mellemliggende vinkel. Formlen kan derfor skrives på 3 forskellige måder, afhængig af hvilken vinkel, man tager udgangspunkt i:

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} b\, c \sin(\angle A) \\ T &= \tfrac{1}{2} a\, c \sin(\angle B) \\ T &= \tfrac{1}{2} a\, b \sin(\angle C) \end{aligned}$$

6.5 Sinusrelationerne

Vha. sætning 6.15 kan man udlede følgende sætning.

Sætning 6.16: Sinusrelationerne

I en trekant ABC gælder der

$$\frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle C)}{c}\ ,$$

og

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}\ .$$

Bevis

Som nævnt ovenfor kan formlen i sætning 6.15 skrives som tre formler for arealet af den samme trekant. Der må derfor gælde at

$$\tfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\angle A) = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\angle B) = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\angle C)\ .$$

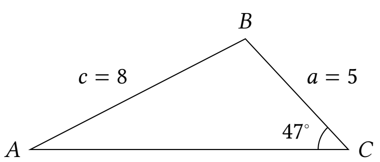
I denne dobbeltligning kan man dividere med $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c$ på alle »sider«, og man får så

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\angle A)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\angle B)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\angle C)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c}\ .$$

Nu forkorter man så meget som muligt, og tilbage står der

$$\frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle C)}{c}$$

hvorved sætningen er bevist. ■



Figur 6.9: En trekant med to kendte sider og én kendt vinkel.

Sinusrelationerne siger at forholdet mellem sinus til en vinkel og længden af den side der ligger over for vinklen, er konstant i en given trekant. Hvis man kender en vinkel og en længden af siden overfor i en trekant, og man kender en vinkel eller en sidelængde mere, er det derfor muligt at beregne resten af sidelængderne og vinklerne i trekanten.

Eksempel 6.17 I $\triangle ABC$ er $\angle C = 47^\circ$, $a = 5$ og $c = 8$. En skitse af trekanten kan ses på figur 6.9.

Iflg. sinusrelationerne (sætning 6.16) er

$$\frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle C)}{c} ,$$

dvs.

$$\frac{\sin(\angle A)}{5} = \frac{\sin(47^\circ)}{8} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(\angle A) = \frac{\sin(47^\circ)}{8} \cdot 5 = 0{,}4571 .$$

Derfor er

$$\angle A = \sin^{-1}(0{,}4571) = 27{,}2^\circ .$$

Vinklen $\angle B$ kan nu bestemmes ud fra at vinkelsummen er 180°, og den sidste side kan så også bestemmes vha. sinusrelationerne (se evt. næste eksempel).

Eksempel 6.18 I $\triangle ABC$ er $\angle A = 62^\circ$, $\angle B = 34^\circ$ og $b = 7$. En skitse kan ses på figur 6.10.

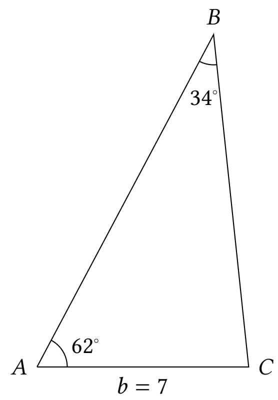
Ifølge sinusrelationerne er

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} ,$$

dvs.

$$\frac{a}{\sin(62^\circ)} = \frac{7}{\sin(34^\circ)} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = \frac{7}{\sin(34^\circ)} \cdot \sin(62^\circ) = 11{,}1 .$$

Den sidste vinkel kan beregnes ud fra at vinkelsummen er 180°, og den sidste side kan bestemmes på samme måde som siden a.



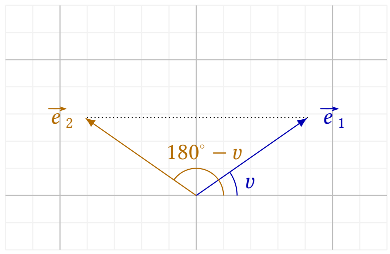
Figur 6.10: En trekant med to kendte vinkler og én kendt side.

Sinusfælden

Det viser sig at man skal være en smule påpasselig når man bestemmer vinkler vha. sinusrelationerne. Funktionen $\sin^{-1}$ som man bruger til at isolere vinkler med, giver nemlig altid et resultat mellem -90° og 90°; men i en trekant kan en vinkel være op til 180° – og det viser sig at for en given sinus-værdi findes der to vinkler der kan give denne værdi.

Figur 6.11 viser enhedsvektoren $\vec{e}_1$ med retningsvinkel v og enhedsvektoren $\vec{e}_2$ med retningsvinkel $180^\circ - v$. Figuren viser at de to enhedsvektorer har samme andenkoordinat, dvs.

$$\sin(180^\circ - v) = \sin(v) .$$



Figur 6.11: To vinkler med samme sinus.

Ud fra dette kan man argumentere for at når man har ligningen $\sin(v) = y$, så kan der være to løsninger. De to løsninger er

$$v = \sin^{-1}(y) \qquad \text{og} \qquad v = 180^\circ - \sin^{-1}(y) .$$

Eksempel 6.19 I trekant ABC er $\angle A = 56^\circ$, $a = 7$ og $b = 8$. Vha. sinusrelationerne kan man beregne $\angle B$ idet

$$\frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle A)}{a} \ .$$

Dette giver ligningen

$$\frac{\sin(\angle B)}{8} = \frac{\sin(56^\circ)}{7} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(\angle B) = \frac{\sin(56^\circ)}{7} \cdot 8 = 0{,}9475 \ .$$

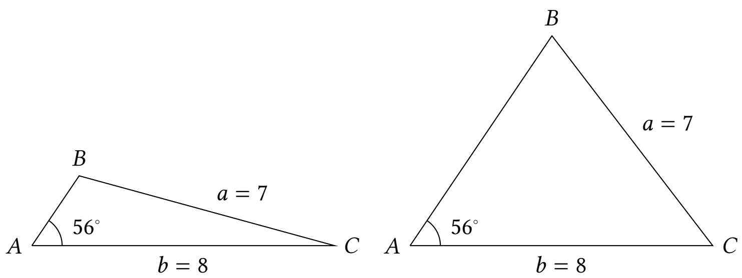
Denne ligning har to løsninger, den ene er[5]

$$\angle B = \sin^{-1}(0{,}9475) = 71{,}3^\circ \ ,$$

og den anden er

$$\angle B = 180^\circ - \sin^{-1}(0{,}9475) = 108{,}7^\circ \ .$$

Trekant ABC kan altså se ud på to forskellige måder:



Hvis man bliver bedt om at bestemme de resterende sider og vinkler i $\triangle ABC$ bliver man altså nødt til at regne på to forskellige trekanter. Der findes derfor ikke én men to løsninger, og den ene er ikke mere rigtig end den anden.

Selvom ligningen $\sin(v) = y$ altid har to løsninger, er det ikke sikkert at begge løsninger giver mening. Dette ses i næste eksempel.

Eksempel 6.20 Her ses på trekanten ABC, hvor $\angle A = 45^\circ$, $a = 15$ og $b = 12$. Sinusrelationerne giver

$$\frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle A)}{a}$$

hvorfra man får ligningen

$$\frac{\sin(\angle B)}{12} = \frac{\sin(45^\circ)}{15} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(\angle B) = \frac{\sin(45^\circ)}{15} \cdot 12 = 0{,}5657 \ .$$

Denne ligning har to løsninger,

$$\angle B = \sin^{-1}(0{,}5657) = 34{,}4^\circ$$

og

$$\angle B = 180^\circ - \sin^{-1}(0{,}5657) = 145{,}6^\circ \ .$$

[5] Der findes to løsninger til en ligning som $\sin(\angle B) = 0{,}9475$, netop fordi $\sin(71{,}3^\circ) = \sin(108{,}7^\circ)$ så begge disse vinkler løser ligningen.

Den sidste løsning ($\angle B = 145{,}6^\circ$) er godt nok en løsning til ligningen $\sin(\angle B) = 0{,}5657$, men det er ikke en løsning der giver mening. Vinkelsummen i en trekant er nemlig 180°, og der er i forvejen en vinkel på 45°. Så kan der ikke også være en vinkel på $145{,}6^\circ$ i trekanten, og denne løsning kasseres derfor.

Altså er der kun én mulig størrelse vinklen kan have, nemlig $\angle B = 34{,}4^\circ$.

6.6 Cosinusrelationerne

Sinusrelationerne kan bruges i de tilfælde hvor man kender en vinkel og en side der ligger over for hinanden. Gør man ikke det, kan man kun beregne yderligere sidelængder og vinkler ved at benytte *cosinusrelationerne*.

Sætning 6.21: Cosinusrelationerne

I en trekant ABC gælder der at

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\angle A) \qquad & \cos(\angle A) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\angle B) \qquad & \cos(\angle B) &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\angle C) \qquad & \cos(\angle C) &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \,.
\end{aligned}$$

Formlerne på højre side i sætning 6.21 er blot en omskrivning af formlerne på venstre side.

Hvis man ser nærmere på formlerne på venstre side, bemærker man at alle tre formler gør det muligt at beregne en sidelængde hvis man kender vinklen overfor og længden af de to andre sider. Indholdet i alle tre formler er altså på sin vis det samme, så det er kun nødvendigt at bevise den ene af dem.

Bevis
Trekanten ABC er udspændt af vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Der gælder tillige (pga. indskudssætningen) at

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\,.$$

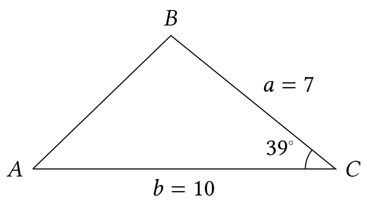
Idet $a^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$, kan man finde et udtryk for a^2 ved at regne på vektoren $\overrightarrow{BC}$. Hvis man anvender regnereglerne fra sætning 3.13 og ligning 3.8, får man

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right|^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\
&= \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} \\
&= \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - 2 \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos(\angle A) \\
&= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\angle A)
\end{aligned}$$

hvorved sætningen er bevist. ■

Cosinusrelationerne kan bruges til at beregne en længde af en side hvis man kender de to andre sidelængder i en trekant samt vinklen overfor. Dette svarer til formlerne på venstre side i sætning 6.21.

Alternativt kan man bruge cosinusrelationerne til at beregne en vinkel hvis man kender længden af alle tre sider i en trekant − dette svarer til formlerne på højre side i sætningen.



Figur 6.12: Trekant hvor man kender to sider og en mellemliggende vinkel.

Eksempel 6.22 I trekant ABC er $\angle C = 39^\circ$, $a = 7$ og $b = 10$. En skitse af trekanten kan ses på figur 6.12.

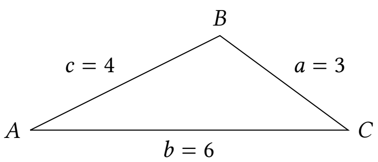
Sidelængden c kan beregnes vha. en cosinusrelation. Iflg. sætning 6.21 er

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\angle C) = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos(39^\circ) = 40{,}20$$

hvilket betyder at

$$c = \sqrt{40{,}20} = 6{,}3 \ .$$

Da man nu kender længden af alle siderne, kan én af de sidste to vinkler også bestemmes vha. en cosinusrelation (se næste eksempel). Alternativt kan man bestemme en af de sidste to vinkler vha. sinusrelationerne.



Figur 6.13: Trekant, hvor man kender alle sider.

Eksempel 6.23 I dette eksempel ses på en trekant ABC, hvor $a = 3$, $b = 6$ og $c = 4$ (se figur 6.13). Iflg. cosinusrelationerne kan $\angle A$ beregnes ud fra formlen

$$\cos(\angle A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6^2 + 4^2 - 3^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = 0{,}8958 \ .$$

Heraf får man

$$\angle A = \cos^{-1}(0{,}8958) = 26{,}4^\circ \ .$$

De resterende vinkler kan beregnes på samme måde.

6.7 Øvelser

Øvelse 6.1
Bestem arealet af trekanten PQR, når $|PQ| = 6$ og $h_R = 3$.

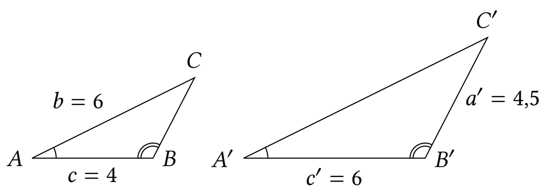
Øvelse 6.2
Arealet af trekant ABC er 28, og $h_C = 7$.

a) Beregn $|AB|$.

Øvelse 6.3
Arealet af trekant ABC er 12, og $|BC| = 6$.

a) Bestem højden h_A.

Øvelse 6.4
De to trekanter på figuren er ensvinklede.

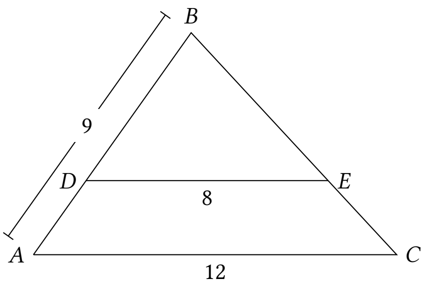


a) Bestem sidelængderne a og b'.

Øvelse 6.5
De to trekanter ABC og DEF er ensvinklede, således at $\angle A = \angle D$ og $\angle B = \angle E$. Der gælder yderligere, at $a = 5$, $b = 7$, $e = 15$ og $f = 18$.

a) Bestem de manglende sidelængder.

Øvelse 6.6
På figuren nedenfor er AC og DE parallelle. Nogle af målene er angivet på figuren.



a) Bestem $|AD|$.

Øvelse 6.7
Trekant ABC er retvinklet, og $\angle C$ er den rette vinkel.

a) Bestem c, når $a = 3$ og $b = 4$.

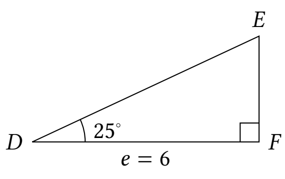
b) Bestem a, når $b = 5$ og $c = 13$.

Øvelse 6.8
Trekant BLT er retvinklet, og $\angle L$ er den rette vinkel.

a) Opskriv Pythagoras' sætning for denne trekant.

b) Bestem b, når $l = 4{,}3$ og $t = 2{,}9$.

Øvelse 6.9
Den retvinklede trekant DEF er afbildet nedenfor. Nogle af trekantens mål kan ses på figuren.

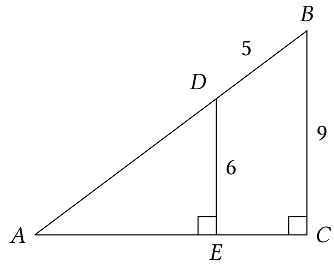


a) Bestem den manglende vinkel og de manglende sidelængder i trekant DEF.

b) Bestem trekantens areal.

Øvelse 6.10
Bestem de manglende vinkler samt længden af den sidste katete i en retvinklet trekant hvor længden af den ene katete er 3, og længden af hypotenusen er 7.

Øvelse 6.11
På figuren nedenfor er $|DE| = 6$, $|BC| = 9$ og $|BD| = 5$.

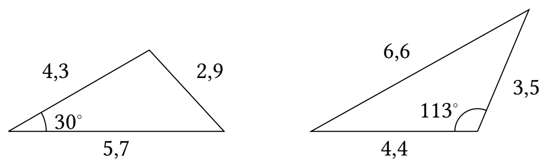


a) Bestem $|AD|$ og $|AE|$.

b) Bestem $\angle A$ og $\angle B$.

Øvelse 6.12
Bestem arealet af trekant ABC når $a = 3$, $b = 5$ og $\angle C = 72^\circ$.

Øvelse 6.13
Bestem arealerne af trekanterne herunder.



Øvelse 6.14
I trekant ABC er $\angle A = 26^\circ$, $\angle B = 95^\circ$ og $|BC| = 4{,}0$.

a) Bestem de manglende sider og den manglende vinkel i trekanten.

b) Bestem arealet af trekanten.

Øvelse 6.15
Bestem de manglende størrelser i trekant ABC i de fire tilfælde herunder. Husk i hvert tilfælde at overveje om der er mere end én løsning.

a) $\angle A = 34^\circ$, $a = 10$, $b = 5$.

b) $\angle B = 69^\circ$, $\angle C = 71^\circ$, $a = 4{,}7$.

c) $\angle B = 106^\circ$, $b = 5$, $c = 6{,}2$.

d) $\angle A = 62^\circ$, $\angle B = 79^\circ$, $c = 8{,}3$.

Øvelse 6.16
I trekant ABC er $\angle A = 32^\circ$, $c = 4{,}7$, og medianen fra B har længden $m_B = 6{,}1$.

a) Bestem b.

b) Bestem trekantens areal.

Øvelse 6.17
Bestem de manglende vinkler og sider i trekant ABC i de fire tilfælde herunder.

a) $a = 5$, $b = 7$, $\angle C = 49^\circ$.

b) $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$.

c) $b = 4$, $c = 7$, $\angle A = 112^\circ$.

d) $a = 9$, $b = 5$, $c = 7$.

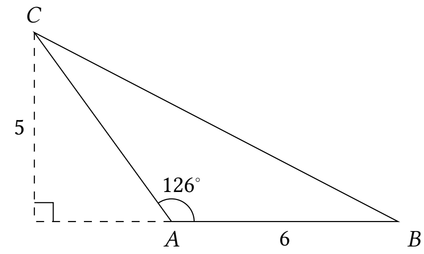
Øvelse 6.18
Trekant ABC har hjørner i punkterne $A(-2, 3)$, $B(0, 7)$ og $C(4, 1)$.

a) Bestem sidelængderne og vinklerne i trekanten.

b) Bestem trekantens areal.

c) Bestem højden h_C fra C på siden AB.

Øvelse 6.19
I trekant ABC er $\angle A = 126^\circ$, $|AB| = 6$ og højden fra C er $h_C = 5$.



a) Bestem trekantens areal.

b) Bestem længden af AC.

c) Bestem $|BC|$ samt $\angle B$ og $\angle C$.