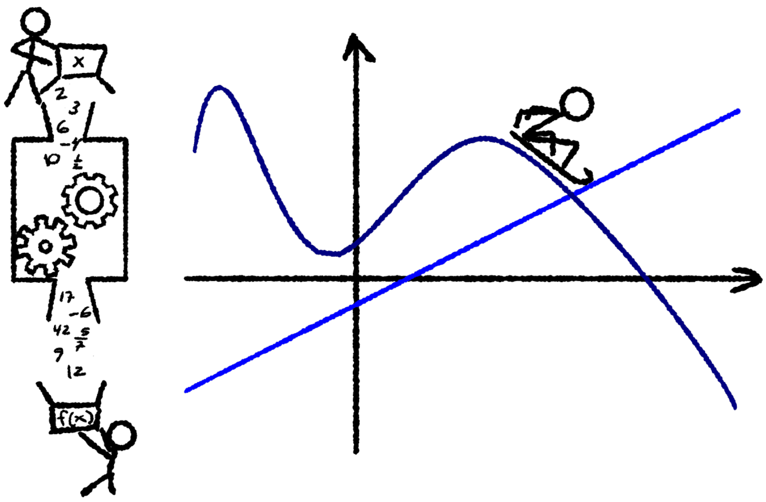
Funktioner

Version 2.1
14. januar 2022



Mike Vandal Auerbach
www.mathematicus.dk

Funktioner
Version 2.1, 2022

Disse noter er skrevet til undervisning i matematik på stx A- og B-niveau.

Det indledende kapitel beskriver selve funktionsbegrebet, mens de efterfølgende kapitler behandler de funktioner der er kernestof. Det afsluttende appendix om mængdelære er inkluderet for at have en reference når man taler om funktioners definitions- og værdimængder.

Enkelte grafer/figurer er markeret med symbolet der fungerer som link til et interaktivt GeoGebra-arbejdsark. Se også www.geogebra.org.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

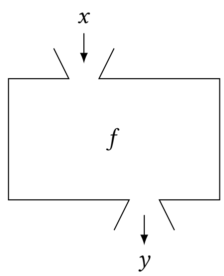
Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Indhold

Hvad er en funktion? 1

Inden for matematikken kan en *funktion* forstås som en formalisering af ideen om variabelsammenhænge. Hvis værdien af variablen y afhænger af variablen x, så siges y at være *en funktion af* x. Det betyder at alle de mulige værdier af x knyttes til præcist én værdi af y som er det tal man får, når man sender tallet x gennem funktionen.

Funktioner symboliseres ofte med en maskine hvor man putter x'er ind i den ene ende, og så kommer de tilsvarende y'er ud i den anden ende (se figur 1.1).



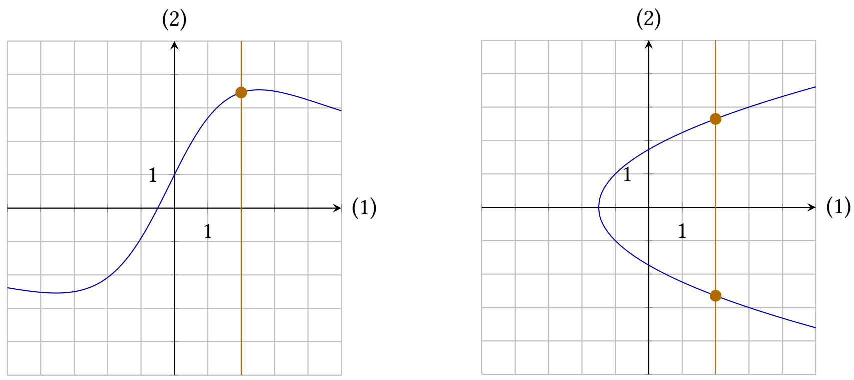
Figur 1.1: Funktionen f kan fortolkes som en slags maskine.

Mere formelt kan man sige, at en funktion er en relation der angiver en sammenhæng mellem elementerne i en mængde X og elementerne i en anden Y, sådan at der til hvert element $x \in X$ svarer præcist ét element i $f(x) \in Y$. Man siger at elementet $f(x)$ er *afbildningen* af elementet x.[1]

[1]Det er vigtigt at huske, at parentesen i $f(x)$ ikke er en regneparentes, men en angivelse af, at man ser på det element, man får, når man sender tallet x gennem funktionen f.

Den nemmeste måde at visualisere en funktion er at tegne dens graf. Grafen for en funktion består af alle de punkter (x, y) hvor $y = f(x)$. Grafen tegnes ved at man afsætter alle disse punkter i et koordinatsystem. Ud for hver værdi af x afsætter man altså et punkt (x, y). Idet hver værdi af x svarer til én og kun én værdi af y, kan man direkte se på en kurve om den er grafen for en funktion. Hvis en kurve er graf for en funktion, vil alle lodrette linjer i koordinatsystemet højst ramme kurven én gang (se figur 1.2).

Der er en entydig sammenhæng mellem en funktion og dens graf. Men man kan sjældent visualisere hele grafen for en funktion idet et tegnet koordinatsystem er begrænset. Hvis man vil have al information omkring



(a) Grafen for en funktion.

(b) Ikke en graf for en funktion.

Figur 1.2: En funktion knytter præcis én y-værdi til hver x-værdi. Lodrette linjer skærer derfor grafen for en funktion højst én gang.

funktionen, kan det derfor være en fordel at kende en *forskrift* for funktionen, dvs. en formel der viser hvordan man beregner tallet $f(x)$, når man kender tallet x.

Eksempel 1.1 Betragt funktionen f, som har forskriften

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sqrt{x+1}\ .$$

Vha. funktionens forskrift kan man beregne alle de punkter der ligger på grafen. F.eks. er

$$f(8) = \frac{8}{2} - \sqrt{8+1} = 4 + 3 = 7\ ,$$

og

$$f(24) = \frac{24}{2} - \sqrt{24+1} = 12 + 5 = 17\ .$$

Man ved altså nu at punkterne $(8, 7)$ og $(24, 17)$ ligger på grafen for denne funktion.

1.1 Definitions- og værdimængde

Mængderne X og Y ovenfor beskriver de tal som x-værdierne hhv. y-værdierne tilhører. Mængden X som indeholder de mulige x-værdier for funktionen f, kaldes også funktionens *definitionsmængde*.

Definition 1.2

Givet en funktion f, kaldes mængden af tal x for hvilke $f(x)$ eksisterer, *definitionsmængden* for f.

Definitionsmængden for f skrives $\mathrm{Dm}(f)$.

Mange af de funktioner man ser på i gymnasiet har alle reelle tal som definitionsmængde; men der er tilfælde hvor nogle tal ikke må anvendes som x-værdi.

Eksempel 1.3 Funktionen f har forskriften

$$f(x) = \sqrt{x+3}\ .$$

Idet man ikke kan tage kvadratroden af et negativt tal, så skal $x + 3$ altid være positiv, dvs.

$$x + 3 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq -3\ .$$

Definitionsmængden for f består altså af alle de tal der er større end eller lig med -3:

$$\mathrm{Dm}(f) = [-3; \infty[\ \ .$$

Eksempel 1.4 Funktionen g er defineret ved

$$g(x) = \frac{3}{4-x}\ .$$

Idet man ikke må dele med 0, må nævneren i denne brøk ikke give 0, dvs.

$$4 - x \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq 4\ .$$

Tallet 4 tilhører derfor ikke g's definitionsmængde så

$$\mathrm{Dm}(g) = \mathbb{R} \setminus \{4\}\ \ .$$

Mængden af mulige funktionsværdier for en funktion har også en betegnelse. Den kaldes *værdimængden* for en funktion.

Definition 1.5

Givet en funktion f, kaldes mængden af mulige funktionsværdier for f *værdimængden* for f. Den betegnes $\mathrm{Vm}(f)$.

Der gælder altså

$$\mathrm{Vm}(f) = \{f(x) \,|\, x \in \mathrm{Dm}(f)\} \;.$$

1.2 Nulpunkter

Ser man på grafen for en funktion, er der punkter på grafen der kan have speciel interesse. Nogle af disse er eventuelle skæringer med første- eller andenaksen. Skæringer med andenaksen kan beregnes direkte idet $x = 0$ i alle punkter på andenaksen. Har man en funktion f, kan skæringen med andenaksen derfor beregnes som $f(0)$ (hvis funktionen er defineret for $x = 0$).

På førsteaksen gælder derimod at $y = 0$, dvs. skæringer med førsteaksen kan bestemmes ved at løse ligningen $f(x) = 0$. De fundne værdier af x er de såkaldte *nulpunkter* for funktionen.

Definition 1.6

Lad der være givet en funktion f. *Nulpunkterne* for f er de værdier af x for hvilke $f(x) = 0$.

Eksempel 1.7 Nulpunkterne for funktionen $f(x) = \sqrt{x-4}$ bestemmes ved at løse $f(x) = 0$, dvs.

$$\sqrt{x-4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 \;.$$

Funktionen f har altså ét nulpunkt, nemlig $x = 4$.

Eksempel 1.8 Nulpunkterne for funktionen $g(x) = x^2 - 5x$ bestemmes ved at løse $g(x) = 0$,

$$\begin{aligned} x^2 - 5x &= 0 && \Leftrightarrow \\ x \cdot (x-5) &= 0 && \Leftrightarrow \\ x &= 0 \quad \vee \quad x = 5 \;. \end{aligned}$$

Så denne funktion har to nulpunkter, $x = 0$ og $x = 5$.

1.3 Kombinationer af funktioner

Man kan regne med funktioner lige som man kan regne med tal. Man kan f.eks. gange en funktion f med et tal. Ganger man f med konstanten c, får man den nye funktion $c \cdot f$ som er defineret på følgende måde:

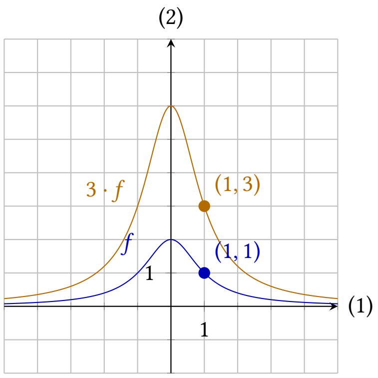
$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x) \;.$$

To funktioner kan også lægges sammen eller trækkes fra hinanden. Man har følgende definition:

Definition 1.9

Lad der være givet to funktioner f og g samt en konstant c. Så definerer man funktionerne $c \cdot f$, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ og $\frac{f}{g}$ til at være de funktioner hvor

$$
\begin{aligned}
(c \cdot f)(x) &= c \cdot f(x) \\
(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\
(f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\
(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}
\end{aligned}
$$



Figur 1.3: Graferne for f og $3 \cdot f$.

Man regner altså på funktioner ved at regne på deres funktionsværdier. F.eks. er funktionsværdierne for funktionen $c \cdot f$ funktionsværdierne for f ganget med c. Der må så gælde, at

$$\mathrm{Dm}(c \cdot f) = \mathrm{Dm}(f)$$

idet $c \cdot f$ og f må være defineret for præcis de samme værdier af x.

Eksempel 1.10 Figur 1.3 viser graferne for funktionerne f og $3 \cdot f$ hvor f er givet ved

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} \ .$$

Forskriften for $3 \cdot f$ er så

$$(3 \cdot f)(x) = 3 \cdot f(x) = \frac{6}{x^2 + 1} \ .$$

Figuren viser at grafen for f går gennem punktet $(1, 1)$, mens grafen for $3 \cdot f$ går gennem punktet $(1, 3)$. Alle funktionsværdierne bliver således 3 gange så store, og grafen for $3 \cdot f$ er en skalering af grafen for f.

Analyserer man funktionsudtrykket for f, finder man at

$$\mathrm{Vm}(f) = \ ]0; 2] \ .$$

Idet alle funktionsværdierne for $3 \cdot f$ er 3 gange de tilsvarende funktionsværdier for f, giver det at

$$\mathrm{Vm}(3 \cdot f) = \ ]0; 6] \ ,$$

hvilket også ses på figuren.

Som eksemplet viser, er grafen for $c \cdot f$ altså en skalering af grafen for f med en faktor c. Man kan så finde værdimængden for $c \cdot f$ ved at gange alle elementerne i $\mathrm{Vm}(f)$ med c.

Eksempel 1.11 For de to funktioner f og g givet ved

$$f(x) = x^2 - 5 \quad \text{og} \quad g(x) = 2^x$$

gælder, at

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^2 - 5 = 4 \\ g(3) &= 2^3 = 8\ , \end{aligned}$$

dvs.

$$(f \cdot g)(3) = f(3) \cdot g(3) = 4 \cdot 8 = 32\ .$$

Funktionerne beskrevet ovenfor er defineret for alle de værdier af x hvor både f og g er defineret. Man har altså

$$\mathrm{Dm}(f + g) = \mathrm{Dm}(f - g) = \mathrm{Dm}(f \cdot g) = \mathrm{Dm}(f) \cap \mathrm{Dm}(g)\ .$$

Undtagelsen er $\mathrm{Dm}\left(\frac{f}{g}\right)$ som ikke må indeholde de elementer hvor $g(x)$ giver 0.[2] Her får man

$$\mathrm{Dm}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathrm{Dm}(f) \cap \{x \in \mathrm{Dm}(g) \,|\, g(x) \neq 0\}\ .$$

[2]Idet man som bekendt ikke må dividere med 0.

At bestemme værdimængderne for sådanne funktioner kræver en analyse af den konkrete situation.

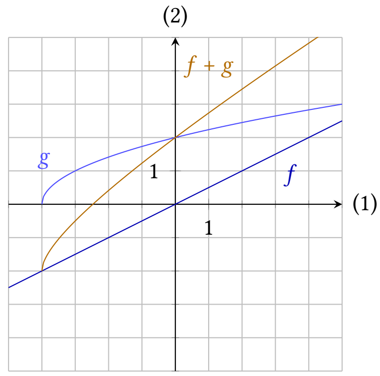
Eksempel 1.12 To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x \quad \text{og} \quad g(x) = \sqrt{x + 4}\ .$$

Funktionen $f + g$ har så forskriften

$$(f + g)(x) = \tfrac{1}{2}x + \sqrt{x + 4}\ .$$

Graferne for alle tre funktioner kan ses på figur 1.4.



Figur 1.4: Graferne for f, g og $f + g$.

Funktioner f og g har definitionsmængderne

$$\mathrm{Dm}(f) = \mathbb{R} \quad \text{og} \quad \mathrm{Dm}(g) = [-4; \infty[\ .$$

Definitionsmængden for $f + g$ er fællesmængden af disse to mængder så

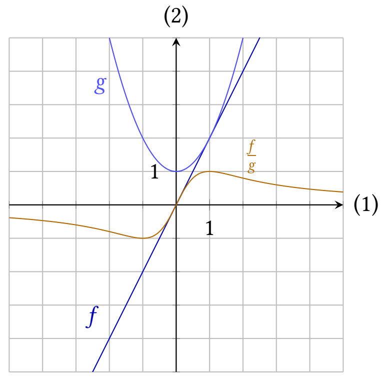
$$\mathrm{Dm}(f + g) = [-4; \infty[\ .$$

Man kan så bruge grafen til at analysere funktionerne hvorved man finder

$$\begin{aligned} \mathrm{Vm}(f) &= \mathbb{R} \\ \mathrm{Vm}(g) &= [0; \infty[\\ \mathrm{Vm}(f + g) &= [-2; \infty[\end{aligned}$$

Eksempel 1.13 Figur 1.5 viser graferne for de to funktioner

$$f(x) = 2x \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 + 1\ ,$$



Figur 1.5: Graferne for f, g og $\frac{f}{g}$.

samt funktionen $\frac{f}{g}$ som har forskriften

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x}{x^2+1} \ .$$

Som det fremgår af figuren er

$$\mathrm{Vm}(f) = \mathbb{R} \quad \text{og} \quad \mathrm{Vm}(g) = [1;\infty[$$

mens

$$\mathrm{Vm}\left(\frac{f}{g}\right) = [-1;1] \ .$$

En anden måde at kombinere funktioner på er ved sammensætning. Man definerer den sammensatte funktion $f \circ g$ på følgende måde:

Definition 1.14: Sammensat funktion

Givet to funktioner f og g, defineres den sammensatte funktion $f \circ g$ som den funktion hvor

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \ .$$

Man finder altså funktionsværdien af $f \circ g$ ved først at beregne $g(x)$ og derefter anvende funktionen f på denne værdi.

Eksempel 1.15 Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = \sqrt{x+5} \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 + 7 \ .$$

Dvs.

$$\begin{aligned} g(2) &= 2^2 + 7 = 11 \\ f(11) &= \sqrt{11+5} = 4 \ , \end{aligned}$$

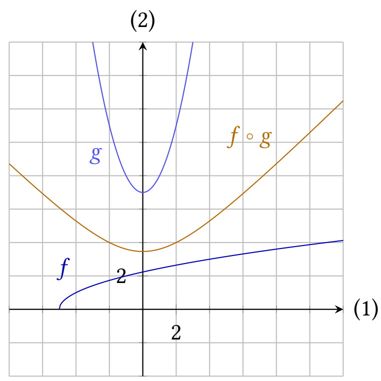
så

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(11) = 4 \ .$$

Man kan finde en forskrift for $f \circ g$ ved at erstatte x i udtrykket for f med funktionsudtrykket for g. Man får så

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{g(x)+5} = \sqrt{(x^2+7)+5} = \sqrt{x^2+12} \ .$$

Graferne for funktionerne f, g og $f \circ g$ kan ses på figur 1.6.



Figur 1.6: Graferne for f, g og $f \circ g$.

1.4 Stykkevist definerede funktioner

Nogle funktioner har forskellige forskrifter i forskellige intervaller på x-aksen. Man taler her om *stykkevist definerede* funktioner. Hvis grafen yderligere består af linjestykker, kaldes de *stykkevis lineære* funktioner. Grafen for en stykkevis lineær funktion kan ses på figur 1.7.

Her kan man aflæse, at når x er mindre end 2, så svarer grafen til linjen med ligningen

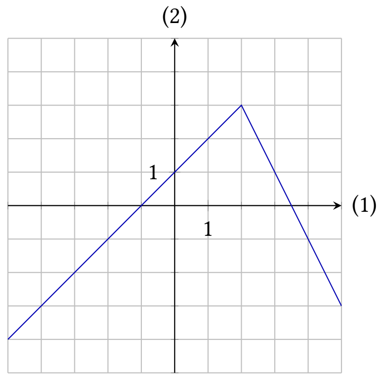
$$y = x + 1\,,$$

og når x er større end 2, svarer grafen til linjen med ligningen

$$y = -2x + 7\,,$$

Hvis funktionen hedder f, skrives forskriften derfor på denne måde:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{for } x < 2 \\ -2x+7 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}.$$

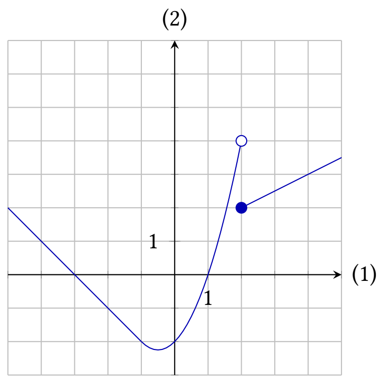


Figur 1.7: Grafen for en stykkevis lineær funktion.

En funktion hvis graf er sammenhængende, kaldes en *kontinuert* funktion. Stykkevist definerede funktioner er ikke nødvendigvis kontinuerte. Et eksempel på en stykkevist defineret funktion, der ikke er kontinuert kunne være

$$g(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{for } x < -1 \\ x^2+x-4 & \text{for } -1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}x+1 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}.$$

Grafen for g kan ses på figur 1.8.



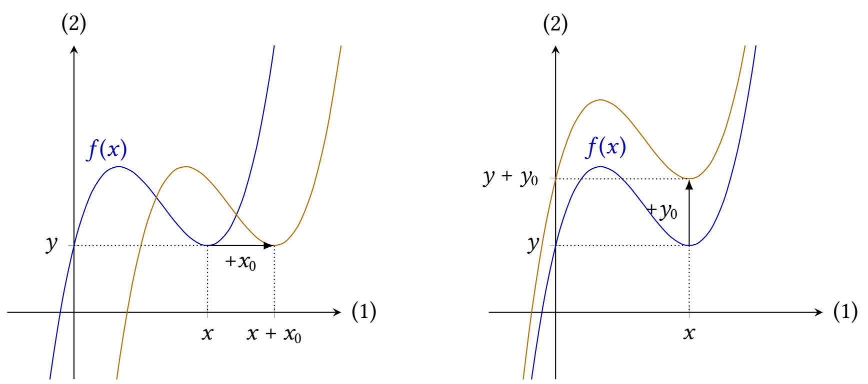
Figur 1.8: Grafen for en stykkevist defineret funktion der ikke er kontinuert.

Den fyldte cirkel på grafen viser et punkt, der er med på grafen, mens den tomme cirkel viser, at punktet ikke er med. For funktionen g gælder, at funktionsværdien $g(3)$ skal beregnes ud fra den nederste »gren« i forskriften – derfor er punktet med på det linjestykke længst mod højre.

1.5 Parallelforskydning af grafer

Hvis man forskyder grafen for en funktion, får man grafen for en ny funktion. I dette afsnit gennemgås en generelt metode til at finde forskriften for den funktion man finder ved at parallelforskyde en graf.

På figur 1.9 kan man se, hvordan en graf kan parallelforskydes langs første- eller langs andenaksen.



(a) Langs førsteaksen.

(b) Langs andenaksen.

Figur 1.9: En graf kan parallelforskydes både langs første- og andenaksen.

Hvis grafen for funktionen $f(x)$ forskydes langs førsteaksen med størrelsen x_0, får man grafen for en ny funktion $g(x)$ hvorom der gælder at

$$g(x + x_0) = f(x) \ .$$

Dette kan omskrives til

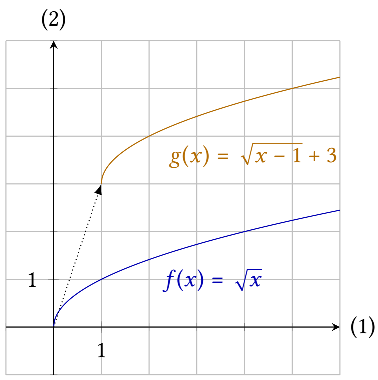
$$g(x) = f(x - x_0)$$

som kan bruges til at finde forskriften for g når man kender forskriften for f.

Parallelforskyder man grafen for f langs andenaksen med størrelsen y_0, får man grafen for den nye funktion g der opfylder

$$g(x) = f(x) + y_0 \ .$$

Hvis man parallelforskyder en graf i både første- og andenaksens retning taler man om at forskyde med (x_0, y_0). Samler man de to resultater ovenfor, finder man frem til følgende sætning:



Figur 1.10: Grafen for $f(x) = \sqrt{x}$ forskudt med $(1, 3)$.

Sætning 1.16

Hvis grafen for funktionen $f(x)$ parallelforskydes med (x_0, y_0), får man grafen for funktionen

$$g(x) = f(x - x_0) + y_0 \ .$$

Eksempel 1.17 På figur 1.10 ses grafen for $f(x) = \sqrt{x}$ forskudt med $(1, 3)$. Herved får man ifølge sætning 1.16 grafen for

$$g(x) = f(x - 1) + 3 = \sqrt{x - 1} + 3 \ .$$

1.6 Inverse funktioner

En funktion giver en entydig relation fra en mængde af tal (definitionsmængden) til en anden mængde af tal (værdimængden). Den inverse funktion er den funktion der vender denne relation om. Hvis funktionen f afbilder x på y vil den inverse funktion f^{-1} afbilde y på x:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Eksempel 1.18 Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x) = 3x - 5 \ .$$

Nogle af funktionsværdierne for f er

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 5 = -2$$
$$f(6) = 3 \cdot 6 - 5 = 13$$

Idet $f(1) = -2$ og $f(6) = 17$, gælder der

$$f^{-1}(-2) = 1 \quad \text{og} \quad f^{-1}(17) = 6 \ .$$

Når funktionen f afbilder 1 på -2, vil f^{-1} afbilde -2 på 1 osv.

Ikke alle funktioner har inverse funktioner. Den inverse funktion er – som navnet antyder – også en funktion, dvs. den skal bl.a. opfylde, at $f^{-1}(x)$ er entydigt bestemt.

Eksempel 1.19 Funktionen f givet ved

$$f(x) = x^2$$

har ikke en entydig invers funktion. Det skyldes at f.eks.

$$\begin{aligned} f(-4) &= (-4)^2 = 16 \\ f(4) &= 4^2 = 16 \end{aligned}$$

Idet både $f(-4)$ og $f(4)$ giver 16, kan man ikke entydigt definere $f^{-1}(16)$, og den inverse funktion til f eksisterer derfor ikke.

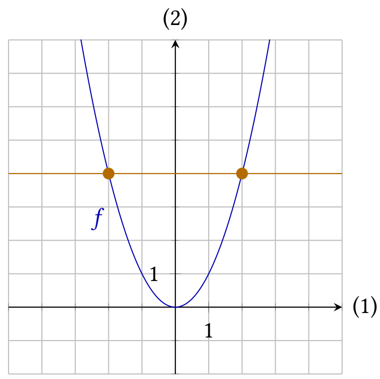
For at en funktion f har en invers funktion f^{-1} er det derfor nødvendigt at man ikke har forskellige x-værdier som giver de samme y-værdier. En funktion der opfører sig på denne måde, kalder man *injektiv*:

Definition 1.20

Lad f være en funktion. Hvis der for alle $x_1, x_2 \in \mathrm{Dm}(f)$ gælder at

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

siger man at f er *injektiv*.



Figur 1.11: Funktionen $f(x) = x^2$ er ikke injektiv.

Man kan undersøge om en funktion er injektiv ved at tegne dens graf. Hvis ingen x-værdier må have samme y-værdi, så må ingen vandrette linjer skære grafen mere end én gang. Som eksempel 1.19 ovenfor viser, så er $f(x) = x^2$ ikke injektiv (se figur 1.11).

Injektive funktioner har altså inverse funktioner. Formelt kan de defineres på denne måde:

Definition 1.21

Lad f være en injektiv funktion. Den inverse funktion f^{-1} til f er den funktion, der opfylder

- $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ for alle $x \in \mathrm{Dm}(f)$, og
- $(f \circ f^{-1})(x) = x$ for alle $x \in \mathrm{Vm}(f)$.

Definitionen siger altså, at hvis man først anvender f på x og dernæst f^{-1}, så får man x tilbage. Dvs. f og f^{-1} gør præcist det modsatte af hinanden. Det betyder altså, at hvis $y = f(x)$, så er $x = f^{-1}(y)$.

Eksempel 1.22 Hvis funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x) = 2x - 6\ ,$$

så har den inverse funktion forskriften

$$f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}x + 3\ .$$

Man kan vise at dette er korrekt, ved at bestemme forskrifterne for hhv. $f^{-1} \circ f$ og $f \circ f^{-1}$. Man får

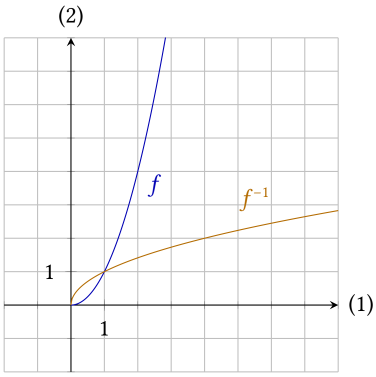
$$(f^{-1} \circ f)(x) = \tfrac{1}{2}(2x - 6) + 3 = \tfrac{1}{2} \cdot 2x - \tfrac{1}{2} \cdot 6 + 3 = x - 3 + 3 = x \ ,$$

og

$$(f \circ f^{-1})(x) = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}x + 3\right) - 6 = 2 \cdot \tfrac{1}{2}x + 2 \cdot 3 - 6 = x + 6 - 6 = x \ .$$

Det er hermed vist at $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 3$ er den inverse funktion til f.

Som tidligere vist, er $f(x) = x^2$ ikke en injektiv funktion; men hvis man indskrænker definitionsmængden til positive tal, så er den. I det næste eksempel vises hvordan man så finder den inverse funktion.



Figur 1.12: Funktionen $f(x) = x^2$ $(x > 0)$ og dens inverse $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Eksempel 1.23 Lad f være givet ved

$$f(x) = x^2 \ , \quad x \geq 0 \ .$$

Definitionsmængden for f er altså mængden $\mathrm{Dm}(f) = [0; \infty[$, og på denne mængde er f injektiv. Grafen for $f(x)$ og dens inverse funktion kan ses på figur 1.12.

Hvis $y = f(x)$, så er $x = f^{-1}(y)$. Man kan derfor finde den inverse funktion til $f(x)$ ved at løse ligningen $f(x) = y$ mht. x:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{y} \ .$$

Dvs. der gælder $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, eller

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \ .$$

Som det fremgår af ovenstående eksempel, så kan man finde den inverse funktion $f^{-1}(y)$ ved at løse ligningen $f(x) = y$. Når man kender $f^{-1}(y)$, kan man blot skifte variablen ud hvis man hellere vil have $f^{-1}(x)$.

Eksempel 1.24 Funktionen g er givet ved

$$g(x) = x^3 + 2 \ .$$

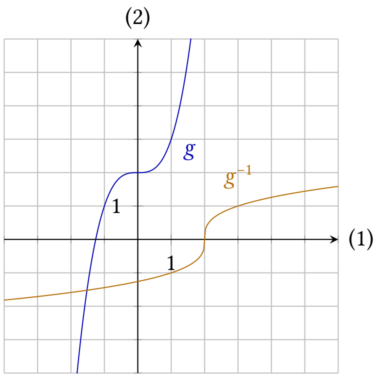
For at bestemme den inverse funktion løses ligningen

$$g(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 2 = y \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = y - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{y-2} \ .$$

Dvs.

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2} \ .$$

Graferne for de to funktioner g og g^{-1} kan ses på figur 1.13



Figur 1.13: Funktionen $g(x) = x^3 + 2$ og dens inverse $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

Som det ses på figur 1.12 og 1.13, så finder man grafen for den inverse funktion ved at spejle grafen for den oprindelige funktion i linjen $y = x$. Dette skyldes at man finder grafen for den inverse funktion ved at tage alle punkterne på grafen for den oprindelige funktion og bytte om på første- og andenkoordinaterne – idet f^{-1} gør præcis det modsatte af f.

1.7 Vækst

Man er ofte interesseret i at undersøge hvordan en funktion vokser, dvs. hvordan den afhængige variabel ændrer sig når man ændrer på den uafhængige variabel. Man kan undersøge, hvad der sker med den afhængige variabel hvis den uafhængige variabel f.eks. vokser med 1 eller hvis den fordobles.

Absolut og relativ vækst

Når man taler om at noget vokser, findes der to måder at præsentere væksten på: Som absolut eller som relativ vækst. Den absolutte tilvækst viser hvor meget en størrelse vokser, altså hvor meget større den er blevet. Den relative tilvækst viser hvor meget en størrelse er vokset *i forhold til udgangspunktet*.

Definition 1.25

Hvis en størrelse x vokser fra x_1 til x_2, så er den *absolutte tilvækst* givet ved

$$\Delta x = x_2 - x_1 \ ,$$

og den *relative tilvækst* givet ved

$$r_x = \frac{\Delta x}{x_1} \ .$$

Den absolutte tilvækst er altså forskellen på slutværdien og startværdien, mens den relative tilvækst beregnes som denne forskel i forhold til startværdien. Man kan i øvrigt beregne r_x på forskellige måder idet

$$\frac{\Delta x}{x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{x_2}{x_1} - 1 \ .$$

Eksempel 1.26 En størrelse x vokser fra $x_1 = 5$ til $x_2 = 8$. Den absolutte tilvækst er så

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 8 - 5 = 3 \ ,$$

og den relative tilvækst er

$$r_x = \frac{\Delta x}{x_1} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \ .$$

Den absolutte tilvækst viser altså at størrelsen x er blevet 3 større, mens den relative tilvækst viser at størrelsen er vokset med 0,6 gange den oprindelige.

Bemærk i øvrigt at når man beregner den absolutte tilvækst, så trækker man altid startværdien fra slutværdien; forskellen skal altså beregnes *med fortegn*.

Eksempel 1.27 En størrelse t ændrer sig fra $t_1 = 20$ til $t_2 = 14$. Den absolutte tilvækst er så

$$\Delta t = 14 - 20 = -6 \ ,$$

og den relative tilvækst er

$$r_t = \frac{\Delta t}{t_1} = \frac{-6}{20} = -0{,}3 \ .$$

Her er både den absolutte og den relative tilvækst negative. Det skyldes, at størrelsen t er aftaget. Dvs. en tilvækst på -6 svarer altså til at størrelsen er blevet 6 mindre; og den relative tilvækst på $-0{,}3$ viser at størrelsen er aftaget med 0,3 gange den oprindelige.

Når man taler om relativ vækst, angives den i øvrigt ofte i procent. Man ganger her tallet med 100 og skriver % bagefter. Fordelen ved det er at tallene ikke ser så små ud.

Eksempel 1.28 En størrelse p vokser fra $p_1 = 25$ til $p_2 = 32$. Den relative tilvækst er

$$r_p = \frac{32 - 25}{25} = 0{,}28 = 28\% \ .$$

Man kan så sige at størrelsen p har en relativ tilvækst på 0,28, eller at p har en vækst på 28%.

Omskriver man formlerne i definition 1.25, kan man få følgende sætning der viser hvordan man finder slutværdien når man kender startværdien og den absolutte eller den relative tilvækst:

Sætning 1.29

Lad der være givet en størrelse x der vokser fra x_1 til x_2. Da er

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

og

$$x_2 = (1 + r_x) \cdot x_1 \ .$$

Hvis en størrelse vokser relativt, skal startværdien altså ganges med $1 + r_x$. Relativ vækst svarer således til at man ganger med et tal.

Eksempel 1.30 Størrelsen x har en startværdi på $x_1 = 80$ og vokser 17%. Hvad er slutværdien x_2?

Den relative tilvækst er 17%, dvs. 0,17. Man har så

$$x_2 = (1 + 0{,}17) \cdot 80 = 93{,}6 \ .$$

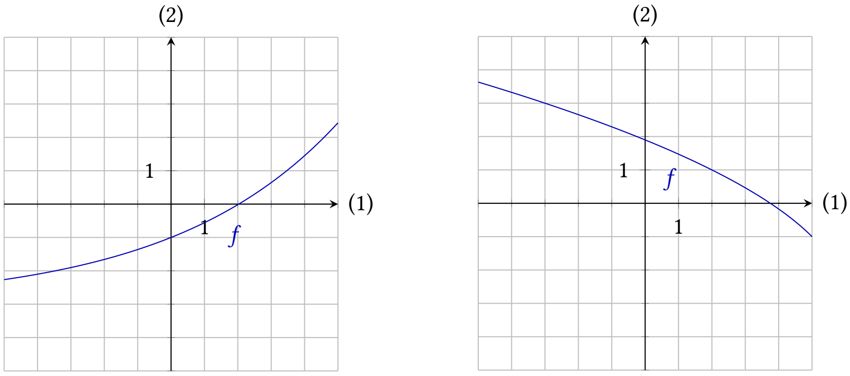
Slutværdien er altså 93,6.

Når man undersøger funktioner, er man tit interesseret i at vide hvordan funktionsværdien vokser når x vokser. Derfor definerer man *funktionstilvæksten* på følgende måde:

Definition 1.31

Lad der være givet en funktion f. Hvis den uafhængige variabel vokser fra x_1 til x_2, er *funktionstilvæksten*

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1) \ .$$



(a) En voksende funktion.

(b) En aftagende funktion.

Figur 1.14: Grafen for en voksende og for en aftagende funktion. For voksende funktioner bevæger grafen sig opad mod højre, og for aftagende bevæger grafen sig nedad mod højre.

Eksempel 1.32 En funktion f er defineret ved

$$f(x) = 4x - 5 \ .$$

Hvis x vokser fra $x_1 = 10$ til $x_2 = 13$, så er den absolutte tilvækst

$$\Delta x = 13 - 10 = 3 \ ,$$

og den tilsvarende funktionstilvækst er

$$\Delta f = f(13) - f(10) = (4 \cdot 13 - 5) - (4 \cdot 10 - 5) = 12 \ .$$

Når x vokser fra 10 til 13, så vokser funktionsværdien altså med 12.

Voksende og aftagende funktioner

En funktion kaldes *voksende* hvis funktionsværdien altid bliver større når den uafhængige variabel bliver større. Den kaldes *aftagende* hvis funktionsværdien altid bliver mindre når den uafhængige variabel bliver større. Man definerer voksende og aftagende på følgende måde:

Definition 1.33

Lad der være givet en funktion f og to tal $x_1, x_2 \in \mathrm{Dm}(f)$. Hvis der gælder, at

$$x_2 > x_1 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) \geq f(x_1) \ ,$$

kaldes funktionen *voksende*, mens funktionen kaldes *aftagende*, hvis

$$x_2 > x_1 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) \leq f(x_1) \ ,$$

Definitionen siger altså at en funktion er voksende hvis man får en større funktionsværdi ved at vælge en større x-værdi. Tilsvarende er en funktion aftagende hvis man får en mindre funktionsværdi hver gang man vælger en større x-værdi.

Hvis $x_2 > x_1$, så er $\Delta x > 0$. Dvs. betingelsen for at en funktion er voksende hhv. aftagende kan også skrives

$$\Delta x > 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta f \geq 0 \ ,$$

og

$$\Delta x > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f \leq 0 \ .$$

Da en voksende funktion opfører sig således at funktionsværdierne bliver større når x bliver større, så vil grafen for en voksende funktion bevæge sig opad mod højre. Omvendt vil grafen for en aftagende funktion bevæge sig nedad mod højre (se figur 1.14).

1.8 Øvelser

Øvelse 1.1
Bestem definitionsmængderne for de følgende funktioner:

a) $f_1(x) = \dfrac{x}{1-x}$ b) $f_2(x) = \sqrt{x+7}$

c) $f_3(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$ d) $f_4(x) = 13$

e) $f_5(x) = \sqrt{4-x^2}$ f) $f_6(x) = \dfrac{7}{x^2+3}$.

Øvelse 1.2
Tegn graferne for de følgende funktioner, og bestem deres værdimængder:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $g(x) = 3x - 1 \ , \quad -4 \leq x \leq 7$

c) $h(x) = \dfrac{12}{x^2+3}$

d) $k(x) = 5 - \sqrt{x}$

e) $l(x) = \dfrac{1}{5 - \sqrt{x^2+9}}$

Øvelse 1.3
Bestem nulpunkterne for funktionerne

a) $f(x) = 2x - 8$ b) $g(x) = (6x-3) \cdot \sqrt{(7-x)}$

Øvelse 1.4
Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = 3x - 6 \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 - 9 \ .$$

a) Beregn $(f+g)(2)$, $(f-g)(8)$ og $(f \cdot g)(0)$.

b) Bestem forskrifterne for $3 \cdot f$ og $\frac{f}{g}$.

c) Bestem en forskrift for $3 \cdot f + \frac{g}{f}$.

d) Bestem $\mathrm{Dm}\left(\frac{f}{g}\right)$ og $\mathrm{Dm}\left(\frac{g}{f}\right)$.

Øvelse 1.5
Bestem værdimængderne for $\frac{f}{g}$ og $\frac{g}{f}$ når

$$f(x) = 3x \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 + 1 \ .$$

Øvelse 1.6
De to funktioner p og q er givet ved

$$p(x) = 4x - 2 \quad \text{og} \quad q(x) = -2x + 5 \ .$$

Løs ligningerne

a) $(p+q)(x) = 5$ b) $(q-p)(x) = 13$

c) $(2p-q)(x) = 21$ d) $(p+3q)(x) = -7$

e) $\left(\frac{p}{q}\right)(x) = 6$ f) $\left(\frac{q}{p}\right)(x) = \dfrac{p(2)}{4}$

Øvelse 1.7
Bestem forskrifterne for $f \circ g$ og $g \circ f$ når

a) $f(x) = x^2 - 3$ og $g(x) = 5x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ og $g(x) = 1 + x$

c) $f(x) = \sqrt{9-x}$ og $g(x) = 2x - 3$

d) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ og $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$

Øvelse 1.8
Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{og} \quad g(x) = 3x^2 + 1 \ .$$

a) Bestem forskrifterne for $f \circ g$ og $g \circ f$.

b) Bestem definitionsmængderne for $f \circ g$ og $g \circ f$.

c) Bestem værdimængderne for $f \circ g$ og $g \circ f$.

Øvelse 1.9
Bestem forskriften for den funktion hvis graf er grafen for f parallelforskudt med $(4, 1)$, når

a) $f(x) = 5x - 3$
b) $f(x) = \sqrt{x+4}$
c) $f(x) = x^2$
d) $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$

Øvelse 1.10
Bestem ved at tegne graferne, hvilke af de følgende funktioner der er injektive:

a) $f(x) = x^2 - 4$
b) $g(x) = \sqrt{2x+10}$
c) $h(x) = \dfrac{1}{x+3}$
d) $k(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Øvelse 1.11
Bestem de inverse funktioner til

a) $f_1(x) = 2x + 6$
b) $f_2(x) = -x + 3$
c) $f_3(x) = x$
d) $f_4(x) = \frac{1}{2}x + 5$
e) $f_5(x) = 6x - 1$
f) $f_6(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

Øvelse 1.12
De to funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = \frac{x}{x-2} \quad \text{og} \quad g(x) = \frac{2x}{x-1} \ .$$

Er disse to funktioner hinandens inverse?

Øvelse 1.13
En størrelse vokser fra $x_1 = 20$ til $x_2 = 37$.

Bestem den absolutte og den relative tilvækst.

Øvelse 1.14
En størrelse t har en begyndelsesværdi på $t_1 = 45$. Størrelsen får herefter en relativ tilvækst på $r_t = 0{,}71$.

Bestem slutværdien t_2.

Øvelse 1.15
En størrelse p vokser fra p_1 til p_2. Den absolutte tilvækst er $\Delta p = 10$, mens den relative tilvækst er $r_p = 0{,}8$.

Bestem p_1 og p_2.

Øvelse 1.16
En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 - x \ .$$

Bestem funktionstilvæksten, når x vokser fra $x_1 = 5$ til $x_2 = 7$.

2 Lineære funktioner

Lineære funktioner er nogle af de simpleste funktioner at arbejde med. Som bekendt er lineære funktioner defineret på følgende måde:

Definition 2.1

En *lineær funktion* er en funktion af typen

$$f(x) = ax + b ,$$

hvor a og b er to tal.

Her er de lineære funktioner defineret ud fra deres forskrift. Dvs. definitionen siger intet om egenskaberne for lineære funktioner, disse egenskaber skal man i stedet udlede ud fra forskriften.

Men man kan også vende tingene på hovedet og i stedet definere lineære funktioner ud fra de egenskaber de skal have. Her følger derfor en alternativ definition på hvad en lineær funktion er:

Definition 2.2: Alternativ definition

En lineær funktion f er en funktion der opfylder at en fast absolut tilvækst i den uafhængige variabel medfører en (anden) fast absolut tilvækst i den afhængige variabel.

Hvis det er sandt at begge disse definitioner kan anvendes som definition på en lineær funktion, så må definitionerne være ækvivalente. Dvs. definition 2.1 skal føre til egenskaben beskrevet i definition 2.2, og definition 2.2 skal føre til forskriften i definition 2.1.

Definerer man lineære funktioner som i definition 2.1, så er forskriften givet. Man kan så undersøge hvordan Δy ser ud når Δx er et fast tal. Det giver

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (a(x + \Delta x) + b) - (ax + b) = a \cdot \Delta x .$$

Dvs. hvis Δx er givet, så er $\Delta y = a \cdot \Delta x$. Altså svarer der til en fast absolut tilvækst Δx i x en (anden) fast absolut tilvækst $\Delta y = a \cdot \Delta x$ i y. Så definition 2.1 fører faktisk til egenskaben i definition 2.2.

Tager man omvendt udgangspunkt i definition 2.2, så ved man at en absolut tilvækst i x fører til en absolut tilvækst i y. Den tilvækst i y der svarer til

$\Delta x = 1$, kan man kalde a. Der gælder så

$$\Delta x = 1 \Longrightarrow \Delta y = a \ .$$

Så må der også gælde

$$\Delta x = 2 \Longrightarrow \Delta y = 2a$$

og mere generelt

$$\Delta x = n \Longrightarrow \Delta y = n \cdot a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \ . \tag{2.1}$$

Hvis (x_0, y_0) er et kendt punkt på grafen for funktionen, og (x, y) er et andet vilkårligt punkt, så er $\Delta x = x - x_0$ og $\Delta y = y - y_0$, og man får

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a \quad \Longleftrightarrow \quad y - y_0 = a \cdot (x - x_0) \ .$$

Denne ligning kan omskrives til

$$y = a \cdot (x - x_0) + y_0 = a \cdot x + y_0 - a \cdot x_0 \ .$$

Omdøber man $y_0 - ax_0$ til b, så har man her forskriften fra definition 2.1. Altså fører definition 2.2 til definition 2.1.

Begge definitionerne er altså i princippet lige gode, og man kan definere lineære funktioner på flere måder alt efter hvad man lægger vægt på.

Da $\Delta y = a \cdot \Delta x$, beskriver tallet a altså hvor meget Δy vokser i forhold til Δx. Tegner man grafen, vil det derfor være sådan at jo større a er jo mere stejl bliver grafen.

Ligningen 2.1 kan i øvrigt omskrives sådan at man får

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

som er den velkendte formel for hældningskoefficienten.

2.1 Øvelser

Øvelse 2.1
Bestem uden at tegne, en forskrift for den lineære funktion hvis graf går gennem punkterne:

a) $A(-1, 6)$ og $B(2, -3)$.
b) $P(2, 13)$ og $Q(-3, 3)$.
c) $R(6, -3)$ og $S(-1, 25)$.
d) $C(14, 4)$ og $D(6, 0)$.

Øvelse 2.2
De lineære funktioner f og g har parallelle grafer. Grafen for f går gennem punktet $A(3, 4)$ og skærer førsteaksen i $(-6, 0)$. Grafen for g skærer andenaksen i $(0, -3)$.

Bestem en forskrift for hver af funktionerne f og g.

Eksponentielle funktioner

3

En *eksponentiel funktion* eller *eksponentialfunktion* defineres på følgende måde[1]

[1] I nogle beskrivelser er det kun funktioner af typen $f(x) = a^x$ der kaldes eksponentielle funktioner, mens $f(x) = b \cdot a^x$ kaldes en eksponentiel *udvikling*. Her bruges »eksponentiel funktion« dog i begge tilfælde.

Definition 3.1

En eksponentiel funktion er en funktion af typen

$$f(x) = b \cdot a^x ,$$

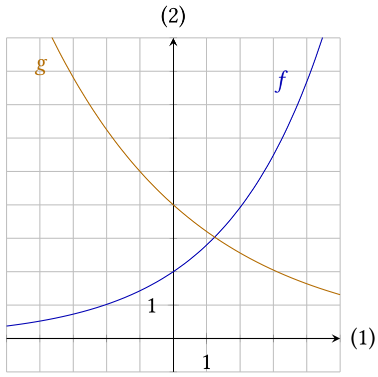
hvor a og b er to positive tal.

Tallet a i definition 3.1 kaldes *fremskrivningsfaktoren* og b kaldes *begyndelsesværdien.*

At b kaldes begyndelsesværdien skyldes at grafen for en eksponentiel funktion skærer andenaksen i punktet $(0, b)$. Dette følger af at

$$f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b .$$

Et eksempel på grafer for eksponentielle funktioner kan ses på figur 3.1. For eksponentielle funktioner gælder der specielt at deres grafer ikke skærer førsteaksen. Det skyldes, at funktionsværdierne ikke kan blive negative (eller 0) idet a^x altid er positivt så længe a er et positivt tal – uanset værdien af x.



Figur 3.1: Graferne for de to eksponentielle funktioner $f(x) = 2 \cdot 1{,}4^x$ og $g(x) = 4 \cdot 0{,}8^x$.

3.1 Eksponentiel vækst

Eksponentielle funktioner vokser på den måde at hver gang den uafhængige variabel har en fast absolut tilvækst, har den afhængige variabel en fast *relativ* tilvækst. Dette er beskrevet i følgende sætning:

Sætning 3.2

For en eksponentiel funktion gælder at hver gang x vokser med Δx ganges funktionsværdien med $a^{\Delta x}$.

Bevis
Hvis x vokser fra x_1 til x_2, så vokser funktionsværdien fra

$$y_1 = f(x_1) = b \cdot a^{x_1}$$

til

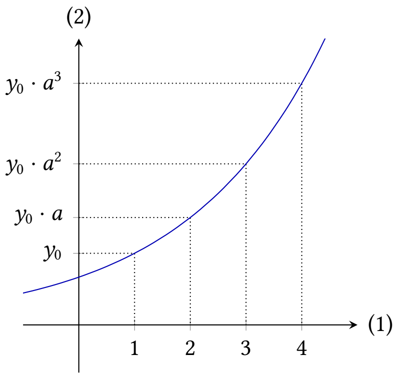
$$y_2 = f(x_2) = f(x_1 + \Delta x) = b \cdot a^{x_1+\Delta x} = b \cdot a^{x_1} \cdot a^{\Delta x} = y_1 \cdot a^{\Delta x} \ .$$

Den nye funktionsværdi y_2 er altså netop $y_1 \cdot a^{\Delta x}$, og sætningen er hermed bevist. ■

Tabel 3.2: Vækst af $f(x) = 4 \cdot 2^x$.

x	y
-3	0,5
0	4
3	32
6	256

$+3$ $+3$ $+3$ $\cdot 2^3$ $\cdot 2^3$ $\cdot 2^3$



Figur 3.3: Vækst af en eksponentiel funktion.

Eksempel 3.3 Tabel 3.2 viser hvordan en eksponentiel funktion vokser.

Her ses at for funktionen $f(x) = 4 \cdot 2^x$ gælder der at hver gang x vokser med 3 ganges funktionsværdien med $2^3 = 8$.

Når x vokser med Δx, vil $f(x)$ altså ganges med $a^{\Delta x}$. Dvs. den relative vækst er

$$r_f = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_1)} = \frac{a^{\Delta x} \cdot f(x_1) - f(x_1)}{f(x_1)} = a^{\Delta x} - 1 \ .$$

Den relative vækst af funktionen er altså $a^{\Delta x} - 1$.

Dvs. hvis $\Delta x = 1$, så vokser funktionen relativt med $a - 1$. Hvis $a < 1$, så er dette tal negativt, og man kan derfor argumentere for følgende:

Sætning 3.4

For en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ gælder:

1. Hvis $a > 1$ er funktionen voksende.
2. Hvis $0 < a < 1$ er funktionen aftagende.

Som vist ovenfor, så er den relative vækst $a - 1$ når x vokser med 1, dvs. det giver mening at definere *vækstraten* som er

$$r = a - 1 \ .$$

For vækstraten gælder følgende som følger af sætning 3.4.

Sætning 3.5

For en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ defineres *vækstraten*

$$r = a - 1 \ .$$

Der gælder så at

1. Hvis $r > 0$ er funktionen voksende.
2. Hvis $r < 0$ er funktionen aftagende.

Når man ved at relativ vækst kan beskrives vha. eksponentielle funktioner, kan man udnytte dette til at opstille matematiske modeller for relativ vækst.

Eksempel 3.6 I Honduras boede der 8,6 mio. mennesker i 2014, og befolkningsvæksten var på 1,7%.[4] Honduras' befolkning kan altså beskrives ved en eksponentiel udvikling med begyndelsesværdi 8,6 og vækstrate 1,7%.

Da vækstraten er 1,7% er fremskrivningsfaktoren

$$a = 1 + 1{,}7\% = 1 + 0{,}017 = 1{,}017 \;.$$

Befolkningstallet er altså givet ved funktionen

$$f(x) = 8{,}6 \cdot 1{,}017^x$$

hvor x er antal år efter 2014, og $f(x)$ er befolkningstallet i mio.

Eksempel 3.7 En bakteriekultur vokser eksponentielt sådan at antallet af bakterier kan beskrives ved funktionen

$$B(t) = 364 \cdot 1{,}72^t \;,$$

hvor t er tiden i timer, og $B(t)$ er antallet af bakterier.

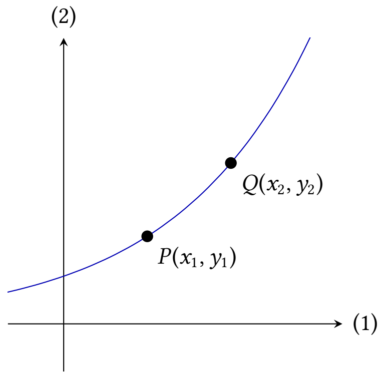
Ud fra forskriften kan man udlede følgende: Til tiden $t = 0$ er der 364 bakterier. Fremskrivningsfaktoren er 1,72, hvilket vil sige at vækstraten er

$$r = 1{,}72 - 1 = 0{,}72 \;.$$

Antallet af bakterier har altså en relativ vækst på 0,72 i timen (eller en vækst på 72% i timen).

3.2 Beregning af forskriften

Hvis man har to punkter på grafen for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$, kan man bestemme konstanterne a og b i forskriften (se figur 3.4).



Figur 3.4: Grafen for en eksponentiel funktion går gennem P og Q.

Sætning 3.8

Hvis grafen for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ går gennem de to punkter $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$, er

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \qquad \text{og} \qquad b = \frac{y_1}{a^{x_1}} \;.$$

Bevis
Hvis $P(x_1, y_1)$ ligger på grafen for $f(x) = b \cdot a^x$, gælder der at

$$y_1 = b \cdot a^{x_1} \;. \tag{3.1}$$

Da $Q(x_2, y_2)$ også ligger på grafen for f, er

$$y_2 = b \cdot a^{x_2}. \tag{3.2}$$

Dividerer man nu ligning (3.2) med ligning (3.1) får man

$$\begin{aligned}
\frac{y_2}{y_1} &= \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} && \Leftrightarrow \\
\frac{y_2}{y_1} &= \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} && \Leftrightarrow \\
\frac{y_2}{y_1} &= a^{x_2 - x_1} && \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = a \ ,$$

og formlen for a er så bevist.

For at bevise formlen for b isolerer man b i ligning (3.1) og får

$$y_1 = b \cdot a^{x_1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{y_1}{a^{x_1}} = b \ .$$

Formlen for b er dermed også bevist. ■

Eksempel 3.9 Hvis grafen for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ går gennem de to punkter $P(2,12)$ og $Q(5,96)$ er

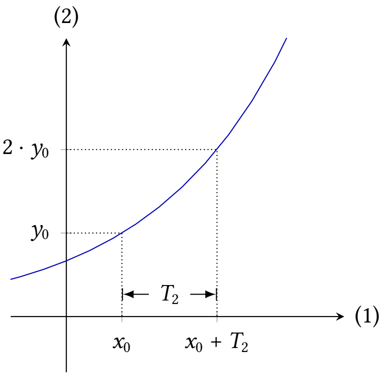
$$x_1 = 2, \quad y_1 = 12, \quad x_2 = 5 \quad \text{og} \quad y_2 = 96 \ .$$

Benytter man nu formlerne fra sætning 3.8 fås

$$a = \sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[5-2]{\frac{96}{12}} = \sqrt[3]{8} = 2 \ ,$$

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{12}{2^2} = \frac{12}{4} = 3 \ .$$

Funktionens forskrift er så $f(x) = 3 \cdot 2^x$.



Figur 3.5: Når man lægger T_2 til x_0, fordobles funktionsværdien.

3.3 Fordoblings- og halveringskonstant

Funktionsværdien af en eksponentiel funktion har ifølge sætning 3.2 en fast relativ tilvækst, når x har en fast absolut tilvækst. Hvis en eksponentiel funktion er voksende, giver det derfor mening at undersøge, hvor meget x skal vokse, for at funktionsværdien har en relativ tilvækst på 1 – dvs. den fordobles. Dette tal kalder man *fordoblingskonstanten* T_2.

Ifølge sætning 3.2 ganges funktionsværdien med $a^{\Delta x}$, når x stiger med Δx. For at bestemme T_2 skal man derfor finde ud af, hvornår $a^{\Delta x} = 2$.[2] T_2 er altså løsningen til ligningen

[2]Idet en fordobling (som er det samme som at lægge 100% til) svarer til at gange med 2.

$$a^{T_2} = 2 \ .$$

Løsningen til denne ligning er[3]

[3]Funktionen log gennemgås i kapitel 4.

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} \ .$$

På figur 3.5 er fordoblingskonstanten illustreret. En vigtig pointe er her, at funktionsværdien fordobles *hver gang* man lægger T_2 til x. At funktionsværdien fordobles, hver gang man går et bestemt stykke ud ad førsteaksen, gælder kun for eksponentielle funktioner.

For aftagende eksponentielle funktioner giver det i øvrigt ikke så meget mening at tale om en fordobling; her bestemmer man i stedet en *halveringskonstant*. Halveringskonstanten $T_{\frac{1}{2}}$ defineres helt analogt til fordoblingskonstanten, sådan at der gælder følgende.

Sætning 3.10

For en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ gælder

1. Hvis f er voksende er fordoblingskonstanten $T_2 = \dfrac{\log(2)}{\log(a)}$.
2. Hvis f er aftagende er halveringskonstanten $T_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(a)}$.

Eksempel 3.11 Den eksponentielle funktion $f(x) = 3 \cdot 1{,}7^x$ har fremskrivningsfaktoren $a = 1{,}7$. Fordoblingskonstanten er derfor

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} = \frac{\log(2)}{\log(1{,}7)} = 1{,}31 \ .$$

Dvs. at hver gang x stiger med 1,31 fordobles funktionsværdien.

En stigning fra $x = 5$ til $x = 6{,}31$ vil således give en fordobling af funktionsværdien, og det vil en stigning fra $x = 100$ til $x = 101{,}31$ også.

3.4 Øvelser

Øvelse 3.1
En eksponentiel funktion er givet ved $f(x) = 3{,}2 \cdot 1{,}7^x$.

a) Hvor meget ganges funktionsværdien med, når x-værdien vokser med 1?
b) Hvor stor er den relative vækst af y-værdien, når x-værdien vokser med 1.
c) Hvor meget ganges funktionsværdien med, når x-værdien vokser med 5?
d) Hvor stor er den relative vækst af y-værdien, når x-værdien vokser med 5?
e) Hvor meget skal x-værdien stige, hvis funktionsværdien skal vokse med 80%?

Øvelse 3.2
En eksponentiel funktion er givet ved $f(x) = 3{,}2 \cdot 0{,}63^x$.

a) Hvor meget ganges funktionsværdien med, når x-værdien vokser med 1?
b) Hvor stor er den relative vækst af funktionsværdien, når x-værdien vokser med 1.
c) Hvor meget ganges funktionsværdien med, når x-værdien vokser med 3?
d) Hvor stor er den relative vækst af funktionsværdien, når x-værdien vokser med 3?
e) Hvor meget skal x-værdien vokse, hvis funktionsværdien skal aftage med 50%?

Øvelse 3.3
Om en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ oplyses, at når $x = 2$ er funktionsværdien 10, og funktionsværdien har en relativ vækst på 0,25, når x har en absolut vækst på 3.

Bestem en forskrift for funktionen.

Øvelse 3.4
Grafen for en eksponentiel funktion går gennem de to punkter $(-2, 0.3)$ og $(5, 7.0)$.

a) Bestem en forskrift for funktionen.
b) Bestem vækstraten.

Øvelse 3.5
Grafen for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ går gennem punkterne $(2, 6)$ og $(5, 45)$.

Bestem funktionens forskrift.

Øvelse 3.6
En eksponentiel funktion $g(x)$ har en graf, der går igennem punkterne $(1, 2)$ og $(3, 32)$.

a) Bestem en forskrift for funktionen.
b) Bestem $g(2)$.
c) Bestem den relative funktionstilvækst, når x vokser med 4.

Øvelse 3.7
Grafen for en eksponentielt voksende funktion f går gennem punkterne $(1,6)$ og $(3,54)$.

a) Bestem en forskrift for funktionen.
b) Bestem fordoblingskonstanten.

Øvelse 3.8
En voksende eksponentialfunktion har en vækstrate på 34,2%.

Bestem fordoblingskonstanten.

Øvelse 3.9
En aftagende eksponentialfunktion har en halveringskonstant på 8,9.

Bestem vækstraten.

Øvelse 3.10
En aftagende eksponentiel funktion har en halveringskonstant på 6,5. Funktionens graf går gennem punktet $(3.4, 20.9)$.

Bestem en forskrift for funktionen.

Logaritmer 4

En eksponentiel ligning er en ligning af typen $a^x = k$, hvor a er grundtallet, og k er et tal. Sådanne ligninger kan ikke løses vha. de sædvanlige aritmetiske operationer. For at løse sådanne ligninger har man brug for de såkaldte *logaritmer*.

Definition 4.1

Hvis a og k er to positive tal, defineres tallet $\log_a(k)$ som det tal, som løser ligningen $a^x = k$.

Funktionen $\log_a$ kaldes *logaritmen med grundtal a*.

Eksempel 4.2 Fra definitionen på logaritmen med grundtal a, kan man udlede, at

$$\begin{aligned}
\log_2(8) &= 3 && \text{fordi} && 2^3 &= 8 \\
\log_7(49) &= 2 && \text{fordi} && 7^2 &= 49 \\
\log_{10}(10\,000) &= 4 && \text{fordi} && 10^4 &= 10\,000 \\
\log_9\left(\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{2} && \text{fordi} && 9^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{3} \\
\log_{4,5}(2) &= 0{,}4608 && \text{fordi} && 4{,}5^{0{,}4608} &= 2\ .
\end{aligned}$$

Definitionen siger altså, at hvis $x = \log_a(k)$, så er x løsning til ligningen $a^x = k$. Heraf følger umiddelbart, at

$$a^{\log_a(k)} = k \quad \text{og} \quad x = \log_a(a^x)\ .$$

Dette kan formuleres som en sætning.

Sætning 4.3

For logaritmen med grundtal a gælder, at

$$a^{\log_a(x)} = x \quad \text{og} \quad \log_a(a^x) = x\ .$$

Dvs. $\log_a(x)$ er faktisk den inverse funktion til a^x.

Regneregler for logaritmer

Sætning 4.3 kan sammen med potensregnereglerne bruges til at bevise følgende sætning:

Sætning 4.4

For logaritmen med grundtal a gælder følgende:

1. $\log_a(r \cdot s) = \log_a(r) + \log_a(s)$.
2. $\log_a\left(\frac{r}{s}\right) = \log_a(r) - \log_a(s)$.
3. $\log_a(r^p) = p \cdot \log_a(r)$.

Bevis
For at bevise de tre regneregler udnyttes sætning 4.3, dvs. at $r = a^{\log_a(r)}$ og $r = \log_a(a^r)$.[1]

[1] I beviset udnytter man desuden, at

1. $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$,
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ og
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

1. For $\log_a(r \cdot s)$ gælder, at

$$\begin{aligned}\log_a(r \cdot s) &= \log_a\left(a^{\log_a(r)} \cdot a^{\log_a(s)}\right)\\ &= \log_a\left(a^{\log_a(r)+\log_a(s)}\right) = \log_a(r) + \log_a(s)\ .\end{aligned}$$

2. For $\log_a\left(\frac{r}{s}\right)$ gælder, at

$$\begin{aligned}\log_a\left(\frac{r}{s}\right) &= \log_a\left(\frac{a^{\log_a(r)}}{a^{\log_a(s)}}\right)\\ &= \log_a\left(a^{\log_a(r)-\log_a(s)}\right) = \log_a(r) - \log_a(s)\ .\end{aligned}$$

3. For $\log_a(r^p)$ gælder, at

$$\log_a(r^p) = \log_a\left(\left(a^{\log_a(r)}\right)^p\right) = \log_a\left(a^{p \cdot \log_a(r)}\right) = p \cdot \log_a(r)\ .$$

Hermed er sætningen bevist. ■

Eksempel 4.5 Nogle af de ting, man kan udlede af sætning 4.4 er bl.a. at

$$\begin{aligned}\log_a(ax) &= \log_a(a) + \log_a(x) = 1 + \log_a(x)\ ,\\ \log_a\left(\frac{x}{a}\right) &= \log_a(x) - \log_a(a) = \log_a(x) - 1\ ,\\ \log_a\left(\frac{1}{x}\right) &= \log_a(x^{-1}) = -1 \cdot \log_a(x) = -\log_a(x)\ .\end{aligned}$$

Det viser sig i øvrigt, at der er en simpel sammenhæng mellem logaritmer med forskellige grundtal:

Sætning 4.6

For logaritmen med grundtal a og logaritmen med grundtal b gælder

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}\ .$$

Bevis
Sætningen kan bevises ud fra egenskaben i sætning 4.3 og regneregel 3 fra sætning 4.4. Man har nemlig

$$\log_a(x) = \log_a\left(b^{\log_b(x)}\right) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)\ ,$$

dvs. $\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$, hvilket kan omskrives til

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} . \qquad \blacksquare$$

Sætning 4.6 viser, at logaritmer med forskellige grundtal er proportionale. Den viser også, at man i virkeligheden kun har brug for at kende én logaritmefunktion.

Eksempel 4.7 Hvis man vil beregne $\log_2(16)$, men kun har en »$\log_{10}$-knap« på lommeregneren kan man bruge sætning 4.6 på denne måde:

$$\log_2(16) = \frac{\log_{10}(16)}{\log_{10}(2)} .$$

Tallet $\frac{\log_{10}(16)}{\log_{10}(2)}$ beregnes så på lommeregneren, og man får

$$\log_2(16) = 4 .$$

Idet man i princippet kun har brug for at kende én logaritmefunktion, så er det faktisk kun nødvendigt med én logaritme-knap på en lommeregner. Man skal så bare finde ud af, hvilket grundtal, man vil benytte. Normalt vil en lommeregner faktisk have to logaritme-knapper: én med grundtal 10, og én med grundtal e (Eulers tal, som er nærmere beskrevet i næste afsnit).

De to logaritmer $\log_{10}$ og $\log_e$ kaldes *titals-logaritmen* og *den naturlige logaritme*, og de betegnes ofte med hhv. log (titals-logaritmen) og ln (den naturlige logaritme), dvs.

- *Titals-logaritmen* (log) er logaritmen med grundtal 10, altså $\log = \log_{10}$.
- *Den naturlige logaritme* (ln) er logaritmen med grundtal e, altså $\ln = \log_e$.

Der gælder derfor også

$$\begin{aligned} y = \log(x) \quad &\Leftrightarrow \quad x = 10^y \quad \text{og} \\ y = \ln(x) \quad &\Leftrightarrow \quad x = e^y . \end{aligned}$$

Nogle CAS-værktøjer sætter i øvrigt log lig med den naturlige logaritme i stedet for titals-logaritmen. Der kan derfor nogle gange være en idé i at holde sig til at anvende den natulige logaritme (ln er altid den naturlige logaritme), for som sætning 4.6 viser, har man jo kun brug for én logaritmefunktion.

4.1 Den naturlige logaritme

Eulers tal

Tallet e, også kaldet *Eulers tal*, spiller en stor rolle i matematikken. Det er lige som π et *irrationalt* tal.[2] e har altså et uendeligt antal decimaler. Med

[2] Et irrationalt tal, er et tal, som ikke kan skrives som en brøk. Irrationale tal er kendetegnet ved, at de har uendeligt mange decimaler, og at der intet gentagende mønster er i decimalerne.

24 decimalers præcision er

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\ldots \ .$$

e dukker op mange steder, men her ses kun på, hvordan tallet bruges i forbindelse med den naturlige logaritme.

Den naturlige logaritme

Den naturlige logaritme er defineret til at være logaritmen med grundtal e:

Definition 4.8

Den *naturlige logaritme*, ln, er logaritmen med grundtal e:

$$\ln(x) = \log_e(x) \ .$$

Da logaritmefunktioner på sin vis er defineret ud fra eksponentialfunktioner, findes der også en »naturlig eksponentialfunktion«, som er eksponentialfunktionen med grundtal e. Den naturlige eksponentialfunktion betegnes ofte exp, dvs.

$$\exp(x) = e^x \ .$$

Det viser sig, at alle eksponentialfunktioner kan omskrives, så de er baseret på denne funktion. Dette gennemgås i næste afsnit.

4.2 Eksponentielle funktioner

En eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ skrives ofte på en anden måde. Idet $a = e^{\ln(a)}$, kan en eksponentiel funktion nemlig skrives som

$$f(x) = b \cdot a^x = b \cdot \left(e^{\ln(a)}\right)^x = b \cdot e^{\ln(a) \cdot x} \ .$$

Dette skrives så som

$$f(x) = b \cdot e^{kx} \quad (\text{hvor } k = \ln(a)) \ .$$

Eksempel 4.9 Den eksponentielle funktion $y = 4{,}6 \cdot 9{,}1^x$ kan skrives som

$$f(x) = 4{,}6 \cdot e^{2{,}2x} \ ,$$

fordi $\ln(9{,}1) = 2{,}2$.

For en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ gælder der som bekendt, at funktionen er voksende, hvis $a > 1$ og aftagende, hvis $0 < a < 1$.

Da $k = \ln(a)$ kan man udlede, at der for den eksponentielle funktion $f(x) = b \cdot e^{kx}$ gælder

1. Funktionen er voksende, hvis $k > 0$.
2. Funktionen er aftagende, hvis $k < 0$.

Man skelner derfor nogle gange mellem voksende og aftagende eksponentielle funktioner, ved at dele op i to tilfælde, således at man skriver

1. $f(x) = b \cdot e^{kx}$, når funktionen er voksende.
2. $f(x) = b \cdot e^{-kx}$, når funktionen er aftagende.

På denne måde er k altid et positivt tal, og fortegnet regnes ikke som en del af k.

Der findes flere gode grunde til at skrive en eksponentiel funktion på denne måde. Én af grundene er, at man – hvis man skal regne med enheder – kan få regnestykket til at gå op. En anden god grund hænger sammen med en gren af matematikken, der hedder differentialregning; forklaringen herpå må vente til senere.

Fordoblings- og halveringskonstanter

For en voksende eksponentiel funktion, kan man som bekendt beregne fordoblingskonstanten T_2 vha. formlen

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} .$$

Hvis den voksende eksponentielle funktion er på formen $f(x) = b \cdot e^{kx}$ bliver dette i stedet til[3]

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{k} \qquad (\text{når } f(x) = b \cdot e^{kx}) .$$

[3]Her udnytter man, at $k = \ln(a)$.

Hvis en aftagende eksponentiel funktion skrives på formen $y = b \cdot e^{-kx}$ (bemærk fortegnet), har man, at $-k = \ln(a)$, derfor kan man skrive halveringskonstanten, som[4]

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-k} = \frac{\ln(2^{-1})}{-k} = \frac{-1 \cdot \ln(2)}{-k} = \frac{\ln(2)}{k} .$$

[4]At $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ følger af potensregnereglen $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Halveringskonstanten kan altså beregnes ud fra formlen

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{k} \qquad (\text{når } f(x) = b \cdot e^{-kx}) .$$

4.3 Øvelser

Øvelse 4.1
Beregn

a) $\log_{10}(1000)$
b) $\log_3(9)$
c) $\log_4(64)$
d) $\log_{10}(0{,}1)$
e) $\log_7(1)$
f) $\log_2(16)$
g) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$
h) $\log_5(625)$

Øvelse 4.2
Beregn

a) $\log_3(3) + \log_3(9)$
b) $\log_{10}(1000) - \log_{10}(100)$
c) $\log_9(9^8)$
d) $\log_6(\sqrt{6})$

Øvelse 4.3
Beregn følgende tal ved at omskrive til en anden logaritme.

a) $\log_3(8)$
b) $\log_8(139)$
c) $\log_{12}(45)$
d) $\log_5(0{,}6)$
e) $\log_6(3987)$
f) $\log_{73}(932\,108)$

Øvelse 4.4
Beregn uden brug af lommeregner:

a) $\log(2) + \log(5)$
b) $2 \cdot \log(5) + \log(4)$
c) $\log(25) + 2 \cdot \log(2)$
d) $\log(25) - 2 \cdot \log(5)$
e) $3 \cdot \log(2) + 3 \cdot \log(5)$
f) $\log(8) + 3 \cdot \log(5)$
g) $\log(8) - 3 \cdot \log(2)$
h) $\log(8) - \log(2) + \log\left(\frac{1}{4}\right)$

Øvelse 4.5
Løs følgende ligninger uden brug af lommeregner:

a) $\log(x) = 4$
b) $\log(x) = -1$
c) $\log(x) = 3$
d) $\log(x) = 2$
e) $\log(x) = -2$
f) $\log(x) = 0$

Øvelse 4.6
Løs følgende ligninger

a) $\log(x - 3) = 4$
b) $\log(4x^2) = 3$
c) $\log(2x - 6) = 2$
d) $\log(10x + 25) = 3$
e) $\log(x + 5) = 2 - \log(x - 5)$
f) $\log(x^2 + 4x + 4) = 3$

Øvelse 4.7
Benyt logaritme-regnereglerne til at omskrive følgende udtryk så meget som muligt

a) $\log(100x^3)$
b) $\log(1000t)$
c) $\log(10p^4 \cdot q^2)$
d) $\log\left(\sqrt{1000u^3}\right)$

Øvelse 4.8
Om de to tal a og b ved man, at $\ln(a) = 1{,}5$ og $\ln(b) = 0{,}5$.

Brug dette til at beregne følgende (uden brug af lommeregner):

a) $\ln(a \cdot b)$
b) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$
c) $\ln(a^4)$
d) $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
e) $\ln(b^7)$
f) $\ln(a^3 \cdot b^{10})$

Øvelse 4.9
Løs følgende ligninger

a) $2^x = 50$
b) $\ln(x) = 3{,}7$
c) $\ln(4x - 3) = 5{,}1$
d) $4 \cdot 6^{x+2} = 100$
e) $6 \cdot 3{,}9^x = 78$
f) $5{,}2 \cdot 7^{3-x} = 81{,}5$

Øvelse 4.10
Omskriv i hvert af nedenstående tilfælde den eksponentielle funktion til formen $f(x) = b \cdot \mathrm{e}^{kx}$ og beregn fordoblings-/halveringskonstanten.

a) $f(x) = 0{,}45 \cdot 7{,}8^x$
b) $f(x) = 1{,}7 \cdot 0{,}56^x$
c) $f(x) = 45{,}6 \cdot 1{,}2^x$
d) $f(x) = 6{,}1 \cdot 0{,}34^x$

Øvelse 4.11
Find en forskrift for den eksponentielle funktion, der går gennem de to punkter P og Q. Forskriften skal være på formen $f(x) = b \cdot \mathrm{e}^{kx}$.

a) $P(2, 4)$ og $Q(6, 7)$
b) $P(1, 1)$ og $Q(4, 26)$
c) $P(-3, 7)$ og $Q(2, 1)$
d) $P(0, 17)$ og $Q(5, 1)$

5 Potensfunktioner

Definition 5.1

En potensfunktion er en funktion af typen

$$f(x) = b \cdot x^a, \qquad x > 0\ ,$$

hvor a og b er to konstanter, og $b > 0$.

Bemærk, at en potensfunktion kun er defineret for positive værdier af x. Dette skyldes, at der findes værdier af a, hvor x^a ikke er defineret for alle tal.[1]

[1] Et eksempel er x^{-1}, som er det samme som $\frac{1}{x}$. Da man ikke må dividere med 0 er denne funktion ikke defineret for $x = 0$.

Idet det også er et krav, at $b > 0$, så vil en potensfunktions graf kun befinde sig i første kvadrant, dvs. både første- og andenkoordinaten for punkter på funktionens graf vil være positive.

For en potensfunktion giver det altså ikke mening at tale om en skæring med andenaksen, idet funktionen slet ikke er defineret for $x = 0$. Til gengæld kan man udlede, at en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ altid vil gå gennem punktet $(1, b)$, idet

$$f(1) = b \cdot 1^a = b\ .$$

Et par eksempler på potenssammenhænge kunne være de følgende.

Eksempel 5.2 Arealet A af en cirkel med radius r er

$$A = \pi \cdot r^2\ .$$

Her er der altså en potenssammenhæng mellem radius r og arealet A. De to konstanter a og b er hhv. $a = 2$ og $b = \pi$.

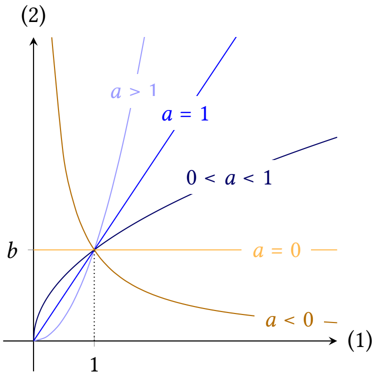
Eksempel 5.3 Hastigheden af en tsunamibølge v (i km/h) er en potensfunktion af havdybden d (i meter),[1]

$$v = 11{,}2 \cdot d^{0{,}5}\ .$$

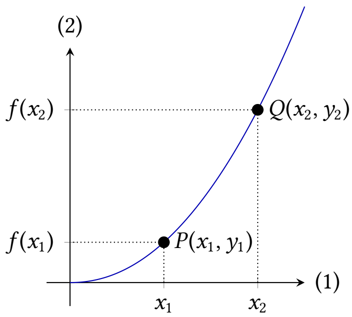
Her er $a = 0{,}5$ og $b = 11{,}2$.

5.1 Grafen for en potensfunktion

Tallet a i definition 5.1 kaldes *eksponenten*. Dette tal bestemmer, hvorledes grafen for en potensfunktion ser ud. På figur 5.1 kan man se, hvordan grafens udseende ændrer sig med forskellige værdier af a.



Figur 5.1: Grafen for en potensfunktion kan se ud på flere måder.



Figur 5.2: To punkter på grafen for en potensfunktion.

Generelt gælder der følgende sætning:

Sætning 5.4

For en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ gælder, at

1. Hvis $a > 0$ er funktionen voksende.
2. Hvis $a < 0$ er funktionen aftagende.

Hvis man har grafen for en potensfunktion, kan man beregne de to konstanter a og b ud fra to punkter på grafen. (Se figur 5.2.)

Sætning 5.5

Hvis grafen for en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ går gennem punkterne $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$, så er

$$a = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} \qquad \text{og} \qquad b = \frac{y_1}{x_1^a} \, .$$

Bevis
Hvis $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ ligger på grafen for $f(x) = b \cdot x^a$, så er

$$\begin{aligned} y_2 &= b \cdot x_2^a \\ y_1 &= b \cdot x_1^a \end{aligned} \tag{5.1}$$

Disse to ligninger kan man dividere med hinanden, hvorved man får

$$\begin{aligned} \frac{y_2}{y_1} &= \frac{b x_2^a}{b x_1^a} && \Leftrightarrow \\ \frac{y_2}{y_1} &= \frac{x_2^a}{x_1^a} && \Leftrightarrow \\ \frac{y_2}{y_1} &= \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a . \end{aligned}$$

Da dette er en eksponentiel ligning, bliver man nødt til at tage logaritmen på begge sider, for at løse ligningen. Man får så

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) &= \log\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a\right) && \Leftrightarrow \\ \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) &= a \cdot \log\left(\frac{x_2}{x_1}\right) && \Leftrightarrow \\ \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} &= a \, . \end{aligned}$$

Hermed er formlen for a bevist.

For at bevise formlen for b, ser man på ligning (5.1):

$$y_1 = b \cdot x_1^a \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{y_1}{x_1^a} = b \, .$$

Så er formlen for b ligeledes bevist. ■

5.2 Potensvækst

En potensfunktion vokser på den specielle måde, at hvis den uafhængige variabel bliver ganget med en fast værdi, så ganges den afhængige variabel også med en fast værdi.[2] Der gælder nemlig følgende sætning.

[2] Dog ikke den samme faste værdi.

Sætning 5.6

For en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ gælder, at hvis x ganges med et tal k, så ganges funktionsværdien $f(x)$ med k^a.

Bevis
Hvis x ganges med k, så bliver den nye funktionsværdi $f(k \cdot x)$. Men

$$f(k \cdot x) = b \cdot (k \cdot x)^a = b \cdot k^a \cdot x^a = k^a \cdot b \cdot x^a = k^a \cdot f(x)\ .$$

Altså ganges funktionsværdien med k^a. ■

Eksempel 5.7 I tabel 5.3 kan man se, hvordan funktionen $f(x) = 4x^3$ vokser. I denne funktions forskrift er eksponenten $a = 3$. Hvis x ganges med 2 bliver y derfor ganget med 2^3, dvs. 8.

Tabel 5.3: Vækst af $f(x) = 4x^3$.

x	y
1	4
2	32
4	256
8	2048

Eksempel 5.8 En potensfunktion $f(x) = b \cdot x^2$ har en graf, der går gennem punktet $(3, 7)$. Her kender man ikke værdien af b, men man kan alligevel finde et andet punkt, som funktionen går igennem.

Hvis man ganger x med 4,[3] får man den nye værdi $3 \cdot 4 = 12$. Den nye funktionsværdi får man da ved at gange den gamle (7) med 4^2 (idet eksponenten $a = 2$). Dette giver

$$7 \cdot 4^2 = 7 \cdot 16 = 112\ .$$

Funktionens graf går altså også igennem $(12, 112)$.

[3] Der er intet specielt ved tallet 4, det kunne have været hvilket som helst positivt tal.

At gange med et tal svarer til relativ vækst. Ganger man med et tal k har man nemlig en relativ vækst på $k-1$. Det giver derfor mening at skrive tallet k sætning 5.6 som $1 + r_x$, hvor r_x er den relative vækst af den uafhængige variabel x. Tallet k^a bliver så den relative vækst for den afhængige variabel y, sådan at

$$k = 1 + r_x \qquad \text{og} \qquad k^a = 1 + r_y\ .$$

Dette kan sammenfattes i en sætning:

Sætning 5.9

Hvis x-værdien for en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ vokser relativt med r_x, så vil funktionsværdien vokse relativt med r_y, hvor

$$1 + r_y = (1 + r_x)^a\ .$$

Eksempel 5.10 Funktionen $f(x) = 4{,}2 \cdot x^{0{,}5}$ er en voksende funktion. Hvis x vokser med 80% svarer det til, at $r_x = 0{,}80$. Dvs.

$$1 + r_y = (1 + 0{,}80)^{0{,}5} = 1{,}342\ .$$

r_y må så være 0,342, hvilket svarer til 34,2%. Hver gang x vokser med 80% vokser y altså med 34,2%.

Eksempel 5.11 Funktionen $f(x) = 5x^{-2}$ er en aftagende funktion med $a = -2$. Hvis x vokser med 40% er $r_x = 0{,}40$, dvs.

$$1 + r_y = (1 + 0{,}40)^{-2} = 0{,}510 \ .$$

Det svarer til, at

$$r_y = 0{,}510 - 1 = -0{,}490 = -49\% \ .$$

Hvis x vokser med 40% *falder* y altså med 49%.

Eksempel 5.12 Hvis man om en funktion $f(x) = 2x^3$ ved, at y er vokset med 50%, hvor mange procent er så x vokset?

Dette finder man ud af ved at sætte $r_y = 0{,}50$ ind i formlen, så man får

$$1 + 0{,}50 = (1 + r_x)^3 \ .$$

Denne ligning løser man:

$$\begin{aligned} 1 + 0{,}50 &= (1 + r_x)^3 && \Leftrightarrow \\ \sqrt[3]{1{,}50} &= 1 + r_x && \Leftrightarrow \\ \sqrt[3]{1{,}50} - 1 &= r_x && \Leftrightarrow \\ 0{,}145 &= r_x \ . \end{aligned}$$

x er altså vokset med 14,5%, hvis y er vokset med 50%.

5.3 Proportionalitet

To variable y og x siges at være ligefrem proportionale, når

$$y = k \cdot x \ ,$$

hvor k er en konstant. Hvis man i stedet for k kalder konstanten b, har man sammenhængen

$$y = b \cdot x = b \cdot x^1 \ ,$$

der er en potenssammenhæng, med $a = 1$.

På samme måde er omvendt proportionalitet også en potenssammenhæng. To variable x og y er nemlig omvendt proportionale, når $x \cdot y = k$, hvilket også kan skrives som[4]

[4] I omskrivningen bruges, at $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$.

$$y = \frac{b}{x} = b \cdot \frac{1}{x} = b \cdot x^{-1} \ .$$

Omvendt proportionalitet er altså en potenssammenhæng, hvor $a = -1$.

Det giver følgende sætning.

Sætning 5.13

For en potenssammenhæng $y = b \cdot x^a$ gælder,

1. Hvis $a = 1$ er y og x ligefrem proportionale.
2. Hvis $a = -1$ er y og x omvendt proportionale.

En ligefrem proportionalitet kan altså beskrives ved potensfunktionen

$$f(x) = b \cdot x \ .$$

Grafen for denne funktion er en ret linje gennem $(0,0)$,[5] dvs. der er i princippet også tale om en lineær funktion med hældningskoefficient b, der skærer andenaksen i 0.

[5]Strengt taget skal $x > 0$, for at man kan tale om en potensfunktion, men i dette tilfælde er der ikke noget til hinder for at lade x antage negative værdier.

Ligefrem proportionalitet kan altså både opfattes som en potensfunktion med eksponent 1 og som en lineær funktion, der skærer andenaksen i 0.

5.4 Øvelser

Øvelse 5.1
En potensfunktion $f(x)$ har en graf, der går igennem punkterne $(1,3)$ og $(4,48)$.

a) Bestem en forskrift for funktionen.
b) Løs ligningen $f(x) = 12$.

Øvelse 5.2
Grafen for en potensfunktion f går gennem punkterne $(4,12)$ og $(16,48)$.

a) Bestem en forskrift for funktionen.
b) Hvad er den relative funktionstilvækst, hvis x har en relativ vækst på 0,25?

Øvelse 5.3
En potensfunktion er givet ved $f(x) = 3x^{2,4}$.

Hvor mange procent vokser funktionsværdien, hvis x vokser med 7%?

Øvelse 5.4
En potensfunktion er givet ved $f(x) = 5 \cdot x^2$.

a) Hvis x fordobles, hvor mange gange større bliver funktionsværdien så?

b) Hvis funktionsværdien er blevet 9 gange større, hvor mange gange større er x så blevet?

Øvelse 5.5
»Når billetprisen øges med 10% falder passagerantallet med 3%«.

a) Opstil en matematisk model for denne udvikling.

b) Hvor mange procent falder passagerantallet, hvis billetprisen øges med 15%?

c) Hvor mange procent skal billetprisen sænkes for at passagerantallet stiger med 25%?

6 Polynomier

Funktionen

$$f(x) = 3x^2 + x - 4$$

tilhører gruppen af *polynomier*, som er en type af funktioner, der anvendes i mange grene af matematikken. Det viser sig nemlig, at polynomier har mange pæne egenskaber.

Den generelle definition på et *polynomium* er den følgende.

Definition 6.1

Et *polynomium* er en funktion af typen,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ,$$

hvor koefficienterne $a_0, \ldots, a_n$ er reelle tal, $a_n \neq 0$.

Tallet n, som skal være et helt, positivt tal, kaldes polynomiets *grad*.

Nogle eksempler på polynomier kunne være:

*Førstegrads*polynomium: $f(x) = 3x + 1$

*Andengrads*polynomium: $g(x) = 4x^2 - 3x + 5$

*Tredjegrads*polynomium: $h(x) = x^3 + 7x - 13$

*Fjerdegrads*polynomium: $m(x) = 8x^4 + 7x^2$

*Syttendegrads*polynomium: $p(x) = x^{17} + 4x^9$.

Når man skriver forskriften for et polynomium op, sorterer man normalt leddene, sådan at eksponenterne står i rækkefølge med den højeste først. Dette er ikke strengt nødvendigt, men det gør, at man let kan finde graden af polynomiet, idet graden er den højeste eksponent.[1]

[1] Et helt specielt tilfælde er i øvrigt polynomier af grad 0, som blot er konstante funktioner; dvs. f.eks. $f(x) = 9$ eller $g(x) = -14$.

Eksempel 6.2 Polynomiet $f(x) = x + 4 - 3x^2$ kan skrives som,

$$f(x) = -3x^2 + x + 4 \ ,$$

hvorved det er nemmere at se, at det drejer sig om et andengradspolynomium.

Førstegradspolynomier er virkeligheden lineære funktioner, så de vil ikke blive gennemgået i dette kapitel. Meget af dette kapitel vil i stedet gå med at gennemgå egenskaberne for andengradspolynomier – med et afsluttende afsnit om polynomier af højere grad.

6.1 Andengradspolynomier

Et *andengradspolynomium* er et polynomium af grad 2. Ifølge definition 6.1 er det altså en funktion af typen

$$f(x) = ax^2 + bx + c\ , \tag{6.1}$$

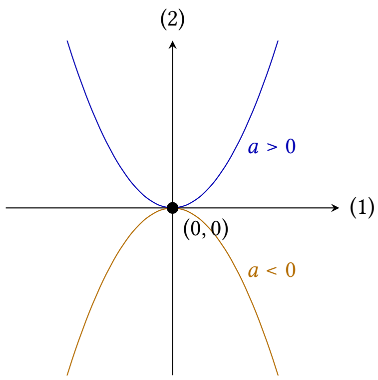
hvor a, b og c er tre tal, og $a \neq 0$.[2]

[2]I definitionen kaldes de tre koefficienter for a_2, a_1 og a_0, men da et andengradspolynomium kun har 3 koefficienter, er det nemmere blot at kalde dem a, b og c.

Det simpleste andengradspolynomium, man kan forestille sig, er et andengradspolynomium, hvor koefficienterne b og c begge er 0, dvs.

$$p(x) = ax^2\ .$$

Grafen for $p(x) = ax^2$ kan ses på figur 6.1. Denne type graf kaldes en *parabel*. Som man kan se på figuren afhænger grafens udseende af værdien af koefficienten a: Hvis $a > 0$ vender parablens grene opad; er $a < 0$, vender de nedad.



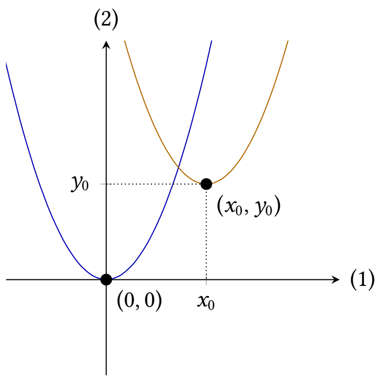
Figur 6.1: Grafen for $p(x) = ax^2$ i de to tilfælde, hvor $a > 0$ og $a < 0$.

Dette skyldes, at x^2 altid er et positivt tal. Fortegnet for funktionsværdien afhænger derfor kun af fortegnet for a.

Af figuren kan man også se, at parablen er symmetrisk omkring andenaksen, dette skyldes, at $(-x)^2 = x^2$, dvs. polynomiet $p(x)$ har de samme funktionsværdier i x og $-x$.

En sidste ting, man kan se på figuren, er, at uanset hvilken værdi, a har, så »vender« parablen i punktet $(0,0)$. Dette punkt kalder man parablens *toppunkt*.

Hvis man i stedet ønsker at se på en parabel, der har toppunkt i (x_0, y_0), kan man parallelforskyde grafen for $p(x)$. Dette kan ses på figur 6.2. Den nye parabel vil da være symmetrisk omkring linjen $x = x_0$, der kaldes parablens *symmetriakse*.



Figur 6.2: Grafen for $p(x) = ax^2$ parallelforskudt til $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$.

Vha. sætning 1.16 kan man nu udlede følgende:

Sætning 6.3

Parablen med toppunkt i (x_0, y_0) er graf for funktionen

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0\ .$$

Bevis

Parablen med toppunkt i (x_0, y_0) fås ved at parallelforskyde grafen for parablen med toppunkt i $(0,0)$ med (x_0, y_0).

Parablen med toppunkt i $(0,0)$ er graf for funktionen $p(x) = ax^2$. Ifølge sætning 1.16 er parablen med toppunkt i (x_0, y_0) derfor graf for

$$f(x) = p(x - x_0) + y_0 = a(x - x_0)^2 + y_0\ . \qquad \blacksquare$$

Funktionsudtrykket i sætning 6.3 ligner ikke umiddelbart andengradspolynomiet i (6.1). Det viser sig dog, at man kan skrive om mellem den ene og den anden form.

Eksempel 6.4 Funktionen $f(x) = 3 \cdot (x-2)^2 - 7$ er graf for en parabel med toppunkt i $(2, -7)$.

Funktionens forskrift kan omskrives ved at gange parentesen ud og reducere:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x-2)^2 - 7 \\ &= 3(x^2 + (-2)^2 - 2 \cdot 2 \cdot x) - 7 \\ &= 3(x^2 + 4 - 4x) - 7 \\ &= 3x^2 + 12 - 12x - 7 \\ &= 3x^2 - 12x + 5 \ . \end{aligned}$$

Forskriften $f(x) = 3(x-2)^2 - 7$ kan altså skrives som

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 5 \ ,$$

hvilket svarer fuldstændigt til (6.1), hvor koefficienterne er

$$a = 3, \quad b = -12 \quad \text{og} \quad c = 5 \ .$$

Omskrivningen i eksempel 6.4 kan også foretages helt generelt ved at regne på andengradspolynomiet $f(x) = a(x-x_0)^2 + y_0$. Så får man

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-x_0)^2 + y_0 \\ &= a(x^2 + x_0^2 - 2x_0x) + y_0 \\ &= ax^2 + ax_0^2 - 2ax_0x + y_0 \\ &= ax^2 + (-2ax_0)x + (ax_0^2 + y_0) \ . \end{aligned}$$

Hvis dette skal svare til forskriften

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ ,$$

skal koefficienterne være de samme. Dette medfører at

$$b = -2ax_0 \quad \text{og} \quad c = ax_0^2 + y_0 \ . \tag{6.2}$$

Ligningerne (6.2) kan bruges til at beregne koefficienterne b og c, når man kender toppunktet (x_0, y_0). Typisk vil et andengradspolynomium være skrevet på formen (6.1), og man har derfor i stedet brug for at kunne beregne toppunktet, når man kender de tre koefficienter a, b og c.

For at skrive en simpel formel op for toppunktet, introducerer man *diskriminanten*,[3]

$$d = b^2 - 4ac \ .$$

Man har så følgende sætning:

Sætning 6.5

Andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$ har toppunkt i (x_0, y_0), hvor

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \quad \text{og} \quad y_0 = -\frac{d}{4a} \ .$$

$d = b^2 - 4ac$ er *diskriminanten.*

[3] Diskriminanten bruges til andet end blot at beregne toppunktet, det giver derfor mening at definere denne størrelse. Den dukker op igen i afsnit 6.3 nedenfor.

Bevis
For at bevise sætningen kan man se på ligningen (6.2). Her fremgår det, at

$$b = -2ax_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{b}{2a} = x_0 \ .$$

Formlen for x_0 er hermed vist.

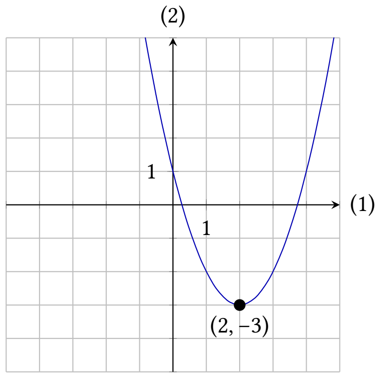
Idet $c = ax_0^2 + y_0$ får man

$$y_0 = c - ax_0^2 \ .$$

Da det lige er vist, at $x_0 = -\frac{b}{2a}$ giver dette, at

$$\begin{aligned} y_0 &= c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} = c - \frac{b^2}{4a} \\ &= \frac{4ac}{4a} - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{d}{4a} \ . \end{aligned}$$

Hermed er formlen for y_0 også bevist. ∎



Figur 6.3: Grafen for $f(x) = x^2 - 4x + 1$ har toppunkt i $(2, -3)$.

Eksempel 6.6 Grafen for andengradspolynomiet

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

kan ses på figur 6.3. For at bestemme toppunktet til denne parabel aflæser man først polynomiets koefficienter. De er

$$a = 1 \ , \quad b = -4 \quad \text{og} \quad c = 1 \ .$$

Herefter kan man beregne førstekoordinaten til toppunktet:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \ .$$

For at beregne andenkoordinaten, beregner man først diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12 \ .$$

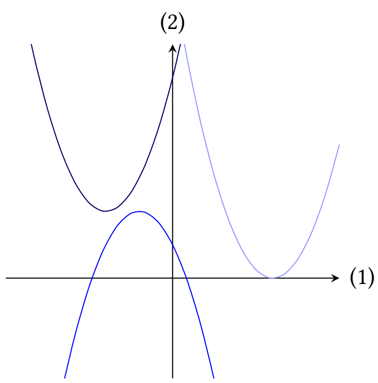
Andenkoordinaten til toppunktet er så

$$y_0 = -\frac{d}{4a} = -\frac{12}{4 \cdot 1} = -3 \ .$$

Parablen har altså toppunkt i $(2, -3)$, hvilket også kan ses på figuren.

6.2 Rødder

En parabel kan være placeret således, at den skærer førsteaksen. De x-værdier, hvori parablen skærer førsteaksen kalder man polynomiets *rødder*.



Figur 6.4: Parabler kan have 2, 1 eller ingen rødder.

Andengradspolynomier kan have 2, 1 eller ingen rødder, afhængig af, hvordan parablen er placeret. Dette kan ses på figur 6.4, hvor den ene parabel skærer førsteaksen (2 rødder), den anden parabel rører førsteaksen i ét punkt (1 rod) og den sidste parabel slet ikke rører førsteaksen.

Rødderne findes som sagt, der hvor parablen skærer førsteaksen. På førsteaksen er $y = 0$, dvs. rødderne findes, der hvor $f(x) = 0$. Man kan altså finde rødderne ved at løse andengrads*ligningen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \ .$$

I afsnittet nedenfor udledes en løsningsformel til denne ligning.

6.3 Andengradsligninger

I ligningen $ax^2 + bx + c = 0$ er det ikke umiddelbart nemt at se, hvordan man kan isolere x; det viser sig dog, at man kan udlede en løsningsformel for ligningen.

Sætning 6.7

For at løse andengradsligningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

beregner man først diskriminanten $d = b^2 - 4ac$.

Der gælder da

1. Hvis $d < 0$ har ligningen ingen løsninger.
2. Hvis $d \geq 0$ har ligningen løsningerne $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$.

Bevis
Ligningen $ax^2 + bx + c = 0$ kan omskrives på følgende måde:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 && \Leftrightarrow \\
4a \cdot (ax^2 + bx + c) &= 4a \cdot 0 && \Leftrightarrow \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 && \Leftrightarrow \\
4a^2x^2 + 4abx &= -4ac && \Leftrightarrow \\
4a^2x^2 + 4abx + b^2 &= b^2 - 4ac \ .
\end{aligned}$$

Man sætter nu $d = b^2 - 4ac$, så ligningen skrives

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = d$$

som også kan skrives

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = d \ .$$

Venstresiden af denne ligning kan ses at være kvadratet på en toleddet størrelse, dvs. ligningen bliver

$$(2ax + b)^2 = d \ .$$

Venstresiden af denne ligning er altid større end eller lig med 0, dvs. ligningen kan kun løses for $d \geq 0$. Hvis $d \geq 0$, får man

$$\begin{aligned} (2ax+b)^2 &= d && \Longleftrightarrow^{4} \\ 2ax+b &= \pm\sqrt{d} && \Longleftrightarrow \\ 2ax &= -b \pm \sqrt{d} && \Longleftrightarrow \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} \ . \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist. ■

[4] At der er mulighed for to forskellige fortegn, skyldes, at $(-h)^2 = h^2$, hvilket betyder, at ligningen $x^2 = h^2$ har både h og $-h$ som løsning.

Hvis man ser på formlen i sætning 6.7, vil man opdage, at i det tilfælde, hvor $d = 0$, er der i virkeligheden kun én løsning, idet[5]

$$\frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a} \ .$$

[5] Hvis diskriminanten er 0, er ligningens løsning altså $x = -\frac{b}{2a}$.

I dette tilfælde taler man om, at polynomiet har en *dobbeltrod*. Dette svarer til at parablen lige præcis rører førsteaksen i ét punkt (se figur 6.4).

Here følger et par eksempler på, hvordan man bruger formlen.

Eksempel 6.8 For at finde rødderne i andengradspolynomiet

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 12 \ ,$$

finder man først polynomiets koefficienter, som er

$$a = 2, \quad b = 2 \quad \text{og} \quad c = -12 \ .$$

Herefter beregner man diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 100 \ .$$

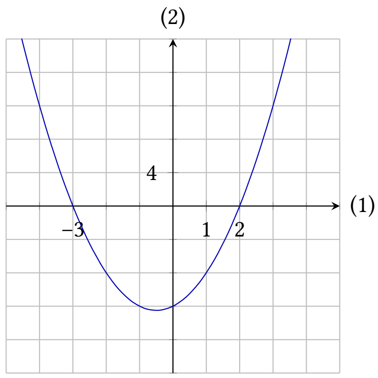
Da d er positiv er der to rødder. Disse kan beregnes som

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm 10}{4} \ .$$

De to rødder er så

$$x = \frac{-2-10}{4} = -3 \quad \text{og} \quad x = \frac{-2+10}{4} = 2 \ ,$$

hvilket man også kan se på figur 6.5.



Figur 6.5: Polynomiet $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ har rødderne −3 og 2.

Eksempel 6.9 Her løses ligningen

$$-x^2 + 8x - 16 = 0 \ .$$

Koefficienterne er

$$a = -1 \ , \quad b = 8 \quad \text{og} \quad c = -16 \ ,$$

og diskriminanten er

$$d = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-16) = 0 \ .$$

Ligningen har derfor løsningen

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-1)} = 4 \ .$$

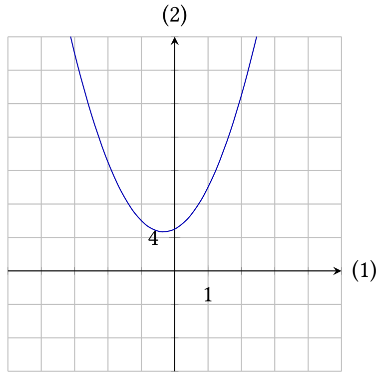
Eksempel 6.10 For at finde rødderne i andengradspolynomiet

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 5 \ ,$$

beregner man diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4 - 60 = -56 \ .$$

Da diskriminanten er negativ, har polynomiet ingen rødder, hvilket er illustreret på figur 6.6.



Figur 6.6: Polynomiet $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ har ingen rødder.

Simple andengradsligninger

Det viser sig, at det ikke altid er nødvendigt at bruge diskriminantformlen for at løse en andengradsligning. Hvis enten b eller c er 0, så kan ligningerne løses på en meget nemmere måde.

Eksempel 6.11 ($b = 0$) I andengradsligningen

$$3x^2 - 75 = 0$$

er koefficienten $b = 0$. Denne ligning kan løses således:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 75 &= 0 && \Leftrightarrow \\ 3x^2 &= 75 && \Leftrightarrow \\ x^2 &= 25 && \Leftrightarrow \\ x &= \pm\sqrt{25} && \Leftrightarrow \\ x &= \pm 5 \ . \end{aligned}$$

Her skal man blot huske, at der er to mulige løsninger, når man tager kvadratroden: En positiv og en negativ.

Eksempel 6.12 ($c = 0$) I andengradsligningen

$$2x^2 + 14x = 0$$

er $c = 0$. Her kan ligningen løses ved at sætte uden for parentes og bruge nulreglen:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 14x &= 0 && \Leftrightarrow \\ 2x \cdot x + 7 \cdot 2x &= 0 && \Leftrightarrow \\ 2x \cdot (x + 7) &= 0 && \Leftrightarrow \\ 2x = 0 \quad &\vee \quad x + 7 = 0 && \Leftrightarrow \\ x = 0 \quad &\vee \quad x = -7 \ . \end{aligned}$$

6.4 Koefficienternes betydning

Der er en sammenhæng mellem grafen for et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ og koefficienterne a, b, c og diskriminanten d. I dette afsnit ses nærmere på de sammenhænge, der gælder.

I afsnit 6.1 ovenfor, blev der argumenteret for, at fortegnet for a afgør, om parablen vender grenene opad eller nedad.[6]

[6]Argumentet gjaldt for polynomiet $p(x) = ax^2$, men da $f(x) = ax^2 + bx + c$ er en parallelforskydning af $p(x)$, må der gælde samme sammenhæng her.

Førstekoordinaten til toppunktet er $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Hvis a og b har samme fortegn bliver x_0 derfor negativ. I dette tilfælde ligger toppunktet til venstre for andenaksen. Omvendt må toppunktet ligge til højre for andenaksen, hvis a og b har forskellige fortegn.

I den situation, hvor $b = 0$, får man $x_0 = -\frac{0}{2a} = 0$; her ligger toppunktet altså placeret på andenaksen.

Hvis man indsætter $x = 0$ i forskriften for andengradspolynomiet, får man

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \,,$$

dvs. parablen går gennem punktet $(0, c)$. c er altså skæringen med andenaksen.

Sammenhængen mellem diskriminanten d og parablens placering i koordinatsystemet blev gennemgået i foregående afsnit. Her blev der bl.a. argumenteret for, at når $d < 0$ skærer parablen ikke førsteaksen.

Samlet set har man følgende sætning.

Sætning 6.13

Lad et andengradspolynomium være givet ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c \,,$$

og lad d være diskriminanten.

Polynomiets graf er da en parabel, hvorom der gælder følgende:

1. Hvis $a > 0$ vender parablen grenene opad. Er $a < 0$ vender grenene nedad.
2. Hvis a og b har samme fortegn, ligger toppunktet til venstre for andenaksen. Har de modsat fortegn, ligger toppunktet til højre for andenaksen; og er $b = 0$ ligger toppunktet på andenaksen.
3. Parablen skærer andenaksen i punktet $(0, c)$.
4. Hvis $d > 0$ har parablen to skæringer med førsteaksen. Er $d < 0$ skærer parablen ikke førsteaksen; og er $d = 0$ rører parablen førsteaksen i ét punkt.

6.5 Faktorisering

Hvis et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ har to rødder r_1 og r_2, er disse givet ved

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} \qquad \wedge \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \ .$$

Det viser sig, at i dette tilfælde kan polynomiet også skrives som

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \ .$$

Man siger, at polynomiet er *faktoriseret*.[7]

[7] At man kan foretage denne omskrivning, kan man overbevise sig selv om ved at reducere

$$a\left(x - \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}\right)$$

og se, at det giver $ax^2 + bx + c$.

Eksempel 6.14 Hvis man vil faktorisere andengradspolynomiet $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ skal man først finde rødderne. For at gøre dette skal man først udregne diskriminanten,

$$d = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 81 \ .$$

De to rødder er derfor

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{81}}{2 \cdot 3} = 2$$

og

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{81}}{2 \cdot 3} = -1 \ .$$

Polynomiet kan nu faktoriseres:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - r_1)(x - r_2) \\ &= 3(x - 2)(x - (-1)) \\ &= 3(x - 2)(x + 1) \ . \end{aligned}$$

Det smarte ved at faktorisere et polynomium er, at man uden videre kan aflæse rødderne.[8] Faktisk gælder der, at et polynomium, der ikke har rødder, ikke kan faktoriseres.

[8] Hvis et andengradspolynomium har én rod r, vil faktoriseringen være $f(x) = a(x - r)^2$, og r kaldes da for en *dobbeltrod*.

De to andengradspolynomier $f(x) = ax^2 + bx + c$ og $p(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$, må have de samme rødder.[9] Faktoriseringen af $p(x)$ må være

[9] Det følger af, at når $ax^2 + bx + c = 0$, må der også gælde $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2) \ ,$$

da koefficienten til andengradsleddet er 1.

Ganger man parenteserne sammen, får man

$$p(x) = x^2 - r_1 x - r_2 x + r_1 r_2 = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 \ .$$

Dette polynomium skal være det samme som det oprindelige, dvs. koefficienterne skal være de samme. Derfor er

$$-\frac{b}{a} = r_1 + r_2 \qquad \wedge \qquad \frac{c}{a} = r_1 r_2 \ .$$

Da polynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$ har de samme rødder, må dette udsagn også gælde for dette polynomium.

Dette kan bruges til at gætte rødderne i et andengradspolynomium.

Eksempel 6.15 Hvis man skal komme med et bud på rødderne i polynomiet $f(x) = 4x^2 - 12x + 8$ starter man med at beregne

$$-\frac{b}{a} = -\frac{-12}{4} = 3 \ ,$$

og

$$\frac{c}{a} = \frac{8}{4} = 2 \ .$$

Ud fra de foregående argumenter kan man se, at summen af rødderne $(r_1 + r_2)$ skal give 3, mens produktet $(r_1 r_2)$ skal give 2. Dette gælder kun for tallene 1 og 2, derfor må det være rødderne.

Alle disse resultater kan opsummeres i følgende sætning:

Sætning 6.16

Hvis et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ har mindst én rod, kan det faktoriseres, dvs. skrives på formen

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \ ,$$

hvor r_1 og r_2 er de to rødder (hvis der kun er én rod, er $r_1 = r_2$).

For de to rødder gælder der desuden, at

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \ ,$$

og

$$r_1 r_2 = \frac{c}{a} \ .$$

6.6 Polynomier af højere grad

Polynomier af grad større end 2 er ikke helt så simple at beskrive. På figur 6.7 kan man se grafer for polynomier af grad 3 til 6. Som man kan se på figuren »vender« graferne flere gange, jo højere grad, polynomiet har. De punkter, hvor grafen vender, kalder man polynomiets *ekstrema*.[10]

Da graferne kan have mange ekstrema, er det også muligt for grafen at skære førsteaksen mange gange. Det er derfor ikke muligt at udlede simple løsningsformler for rødderne.[11]

Ovenfor blev det gennemgået, hvordan man kan faktorisere andengradspolynomier. Polynomier af højere grad kan også faktoriseres, hvis man kender rødderne. Helt generelt gælder der, at hvis r er en rod i polynomiet $p(x)$ kan $p(x)$ omskrives til

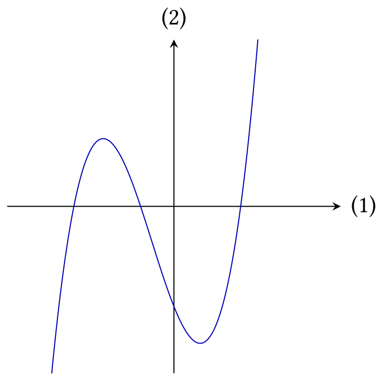
$$p(x) = (x - r) \cdot q(x) \ ,$$

hvor $q(x)$ også er et polynomium. Graden af q er 1 mindre end graden af p. Dvs. hvis p er et fjerdegradspolynomium, er q et tredjegradspolynomium osv.

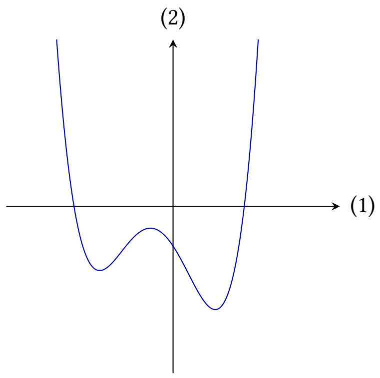
Heraf kan man udlede, at et polynomium af grad n højst kan have n rødder. Der gælder derfor følgende sætning.

[10] Et *ekstremum* er en samlet betegnelse for et maksimum eller et minimum.

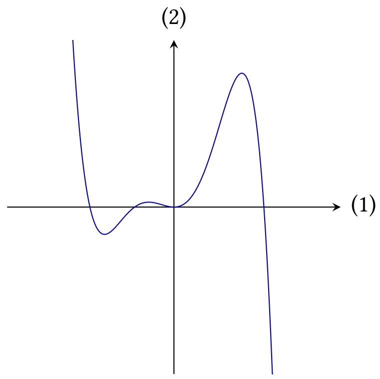
[11] Der findes formler til at beregne rødderne i et tredjegrads- og et fjerdegradspolynomium, men disse er meget vanskelige at arbejde med. For polynomier af grad 5 eller højere er det derimod bevist, at man ikke kan udlede en generel løsningsformel.[3]



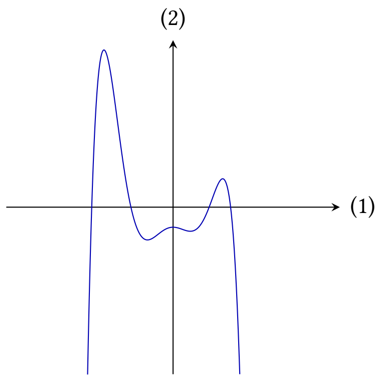
(a) Et tredjegradspolynomium.



(b) Et fjerdegradspolynomium.



(c) Et femtegradspolynomium.



(d) Et sjettegradspolynomium.

Figur 6.7: Her ses graferne for fire polynomier af grad højere end 2. Som man kan se på figuren, »bugter« grafen mere og mere, jo højere grad, polynomiet har.

Sætning 6.17

Der gælder:

1. Et polynomium af grad n har højst n rødder.
2. En n'te-gradsligning har højst n løsninger.

Da der ikke findes nogen generel løsningsformel til at bestemme rødderne i et n'te-gradspolynomium, må man anvende andre teknikker. CAS-værktøjer har som regel en indbygget »faktor«-funktion, der kan bruges til at faktorisere polynomier.

Eksempel 6.18 Polynomiet $f(x) = 2x^3 - 16x^2 + 2x + 84$ omskrives vha. et CAS-værktøj til

$$f(x) = 2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 7)\ ,$$

hvorved man med det samme kan se, at dette tredjegradspolynomium har rødderne -2, 3 og 7.

Eksempel 6.19 Fjerdegradspolynomiet $f(x) = x^4 - x^3 - 19x^2 - x - 20$, kan vha. et CAS-værktøj faktoriseres til

$$f(x) = (x - 5) \cdot (x + 4) \cdot (x^2 + 1)\ .$$

Polynomiet har altså de to rødder -4 og 5.

At polynomiet ikke kan faktoriseres yderligere skyldes, at andengradspolynomiet $x^2 + 1$ ikke har nogen rødder. Det er også derfor, der kun er 2 rødder, selv om $f(x)$ er et fjerdegradspolynomium.

I eksemplet ovenfor sås et fjerdegradspolynomium, der kun havde 2 rødder. Faktisk er det muligt at konstruere et fjerdegradspolynomium, der slet ikke har rødder. Dette er til gengæld ikke muligt at gøre for et femtegradspolynomium. Grunden hertil kan man måske ane på figur 6.7. Generelt gælder der, at et polynomium af ulige grad altid vil have mindst én rod.

Man kan i øvrigt bruge faktorisering til at konstruere et polynomium med specifikke rødder, hvilket er vist i dette afsluttende eksempel.

Eksempel 6.20 Et tredjegradspolynomium med rødderne -1, 4 og 7 er f.eks.

$$f(x) = (x - (-1)) \cdot (x - 4) \cdot (x - 7) \ ,$$

hvor man kan gange parenteserne ud og få

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 17x + 28 \ .$$

6.7 Øvelser

Øvelse 6.1
Hvilke af disse funktioner er polynomier? Og hvad er deres grad?

a) $f_1(x) = x^2 + 6x - 2$

b) $f_2(x) = x + 5x^8 - 1 + x^2$

c) $f_3(x) = x^{-3} + 2x^6 - 6x$

d) $f_4(x) = 7$

e) $f_5(x) = 2^x - x^2$

f) $f_6(x) = 213x^{89\,364\,521}$

g) $f_7(x) = x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{7}{10}}$

Øvelse 6.2
Angiv toppunktet (x_0, y_0) på grafen for nedenstående andengradspolynomier. Omskriv derefter forskriften, så den står på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) $f_1(x) = (x - 4)^2 + 3$

b) $f_2(x) = -2\,(x - 1)^2 + 7$

c) $f_3(x) = 3\,(x + 3)^2 + 3$

Øvelse 6.3
Angiv toppunktet (x_0, y_0) på grafen for nedenstående andengradspolynomier. Omskriv derefter forskriften, så den står på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) $g_1(x) = 2\,(x - 2)^2 + 4$

b) $g_2(x) = -2\,(x - 2)^2 + 4$

c) $g_3(x) = 9\,(x + 1)^2 + 5$

d) $g_4(x) = \frac{1}{3}\,(x + 6)^2 + 12$

Øvelse 6.4
Beregn toppunktet på grafen for hver af de nedenstående andengradspolynomier.

a) $f_1(x) = x^2 - 2x + 2$

b) $f_2(x) = -x^2 + 5$

c) $f_3(x) = -3x^2 + 12x - 13$

d) $f_4(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$

e) $f_5(x) = -4x^2 + 24x + 35$

f) $f_6(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 6$

Øvelse 6.5
Angiv koefficienterne a, b og c for hver af ligningerne. Udregn desuden d og løs derefter ligningerne:

a) $2x^2 + 4x - 16 = 0$ b) $-x^2 - 2x + 3 = 0$
c) $2x^2 - 4x + 6 = 0$ d) $4x^2 - 6x - 4 = 0$
e) $2x^2 + 6 = 8x$ f) $2x + 15 = x^2$

Øvelse 6.6
Løs følgende ligninger uden brug af hjælpemidler:

a) $-x^2 + x - 1 = 0$ b) $4x^2 - 2x - 12 = 0$
c) $3x^2 - 6x + 3 = 0$ d) $x^2 - x - 6 = 0$

Øvelse 6.7
Løs ligningerne herunder – eller gør rede for, hvorfor de ikke har løsninger. Nulreglen kan med fordel anvendes flere steder.

a) $2x^2 = 0$ b) $(x-1)^2 = 0$
c) $7(x+2)^2 = 0$ d) $2x^2 = 8$
e) $x^2 - 5x = 0$ f) $3x^2 - 27x = 0$
g) $2x^2 + 50x = 0$ h) $x^2 + 6 = 0$

Øvelse 6.8
Løs følgende ligninger – eller gør rede for, hvorfor de ikke har løsninger:

a) $-5x^2 = 0$ b) $(2x-4)^2 = 0$
c) $-3(x+3)^2 = 0$ d) $3x^2 = 48$
e) $x^2 + \frac{1}{2}x = 0$ f) $3x^2 - 27 = 0$
g) $7x^2 + 51 = 0$ h) $-x^2 + 36 = 0$

Øvelse 6.9
Nedenfor ses forskrifterne for en række andengradspolynomier:

a) $f_1(x) = 2x^2 + 3x$
b) $f_2(x) = -3x^2 + x + 1$
c) $f_3(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x + 4$
d) $f_4(x) = -x^2 + 4$
e) $f_5(x) = 4x^2 + 2x + 3$
f) $f_6(x) = \frac{2}{5}x^2 + x + 1$

Graferne for funktionerne er parabler. Sæt disse i rækkefølge, så den stejleste parabel, der vender grenene opad, står først, og den stejleste, der vender grenene nedad, står sidst.

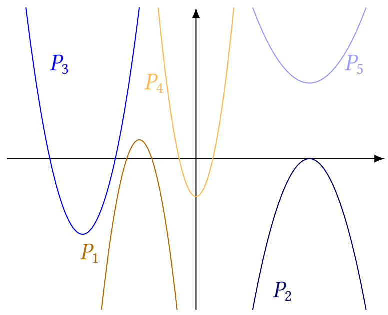
Øvelse 6.10
Find skæringerne med akserne samt toppunktet for følgende andengradspolynomier:

a) $f_1(x) = 3x^2 - 3$
b) $f_2(x) = 2x^2 + 7x + 2$
c) $f_3(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 6x + 5$
d) $f_4(x) = -\frac{1}{3}x^2 - x$
e) $f_5(x) = -3x^2 + 6x - 7$
f) $f_6(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$

Øvelse 6.11
P_1, P_2, P_3, P_4 og P_5 er grafer for forskellige andengradspolymier, der kan skrives på formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Diskriminanten betegnes d.



Bestem i hvert af tilfældene fortegnene for a, b, c og d på grundlag af graferne på figuren.

Lad a_1 betegne andengradskoefficienten for P_1 osv. Skriv koefficienterne a_1, a_2, a_3, a_4 og a_5 i rækkefølge med den største først.

Øvelse 6.12
Opløs følgende andengradspolynomier i faktorer:

a) $f(x) = x^2 - x - 30$
b) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$
c) $h(x) = 3x^2 + 6x - 429$

Øvelse 6.13
Angiv en forskrift for det andengradspolynomium, hvis graf går gennem de angivne punkter:

a) $(1,0), (5,0)$ og $(0,3)$ b) $(-1,0), (3,0)$ og $(1,2)$

Øvelse 6.14
Brug et CAS-værktøj til at faktorisere de følgende polynomier, og bestem deres rødder:

a) $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6$

b) $x^6 - x^4 - 16x^2 + 16$

c) $2x^5 - 2x^4 - 94x^3 + 202x^2 + 452x - 560$

d) $\frac{1}{2}x^3 - 5x^2 - 16x + 48$

Øvelse 6.15
Opskriv et tredjegradspolynomium med rødderne -2, 3 og 7.

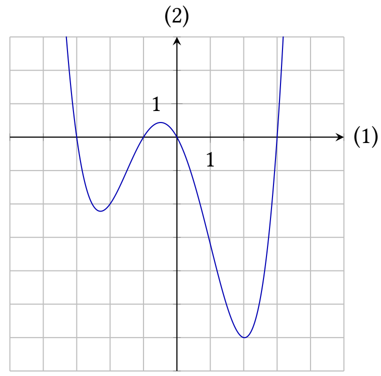
Øvelse 6.16
Fjerdegradspolynomiet f har rødderne -3, 0, 1 og 5, og polynomiets graf går gennem punktet $(-1, 8)$.

Bestem en forskrift for polynomiet.

Øvelse 6.17
Grafen for tredjegradspolynomiet g går gennem punkterne $(-1, 0)$, $(0, 3)$, $(6, 0)$ og $(7, 4)$.

Bestem polynomiets forskrift.

Øvelse 6.18
Figuren herunder viser grafen for polynomiet f.



a) Hvilken grad må f mindst have?

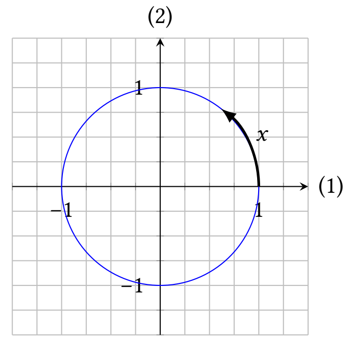
Det oplyses, at graden af f er 4, og at koefficienten til x^4 er $\frac{1}{5}$.

b) Bestem en forskrift for f.

7 Trigonometriske funktioner

De *trigonometriske* funktioner er en gruppe af funktioner, der kan anvendes til at beskrive svingninger, og som også hyppigt anvendes inden for geometri. I dette kapitel beskrives de tre trigonometriske funktioner *sinus* (sin), *cosinus* (cos) og *tangens* (tan).

De tre funktioner bliver defineret ud fra det, man kalder *enhedscirklen*. Det er en cirkel med radius 1, som er placeret i et koordinatsystem, sådan at centrum ligger i $(0, 0)$, se figur 7.1.

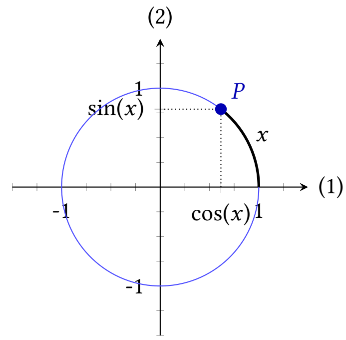


Figur 7.1: Enhedscirklen og buelængden x.

I stedet for at lade x betegne førstekoordinaten, lader man x betegne buelængden fra punktet $(1, 0)$ og mod urets retning, se figur 7.1 (hvis man går med uret, bliver x negativ).

Går man x op langs enhedscirklen kommer man til punktet P. Cosinus og sinus defineres som hhv. første- og andenkoordinaten til dette punkt, se figur 7.2. Tangens er forholdet mellem sinus og cosinus.

De tre funktioner defineres altså på følgende måde:



Figur 7.2: Definitionen på $\cos(x)$ og $\sin(x)$.

Definition 7.1

Lad P være slutpunktet for buen med længde x. Så er

1. $\cos(x)$ lig med P's førstekoordinat.
2. $\sin(x)$ lig med P's andenkoordinat.
3. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

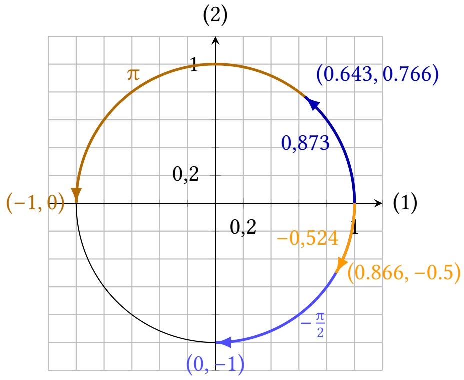
Bemærk, at $\tan(x)$ kun er defineret, hvis $\cos(x) \neq 0$.

Enhedscirklen er en cirkel med radius 1. Herudfra kan man beregne enhedscirklens omkreds, som er $2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$. Dvs. at hvis buelængden er π så svarer det til en halv cirkel, og punktet P har koordinaterne $(-1, 0)$. Hvis buelængden er $-\frac{\pi}{2}$, så har man bevæget sig en kvart cirkel *med* uret, og P har koordinaterne $(0, -1)$. Figur 7.3 viser nogle sammenhænge mellem buelængder og koordinater, både grafisk og på tabelform.

Da $\sin(x)$ og $\cos(x)$ er koordinater til et punkt på enhedscirklen, som jo har radius 1, følger det i øvrigt, at både $\sin(x)$ og $\cos(x)$ må ligge mellem -1 og 1, altså at

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \qquad \text{og} \qquad -1 \leq \sin(x) \leq 1\,.$$

Figur 7.3: På figuren til venstre ses koordinaterne for endepunkterne af en række buer med forskellig længde. I tabellen til højre ses de samme informationer, nu blot angivet som cosinus og sinus til de forskellige værdier af x.



(a) Endepunkterne for forskellige buelængder

x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$-\frac{\pi}{2}$	0	−1
−0,524	0,866	−0,5
0,873	0,643	0,766
π	−1	0

(b) Tabel over sammenhængen.

Ved at se på symmetri i enhedscirklen, kan man udlede følgende sætning, der ikke bevises:

Sætning 7.2

Der gælder

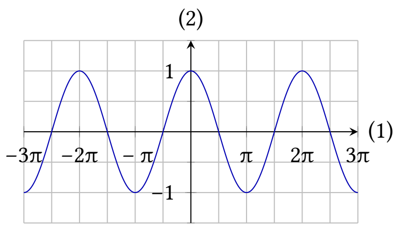
1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
2. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
3. $\cos(-x) = \cos(x)$
4. $\sin(-x) = -\sin(x)$
5. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
6. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

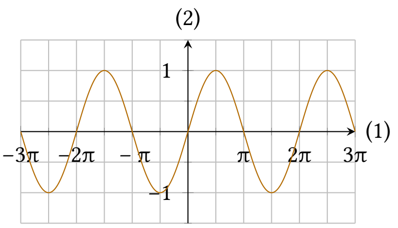
Idet radius i enhedscirklen er 1, gælder der også følgende sammenhæng mellem cosinus og sinus, som kan udledes ved at anvende Pythagoras' sætning:

Sætning 7.3: Grundrelationen mellem cosinus og sinus

Der gælder

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1 \, .$$





Figur 7.4: Graferne for funktionerne $\cos(x)$ (øverst) og $\sin(x)$ (nederst).

7.1 Grafer for de trigonometriske funktioner

Cosinus og sinus kan behandles som matematiske funktioner, helt på linje med andre typer funktioner, bl.a. kan man tegne deres grafer. Graferne for de to funktioner kan ses på figur 7.4.

Man kunne fristes til at tro, at fordi enhedscirklen har en omkreds på 2π, så har $\cos(x)$ og $\sin(x)$ kun funktionsværdier, når x ligger i intervallet mellem 0 og 2π, men dette er ikke rigtigt. Værdier af x, der ligger over 2π, svarer blot til, at man går mere end én omgang rundt i cirklen; mens de negative værdier svarer til, at man går modsat rundt. Funktionsværdierne vil så gentage sig selv for hver hel omgang, man går rundt i cirklen – dette er beskrevet nærmere nedenfor.

På graferne er førsteaksen inddelt i enheder af π. Dette skyldes, at det er ud for disse værdier, graferne skærer førsteaksen og antager deres maksima og minima. Hvis x's værdi er en brøkdel af π, er det også i mange tilfælde muligt at angive de eksakte værdier af $\cos(x)$ og $\sin(x)$. Nogle af de eksakte funktionsværdier af $\cos(x)$ og $\sin(x)$ kan ses i tabel 7.5.

Tabel 7.5: Funktionsværdier for cos og sin.

x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$-\pi$	-1	0
$-\frac{\pi}{2}$	0	-1
0	1	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1
2π	1	0

Periodicitet

Ved at se på graferne for de to funktioner, kan man udlede, at de er *periodiske*.

At en funktion er periodisk betyder, at funktionen »gentager sig selv«. Man kan se på graferne for $\cos(x)$ og $\sin(x)$, at hver gang man går 2π frem eller tilbage på førsteaksen, finder man de samme funktionsværdier.

Dette skyldes, at cosinus og sinus er defineret ud fra enhedscirklen, og 2π svarer til en hel omgang rundt i cirklen. Derfor vil $\cos(x)$ og $\sin(x)$ have samme værdi, når x stiger eller falder med et helt tal gange 2π, dvs.

$$\begin{aligned} \cos(x + k \cdot 2\pi) &= \cos(x) \\ \sin(x + k \cdot 2\pi) &= \sin(x) \qquad \text{hvor } k \text{ er et helt tal} . \end{aligned}$$

Man siger, at de to funktioner er periodiske med *perioden* $T = 2\pi$. Perioden kan i øvrigt også aflæses som afstanden mellem to af bølgetoppene på grafen.

Fordi de to funktioner er periodiske, kan de bruges til at beskrive en lang række fænomener i naturen, der udviser et gentagende mønster, som f.eks. bølger og svingninger.

Tangens

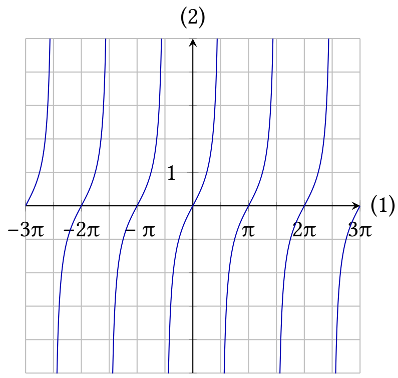
I det ovenstående er tangens ikke blevet omtalt. Grafen for $\tan(x)$ kan ses på figur 7.6. Som man kan ane på figuren, går funktionsværdien mod ∞ hhv. $-\infty$ når x nærmer sig $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}$ osv.

Dette skyldes at $\tan(x)$ er defineret som

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} ,$$

og det er netop i disse værdier af x, at $\cos(x) = 0$.

Som man måske også kan se på figuren er $\tan(x)$ periodisk med perioden π.



Figur 7.6: Grafen for $\tan(x)$.

7.2 Svingninger

Som nævnt ovenfor, kan de trigonometriske funktioner cosinus og sinus bruges til at beskrive svingninger. Mange svingninger kan beskrives vha. grafer, der er »bølgeformede« på samme måde som graferne for cosinus og sinus (se figur 7.4). Funktioner, der har den type grafer, har formen $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$. Man kan derfor definere *sinussvingninger* på følgende måde:

Definition 7.4

En *sinussvingning* er grafen for en funktion af typen

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d\ ,$$

hvor $a > 0$, $b > 0$, og c og d er vilkårlige tal.

Man kan nu undersøge, hvordan konstanterne a, b, c og d påvirker grafens udseende.

På figur 7.7 ses graferne for de tre funktioner

$$f(x) = \sin(x)\ , \quad g(x) = 2\sin(x) \quad \text{og} \quad h(x) = 4\sin(x)\ .$$

Disse tre funktioner adskiller sig kun i værdien af tallet a. Som man kan se har alle graferne samme form, men ikke samme højde. Tallet a bestemmer altså bølgehøjden – dvs. afstanden fra førsteaksen til bølgetoppene – på graferne.

Herefter undersøges 3 funktioner med forskellige værdier af b. Det kunne f.eks. være

$$f(x) = 3\sin(x)\ , \quad g(x) = 3\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right) \quad \text{og} \quad h(x) = 3\sin(2x)\ .$$

Som det fremgår af figuren, så har de tre grafer samme bølgehøjde – hvilket skyldes, at de alle har $a = 3$ – men de svinger til gengæld ikke lige hurtigt, dvs. de har forskellig *periode*.

For funktionen $\sin(x)$ var perioden 2π. Dvs. når x løber fra 0 til 2π gennemfører grafen én svingning. Men hvad nu med funktionen $f(x) = a \cdot \sin(bx)$? Denne funktion må gennemløbe en hel svingning, når bx går fra 0 til 2π.

Man løser derfor de to ligninger $bx = 0$ og $bx = 2\pi$ og får:

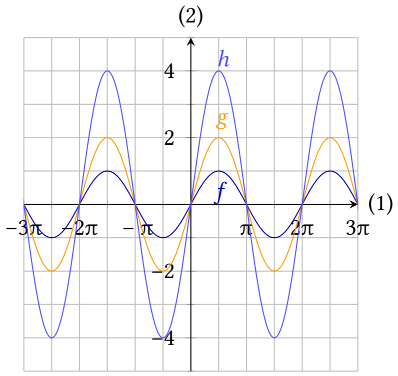
$$\begin{aligned} bx &= 0 &\quad&\Longleftrightarrow\quad& x &= 0 \\ bx &= 2\pi &\quad&\Longleftrightarrow\quad& x &= \frac{2\pi}{b}\ . \end{aligned}$$

Altså svarer funktionens periode til, at x løber fra 0 til $\frac{2\pi}{b}$. Det betyder, at jo større tallet b er, desto mindre er perioden, hvilket man også kan se på figur 7.8. Perioden T er altså $T = \frac{2\pi}{b}$.

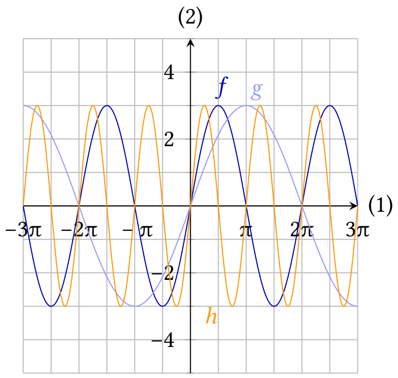
Tallet c kan man også undersøge ved at tegne grafer for funktioner med forskellige værdier af c, se figur 7.9. De tre funktioner har forskrifterne

$$f(x) = 3\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\ , \quad g(x) = 3\sin\left(\tfrac{1}{2}x + 2\right) \quad \text{og} \quad h(x) = 3\left(\tfrac{1}{2}x - 1\right)\ .$$

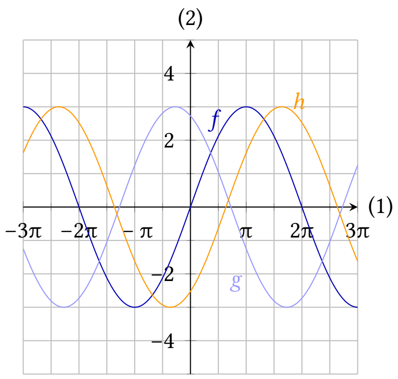
Som man kan se, er de tre grafer parallelforskydninger af hinanden. Fordi $\sin(x)$ skærer førsteaksen, når $x = 0$, vil grafen for $a \cdot \sin(bx + c)$ skære førsteaksen, når $bx + c = 0$, dvs. når $x = -\frac{c}{b}$. Dette tal kaldes *faseforskydningen*, og det viser, hvor grafen skærer førsteaksen »første gang«. Idet grafen skærer førsteaksen, hver gang der er gået en halv periode, kan man finde de andre skæringer med førsteaksen ved at lægge en halv periode et helt antal gange til faseforskydningen (eller trække den fra et helt antal gange).



Figur 7.7: Graferne for $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 2\sin(x)$ og $h(x) = 4\sin(x)$.



Figur 7.8: Graferne for $f(x) = 3\sin(x)$, $g(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ og $h(x) = 3\sin(2x)$.



Figur 7.9: Graferne for de tre funktioner $f(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$, $g(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$ og $h(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$.

Idet perioden er $T = \frac{2\pi}{b}$, er en halv periode $\frac{\pi}{b}$, og dvs. grafen skærer grafen førsteaksen i

$$\dots, \frac{-c-2\pi}{b}, \frac{-c-\pi}{b}, -\frac{c}{b}, \frac{-c+\pi}{b}, \frac{-c+2\pi}{b}, \frac{-c+3\pi}{b}, \dots .$$

I alle funktionerne ovenfor er tallet $d = 0$, og graferne svinger alle omkring førsteaksen, dvs. linjen med ligningen $y = 0$. Når man ændrer værdien af d, parallelforskyder man grafen i lodret retning (se også afsnit 1.5), dvs. grafen vil så svingen omkring linjen med ligningen $y = d$. Tallet d kaldes også funktionens *ligevægtsværdi*.

Resultaterne kan opsummeres i følgende sætning:

Sætning 7.5

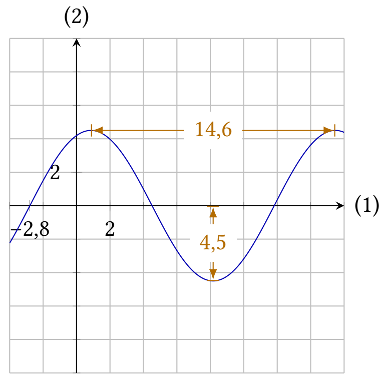
For funktionen $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ er

1. a lig med amplituden, dvs. den lodrette afstand fra ligevægtsværdien d til bølgetoppene,
2. perioden (dvs. afstanden fra bølgetop til bølgetop) lig med $\frac{2\pi}{b}$,
3. faseforskydningen lig med $-\frac{c}{b}$, og
4. d lig med ligevægtsværdien, dvs. grafen svinger omkring linjen med ligningen $y = d$.

Eksempel 7.6 Funktionen f er givet ved

$$f(x) = 4{,}5 \cdot \sin(0{,}43x + 1{,}2) .$$

Funktionens graf kan ses på figur 7.10.



Figur 7.10: Grafen for $f(x) = 4{,}5 \cdot \sin(0{,}43x + 1{,}2)$.

f har en amplitude på $a = 4{,}5$, dvs. bølgetoppene har en højde på 4,5 over førsteaksen.

Konstanten $b = 0{,}43$, dvs. perioden er

$$T = \frac{2\pi}{0{,}43} = 14{,}6 .$$

Faseforskydningen beregnes ud fra $c = 1{,}2$, og man får

$$-\frac{c}{b} = -\frac{1{,}2}{0{,}43} = -2{,}8 .$$

Grafen skærer altså førsteaksen i $-2{,}8$. Vil man finde de andre nulpunkter, kan man lægge en halv periode (dvs. $\frac{1}{2} \cdot 14{,}6 = 7{,}3$) til eller trække den fra et vilkårligt antal gange.

Cosinus

Grafen for cosinus-funktionen er også en bølge. Men ifølge sætning 7.2, så er

$$\cos(x) = \cos(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) .$$

Altså er cosinus-funktionen faktisk sinus-funktionen med en faseforskydning på $-\frac{\pi}{2}$. Dvs. at en svingning, der kan beskrives vha. en cosinusfunktion, lige så godt kan beskrives vha. sinus.

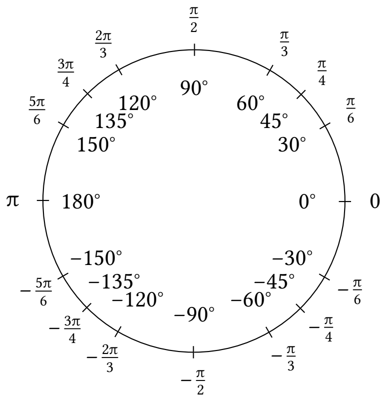
7.3 Grader og radianer

Sinus og cosinus er ovenfor blevet defineret ud fra buelængder i enhedscirklen. Men i virkeligheden kunne man lige så godt have defineret dem ud fra de vinkler, som buerne udspænder. Man kan faktisk måle størrelsen af en vinkel ved at se, hvor stor en buelængde på enhedscirklen, den svarer til. Når man gør det, siger man at vinklen er målt i *radianer*. Vil man hellere have vinklen i grader, er det forholdsvist simpelt at regne om mellem de to mål.

En cirkel svarer som bekendt til en vinkel på 360°.[1]

[1]Der er ingen matematisk grund til, at man har valgt tallet 360. Faktisk er det et levn fra det babyloniske 60-talssystem.[2]

Da enhedscirklens omkreds er 2π, kommer 2π radianer altså til at svare til 360°. Og en ret vinkel (90°) kommer til at svare til $\frac{\pi}{2}$. Figur 7.11 viser sammenhængen mellem grader og radianer som vinkelmål.



Figur 7.11: Sammenhængen mellem grader og radianer.

Da 2π i radianer svarer til en hel cirkel, og 360° også svarer til en hel cirkel, får man

$$360^\circ = 2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \ ,$$

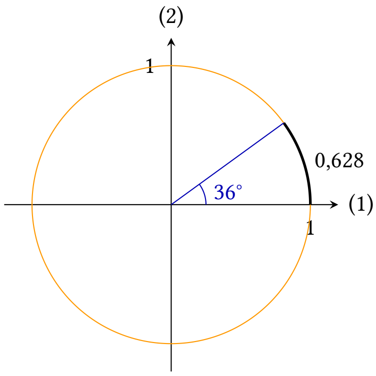
dvs. man kan omregne fra grader til radianer ved at gange med $\frac{\pi}{180^\circ}$. Og man kan så regne om fra radianer til grader ved at gange med den omvendte brøk $\frac{180^\circ}{\pi}$.

Eksempel 7.7 Hvad er vinklen 36° i radianer?

For at svare på dette spørgsmål beregnes

$$36^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5} \approx 0{,}628 \ .$$

36° svarer altså til $\frac{\pi}{5}$ radianer. Dvs. en vinkel på 36° spænder over en bue med længden 0,628 i enhedscirklen, se figur 7.12.



Figur 7.12: 36° svarer til 0,628 radianer.

Hvis man betragter de trigonometriske funktioner som matematiske funktioner, vil man normalt ikke regne i grader. Men de trigonometriske funktioner finder også anvendelse i løsningen af geometriske problemer, hvor de kan bruges til at omregne mellem længder og vinkler – og her vil det være naturligt at angive vinklerne i grader, frem for i radianer.

7.4 Inverse trigonometriske funktioner

I dette afsnit gennemgås de såkaldt »inverse trigonometriske funktioner« $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ og $\tan^{-1}$.[2] De tre funktioner bruges til at løse ligninger, hvor man kender sinus, cosinus eller tangens til den ubekendte. De giver altså buelængden, hvis man kender enten cosinus, sinus eller tangens.

[2]De tre funktioner kaldes undertiden også arccos, arcsin og arctan. »arc« står for *arcus*, som betyder »bue« på latin. arcsin er altså den bue, hvis sinus har en bestemt værdi.

I computerprogrammer kaldes de tre funktioner i øvrigt ofte asin, acos og atan.

Eksempel 7.8 For at løse ligningen $\cos(x) = 0{,}8$ bruges $\cos^{-1}$:

$$\cos(x) = 0{,}8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \cos^{-1}(0{,}8) \ .$$

$\cos^{-1}(0{,}8)$ regnes ud på en lommeregner, og man får

$$x = \cos^{-1}(0{,}8) = 0{,}644 \ .$$

Eksempel 7.9 Ligningen $\sin(B) = 0{,}5$ løses således:

$$\sin(B) = 0{,}5 \quad \Longleftrightarrow \quad B = \sin^{-1}(0{,}5) = 0{,}524 \; .$$

Som det fremgår af eksemplerne ovenfor, får man kun én løsning. Men cosinus og sinus er periodiske funktioner, så ligningerne har i princippet uendeligt mange løsninger. Men en udregning på en lommeregner kan selvfølgelig kun give én. Spørgsmålet er så, hvilken?

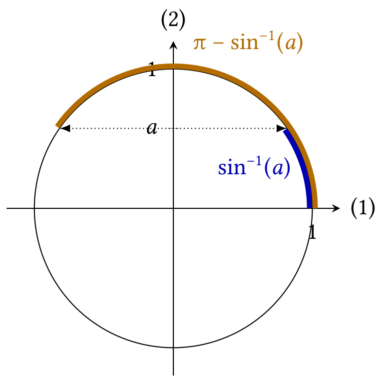
Det viser sig at der gælder følgende:

1. $\cos^{-1}$ giver altid tal i intervallet fra 0 til π.
2. $\sin^{-1}$ giver altid resultater i intervallet fra $-\frac{\pi}{2}$ til $\frac{\pi}{2}$.
3. $\tan^{-1}$ giver altid resultater i intervallet fra $-\frac{\pi}{2}$ til $\frac{\pi}{2}$.

Hvis man vil finde flere løsninger, skal man derfor tænke sig godt om – eller løse ligningerne grafisk vha. et CAS-værktøj.

7.5 Ligninger med cos og sin

I dette afsnit gennemgås, hvordan man kan løse ligninger med cosinus og sinus og finde alle løsningerne. Fordi sinus og cosinus er periodiske, så vil ligninger, der involverer disse funktioner, som tidligere nævnt ofte have mere end én løsning – og typisk uendeligt mange løsninger.



Figur 7.13: Ligningen $\sin(x) = a$ har to løsninger mellem 0 og 2π.

Hvis man f.eks. skal løse ligningen $\sin(x) = a$, hvor a er et eller andet tal, er en af løsningerne

$$x = \sin^{-1}(a) \; .$$

Men $\sin^{-1}$ giver – som nævnt ovenfor – kun den af løsningerne, der ligger mellem $-\frac{\pi}{2}$ og $\frac{\pi}{2}$.[3] På figur 7.13 kan man se angivet på enhedscirklen, at der også er en anden løsning, som er givet ved

$$x = \pi - \sin^{-1}(a) \; .$$

Idet man kan lægge et helt antal gange 2π til x og få de samme funktionsværdier, betyder det, at ligningen $\sin(x) = a$ har løsningerne

$$x = \sin^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \pi - \sin^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \; , \quad k \in \mathbb{Z} \; .$$

Samme type argument kan man lave for ligningen $\cos(x) = a$, sådan at man får følgende sætning:[4]

Sætning 7.10

Når $-1 \leq a \leq 1$, gælder

1. Ligningen $\cos(x) = a$ har løsningerne

$$x = \cos^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\cos^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \; , \quad k \in \mathbb{Z} \; .$$

2. Ligningen $\sin(x) = a$ har løsningerne

$$x = \sin^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \pi - \sin^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \; , \quad k \in \mathbb{Z} \; .$$

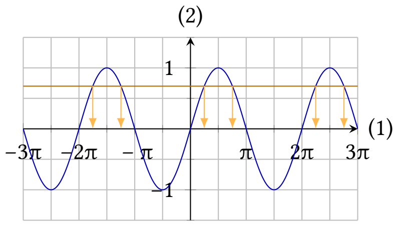
[3] Hvilket svarer til −90° og 90°.

[4] Bemærk i øvrigt, at $-1 \leq a \leq 1$, idet funktionsværdierne for både cos og sin ligger i dette interval.

Eksempel 7.11 Løsningerne til ligningen

$$\sin(x) = 0{,}7$$

kan bestemmes grafisk ved at tegne grafen for $\sin(x)$ og linjen med ligningen $y = 0{,}7$ og aflæse førstekoordinaterne til skæringspunkterne (se figur 7.14).



Figur 7.14: Løsningerne til $\sin(x) = 0{,}7$ kan findes ved at tegne grafen for $\sin(x)$ og linjen med ligningen $y = 0{,}7$ og aflæse skæringspunkternes førstekoordinater.

Denne ligning har ifølge sætning 7.10 løsningerne

$$x = \sin^{-1}(0{,}7) + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \pi - \sin^{-1}(0{,}7) + k \cdot 2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

dvs.[5]

$$x = 0{,}7754 + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = 2{,}3662 + k \cdot 2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

[5]Her regner man ud, hvad $\sin^{-1}(0{,}7)$ og $\pi - \sin^{-1}(0{,}7)$ rent faktisk giver.

Eksempel 7.12 Ligningen

$$3\cos(x) - 1 = 0{,}8$$

løser man ved først at isolere $\cos(x)$:

$$3\cos(x) - 1 = 0{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cos(x) = 1{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = 0{,}6\,.$$

Herefter bruger man sætning 7.10, og får

$$x = \cos^{-1}(0{,}6) + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\cos^{-1}(0{,}6) + k \cdot 2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

som kan reduceres til

$$x = 0{,}9273 + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -0{,}9273 + k \cdot 2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Eksempel 7.13 Løsningerne til ligningen

$$\sin(2x - 1) = 0{,}3$$

finder man også ved at bruge sætning 7.10. Nu står der $2x - 1$ i parentesen, så man får

$$2x - 1 = \sin^{-1}(0{,}3) + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad 2x - 1 = \pi - \sin^{-1}(0{,}3) + k \cdot 2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

I disse to ligninger isolerer man x:

$$x = \frac{\sin^{-1}(0{,}3) + k \cdot 2\pi + 1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\pi - \sin^{-1}(0{,}3) + k \cdot 2\pi + 1}{2}\,.$$

Reducerer man, fås

$$x = \frac{1{,}3047 + k \cdot 2\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{3.8369 + k \cdot 2\pi}{2}\,,$$

dvs.

$$x = 0{,}6524 + k \cdot \pi \quad \vee \quad x = 1{,}9185 + k \cdot \pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Ved at se på enhedscirklen og argumentere, som der blev gjort i foregående afsnit, kan man komme frem til følgende sætning, som ikke bevises her.

Sætning 7.14

Ligningen $\tan(x) = a$ har løsningerne

$$x = \tan^{-1}(a) + k \cdot \pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Eksempel 7.15 Ligningen

$$\tan(x) = 0{,}5$$

kan man løse ved at bruge sætning 7.14:

$$x = \tan^{-1}(0{,}5) + k \cdot \pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

dvs.

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Eksempel 7.16 Ligningen

$$4\tan(x) + 7 = 10$$

løser man også ved at bruge sætning 7.14. Blot skal man her først isolere $\tan(x)$:

$$4\tan(x) + 7 = 10 \quad \Longleftrightarrow \quad 4\tan(x) = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \tan(x) = \frac{3}{4}\,.$$

Herefter kan man bruge sætningen, hvorved man får

$$x = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) + k \cdot \pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

dvs.

$$x = 0{,}6435 + k \cdot \pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

7.6 Øvelser

Øvelse 7.1
Beregn følgende, og illustrer på enhedscirklen:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ b) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

c) $\sin(2{,}7)$ d) $\cos(-5{,}3)$

e) $\sin(1)$ f) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Øvelse 7.2
Bestem de værdier af x, hvor $\cos(x) = \sin(x)$.

Øvelse 7.3
Benyt grundrelationen mellem cos og sin til at bestemme $\tan(x)$, når

a) $\sin(x) = 0{,}2$ b) $\cos(x) = 0{,}6$

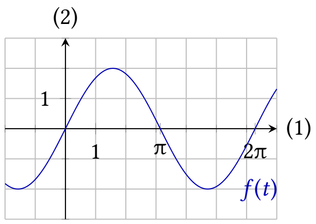
Øvelse 7.4
Benyt grundrelationen mellem cos og sin til at bestemme $\sin(x)$, når

a) $\cos(x) = 0{,}4$ b) $\tan(x) = 2$

Øvelse 7.5
Funktionen f har grafen som vist nedenfor. Forskriften er af formen

$$f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

Bestem ved aflæsning konstanterne A ω og ϕ.

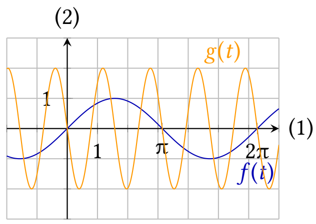


Øvelse 7.6
I følgende opgaver ses $f(t) = \sin(t)$ sammen med to andre funktioner g og h

a) Funktionen g har grafen som vist nedenfor. Forskriften er af formen

$$g(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

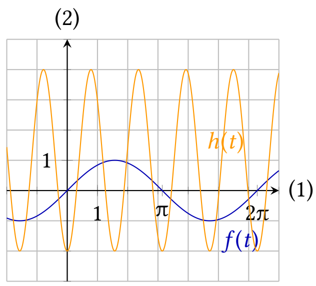
Bestem ved aflæsning konstanterne A, ω og ϕ.



b) Funktionen h har grafen som vist nedenfor. Forskriften er af formen

$$h(t) = A\sin(\omega t + \phi) + b$$

Bestem ved aflæsning konstanterne A, ω, ϕ og b (Vær opmærksom på at perioden for h er $\frac{\pi}{2}$).



Øvelse 7.7
Tegn graferne for funktionerne, og bestem desuden amplituden og perioden for hver af dem:

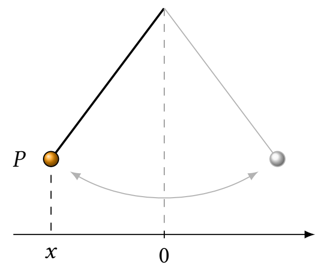
a) $f(x) = 2 \cdot \sin(\frac{1}{3}x + 1)$

b) $g(x) = \frac{1}{4} \cdot \sin(3x - 2)$

c) $h(x) = 3 \cdot \sin(4x + \frac{\pi}{2})$

d) $k(x) = 5 \cdot \sin(\frac{1}{2}x + \pi)$

Øvelse 7.8
På figuren ses et svingende pendul.



Pendulets vandrette position er givet ved

$$x = 4 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{3}t - 1\right) \ , \quad 0 < t < 10\pi$$

a) Angiv største- og mindsteværdien for x.

b) Bestem amplitude og svingningstid.

c) Bestem, i hvilke tidsrum der gælder, at $x > 3$.

Øvelse 7.9
Løs i intervallet $[0; 2\pi]$ ligningen $\sin(x) = 0{,}731$.

Illustrér løsningen i enhedscirklen.

Øvelse 7.10
Bestem i intervallet $[-\pi; \pi]$ løsningerne til ligningen

$$\cos(2t) = 0{,}634$$

Øvelse 7.11
Find samtlige løsninger til ligningerne

a) $\cos(3x) = 0{,}7$ b) $3\sin(2x - 1) = 1{,}5$

Øvelse 7.12
Løs hver af ligningerne

a) $\tan(x) = -1{,}72$ b) $\frac{1}{\tan(x)} = 0{,}27$

Mængdelære A

Mængdelæren er en af de discipliner som rigtigt meget anden matematik (f.eks. funktionsbegrebet og sandsynlighedsregningen) bygger på. I dette afsnit gives derfor en kort gennemgang af nogle af de centrale begreber inden for mængdelæren.

A.1 Mængder

En matematisk mængde kan defineres som en samling af objekter. I princippet kan et »objekt« være hvad som helst, men her ses kun på mængder af tal.

En *mængde* kan defineres på følgende måde.

Definition A.1

En *mængde* er en veldefineret samling af indbyrdes forskellige objekter.

Bemærk, at det kræves, at de objekter, der indgår i mængden, skal være forskellige. Man kan altså ikke lave en mængde, der består af fire 2-taller; der kan kun være ét.

Mængder benævnes normalt med store bogstaver, man kan f.eks. tale om mængden M. Hvis man vil angive, at mængden M består af tallene, 1, 2, 3 og 10 skriver man

$$M = \{1, 2, 3, 10\} \ . \tag{A.1}$$

Dette kaldes at skrive mængden på *listeform.*[1]

[1] I princippet behøver tallene ikke at skrives i rækkefølge, dvs. {1,2,3} og {3,1,2} er den samme mængde.

Man kan se, at tallet 3 ligger i mængden M. Hvis man vil skrive dette matematisk, skriver man

$$3 \in M \ ,$$

hvilket læses »3 tilhører M« eller »3 er element i M«.

Matematisk notation er sådan indrettet, at man mange gange kan sige det modsatte ved blot at overstrege et symbol. Hvis man vil sige, at 7 ikke er element i M, skriver man

$$7 \notin M \ .$$

Meget store mængder

Man kan af og til komme ud for, at en mængde indeholder rigtigt mange tal. Hvis det er tilfældet, kunne det tænkes, at det bliver uoverkommeligt og måske også uoverskueligt at skrive alle tallene op på listeform, som i (A.1). Hvis man f.eks. skal skrive mængden H af alle positive, hele tal mellem 0 og 100, kan man skrive følgende:

$$H = \{1, 2, 3, \ldots, 100\} \ .$$

Man skriver altså lige præcis nok tal, til at læseren kan regne ud, hvordan man fortsætter, og skriver derefter det sidste tal. Prikkerne … sættes så ind i stedet for alle de mange tal, man ikke lige havde plads til på papiret.

I princippet kan man også forestille sig en mængde, der »ikke slutter«. Mængden af positive, ulige tal indeholder f.eks. uendeligt mange elementer. Denne mængde kan man skrive på følgende måde:

$$U = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \ .$$

Specielle mængder

Der findes nogle mængder, som man ofte refererer til i mængdelæren. Man bruger specielle symboler for disse mængder, nemlig

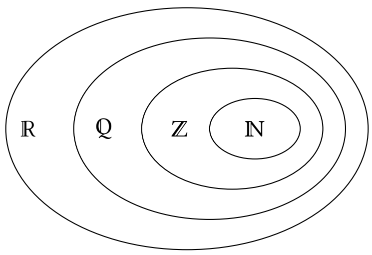
$\emptyset$ *den tomme mængde*, dvs. en mængde der ikke indeholder nogen elementer overhovedet,

$\mathbb{N}$ *de naturlige tal*, mængden af hele positive tal, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ (bemærk, at 0 ikke er med),

$\mathbb{Z}$ *de hele tal*, mængden $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

$\mathbb{Q}$ *de rationale tal*, mængden af alle tal, der kan skrives som brøker, f.eks. $\frac{1}{7}$ og $-\frac{5}{2}$, og

$\mathbb{R}$ *de reelle tal*, mængden af alle tal på hele tallinjen. Nogle af de tal, som tilhører $\mathbb{R}$ er -1, $\frac{1}{6}$, π, e og $\sqrt{2}$.



Figur A.1: Alle naturlige tal er hele tal, og alle hele tal er rationale tal, osv.

Her er det i øvrigt værd at bemærke, at alle de naturlige tal også er hele tal, dvs. mængden $\mathbb{N}$ er en del af mængden $\mathbb{Z}$. På samme måde er mængden af hele tal $\mathbb{Z}$ en del af mængden af rationale tal $\mathbb{Q}$,[2] og mængden af rationale tal er en del af mængden af reelle tal (se figur A.1).

[2]Dette skyldes, at alle hele tal kan skrives som brøker, f.eks. er $2 = \frac{6}{3}$ og $-4 = -\frac{8}{2}$.

A.2 Mængdebygger

Nogle gange kan det være praktisk at beskrive en mængde ved at angive en betingelse (eller flere) som elementerne i mængden opfylder. Et eksempel på dette kunne være

$$A: \ \text{alle de tal, som ligger mellem 1 og 6} \ .$$

Denne mængde kan skrives ved at anvende den såkaldte mængdebygger:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 6\} \ .$$

Dette udtryk består af to dele. Den del, der kommer før den lodrette streg ($x \in \mathbb{R}$) fortæller, hvor tallene i mængden skal komme fra. Her betyder $x \in \mathbb{R}$, at tallene i mængden skal hentes fra mængden af reelle tal, dvs. alle tal vil kunne bruges. Den del, der følger efter stregen, er en betingelse, som tallene skal opfylde; altså i dette tilfælde, at de skal ligge mellem 1 og 6.[3]

[3]Skrivemåden $1 < x < 6$ er en sammenskrivning af $1 < x$ og $x < 6$, dvs. det drejer sig om de tal, der både er større end 1 og mindre end 6.

Andre eksempler på mængder skrevet vha. mængdebyggeren kunne være

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, 1 < x < 6\} \ , \qquad C = \left\{x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x^2 < 9\right\} \ .$$

Her er B mængden af alle hele tal mellem 1 og 6, dvs. den kan også skrives på listeform som

$$B = \{2, 3, 4, 5\} \ .$$

C er mængden af alle de brøker, hvis kvadrater er mindre end 9. Denne mængde kan *ikke* skrives på listeform, idet der er uendeligt mange tal, der opfylder denne betingelse.

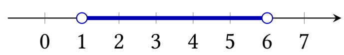
A.3 Intervaller

Mængden A i afsnittet ovenfor er et eksempel på det, man kalder for et *interval*. Et interval er en mængde, der indeholder alle reelle tal mellem to givne værdier, f.eks. »alle reelle tal mellem 1 og 6« eller »alle reelle tal fra −5 til og med 80«. De mængder, der indeholder alle tal større end eller mindre end en given værdi, kalder man også intervaller.

Inden for matematikken har man mange steder brug for at tale om intervaller, og man har derfor fundet på en notation, der gør det nemt at tale om et bestemt interval. Mængden A ovenfor kan fx skrives som

$$A = \ ]1; 6[\ .$$

Dette betyder, at mængden A består af alle tallene mellem 1 og 6. Tallene 1 og 6 kaldes hhv. *venstre* og *højre endepunkt*. At parenteserne vender væk fra tallene betyder, at hverken 1 eller 6 regnes med i intervallet (se figur A.2).



Figur A.2: Intervallet $]1; 6[$. De tomme cirkler ud for 1 og 6 betyder, at disse tal ikke hører til intervallet.

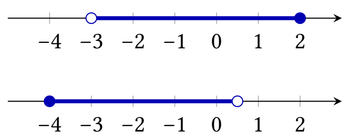
Hvis man i stedet vil angive det interval, der strækker sig fra 1 til 6, men hvor 1 og 6 skal tages med, skriver man

$$D = [1; 6] \ .$$

D vil vha. mængdebyggeren kunne skrives som $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \le x \le 6\}$.

Et par andre eksempler kunne være (se figur A.3).

$$]-3; 2] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -3 < x \le 2\}$$
$$\left[-4; \tfrac{1}{2}\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -4 \le x < \tfrac{1}{2}\right\} \ .$$



Figur A.3: Intervallerne $]-3; 2]$ og $\left[-4; \frac{1}{2}\right[$.

Skal man angive intervallet af alle tal større end 3, anvender man tegnet ∞ (uendelig) for det højre endepunkt:

$$E = \ ]3; \infty[\ .$$

Mængden E består altså af alle de tal, der er større end 3. Hvis man i stedet skal tale om f.eks. alle de tal, der er mindre end eller lig med 5, skrives:

$$F = \ ]-\infty; 5] \ .$$

Bemærk, at når man bruger symbolet ∞, skal parentesen vende væk fra symbolet (dette skyldes, at ∞ ikke er et tal, men blot en angivelse af, at intervallet ikke slutter i den ene eller den anden retning).

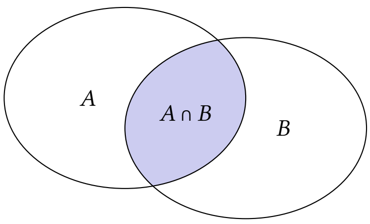
Hvis man lader intervallet være ubegrænset i begge retninger, får man det interval, der består af alle tal, dvs. man kan skrive

$$\mathbb{R} = \ ]-\infty; \infty[\quad .$$

A.4 Mængdeoperationer

Man kan ud fra to mængder A og B danne nye mængder på forskellige måder. Man kan f.eks. se på alle de tal, der både ligger i A og i B eller alle de tal, som ligger i A, men ikke i B.

De følgende definitioner angiver nogle måder at lave nye mængder på (såkaldte mængdeoperationer).



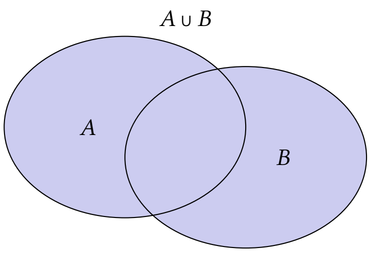
Figur A.4: Fællesmængden $A \cap B$.

Definition A.2

Fællesmængden af to mængder A og B består af de tal, der både ligger i A og i B. Fællesmængden af A og B skrives $A \cap B$.

Eksempel A.3 Hvis $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og $B = \{2, 4, 6, 8\}$, så er

$$A \cap B = \{2, 4\} \quad .$$



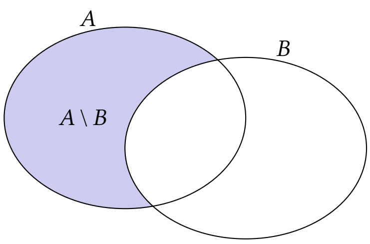
Figur A.5: Foreningsmængden $A \cup B$.

Definition A.4

Foreningsmængden af to mængder A og B består af de tal, der ligger enten i A eller i B (eller i begge). Foreningsmængden af A og B skrives $A \cup B$.

Eksempel A.5 Hvis $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og $B = \{2, 4, 6, 8\}$, så er

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \quad .$$



Figur A.6: Differensmængden $A \setminus B$.

Definition A.6

Differensmængden mellem to mængder A og B består af de tal, der ligger i A men ikke i B. Differensmængden mellem A og B skrives $A \setminus B$.

Eksempel A.7 Hvis $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og $B = \{2, 4, 6, 8\}$, så er

$$A \setminus B = \{1, 3, 5\} \quad .$$

og

$$B \setminus A = \{6, 8\} \, .$$

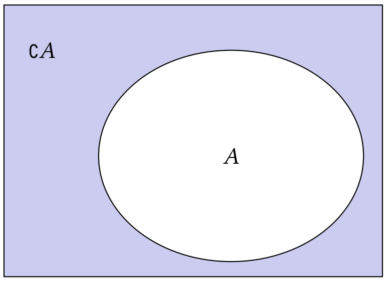
Når man finder differensmængder er rækkefølgen altså ikke ligegyldig.

Til sidst defineres *komplementærmængden*, der består af alle de elementer, der ikke ligger i en given mængde. For at dette begreb kan være veldefineret, er det nødvendigt først at definere en grundmængde, der består af alle de tal, man vil tillade en mængde at indeholde.[4]

[4]Grundmængden kan være alle tal, dvs. $\mathbb{R}$, men det kan også være de naturlige tal $\mathbb{N}$, eller en afgrænset mængde, som f.eks. $\left\{-2, 0, \frac{1}{3}, 7\right\}$.

Definition A.8

Lad G være *grundmængden*. *Komplementærmængden* $\complement A$ består af de elementer i G, som ikke ligger i A, dvs. $\complement A = G \setminus A$.



Figur A.7: Komplementærmængden $\complement A$.

A.5 Relationer mellem mængder

Det kan nogle gange være interessant at sammenligne forskellige mængder. I den sammenhæng bliver man nødt til at definere, hvad det f.eks. betyder at to mængder er lig hinanden.

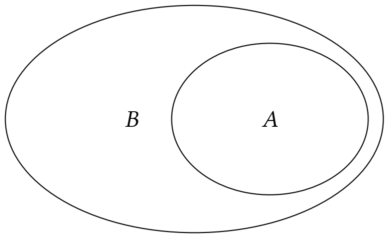
Definition A.9

To mængder A og B siges at være lig med hinanden, når de indeholder præcist de samme elementer. I dette tilfælde skriver man $A = B$.

Hvis alle A's elementer ligger i B, men alle B's elementer ikke nødvendigvis ligger i A, kaldes A en delmængde af B.

Definition A.10

Mængden A siges at være en *delmængde* af mængden B, hvis alle elementer i A også ligger i B. Dette skrives $A \subseteq B$.



Figur A.8: A er en delmængde af B, $A \subseteq B$.

Eksempel A.11 Hvis to mængder er givet ved

$$A = \{-1, 1\} \quad \text{og} \quad B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \ ,$$

så er A en delmængde af B, altså $A \subseteq B$.

Ovenfor blev det argumenteret for, at alle naturlige tal er hele tal, og at alle hele tal er rationale tal, osv. Dette kan udtrykkes vha. delmængdebegrebet, sådan at man kan skrive.

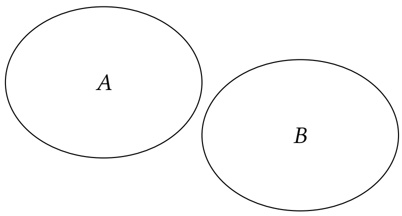
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \ .$$

Dette er illustreret på figur A.1.

Hvis to mængder slet ikke har noget tilfælles kaldes de *disjunkte*.

Definition A.12

To mængder A og B kaldes *disjunkte*, hvis ingen af A's elementer ligger i B (og ingen af B's elementer ligger i A), dvs. når $A \cap B = \emptyset$.



Figur A.9: A og B er disjunkte.

Eksempel A.13 Mængderne $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{-1, 0, 7\}$ er disjunkte.

A.6 Øvelser

Øvelse A.1
Opskriv følgende mængder på listeform:

a) Mængden af alle hele tal fra og med 5 og til og med 10.

b) Mængden af alle kvadrattal mellem 1 og 100.

c) Mængden af alle hele tal, der opfylder $x^2 \leq 9$.

d) Mængden af alle primtal tal fra og med 17 og til, men ikke med, 43.

Øvelse A.2
Skriv nedenstående mængder på listeform.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ går op i } 12\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ går op i } 12\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \text{ går op i } x\}$

d) $D = \{y \mid y \text{ er et primtal mindre end } 17\}$

e) $E = \{z \mid z \text{ er et tocifret kvadrattal}\}$

f) $F = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x^2 \text{ er lige}\right\}$

Øvelse A.3
Afgør, hvilke af følgende udsagn, der er sande:

a) $3 \in \mathbb{Z}$

b) $3 \notin \mathbb{Z}$

c) $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$

d) $10{,}3 \in \mathbb{N}$

e) $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$

f) $-\sqrt{4} \in \mathbb{Z}$

g) $\sqrt{\frac{9}{16}} \notin \mathbb{Q}$

h) $\frac{121}{11} \in \mathbb{N}$

i) $0 \in \mathbb{N}$

j) $\sqrt{3^2 + 4^2} \in \mathbb{Q}$

Øvelse A.4
Bestem følgende mængder.

a) $A = \{x \mid 4x = 1\}$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, x(x-1) + 2x = x^2 + 7\right\}$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, (x+2)(x-2) = 3x^2 - 22\right\}$

d) $D = \left\{x \,\middle|\, 2x - 8 + \frac{1}{2}(x-3) = -x\right\}$

Øvelse A.5
Angiv ved hjælp af intervalparenteser mængderne

a) $]23;44] \setminus [31;56]$

b) $[32;89[\ \setminus \ ]76;97]$

c) $]-4;7] \cup [3;12]$

d) $[-8;-5] \cap \ ]-6;10[$

e) $[-1;2] \setminus \ ]0;\infty[$

f) $]3;7[\ \cap [4;13[$

Øvelse A.6
Lad

$$
\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3, 4\} \\
B &= \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \\
C &= \{-2, 0, 2, 4, 6, 8\}
\end{aligned}
$$

og bestem følgende:

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $A \cap C$

d) $B \cup C$

e) $A \setminus B$

f) $B \setminus A$

g) $(A \cap B) \cup C$

h) $C \setminus A$

i) $(A \cup B) \cap C$

j) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Bibliografi

[1] Ole B. Andersen m.fl. *Den dynamiske jord. Sumatrajordskælvet flyttede videnskaben*. Danmarks Rumcenter og GEUS. URL: http://www.geus.dk/viden_om/ddj/ddj.pdf.

[2] Petr Beckmann. *A History of Pi*. Barnes & Noble, Inc., 1971.

[3] Victor J. Katz. *A History of Mathematics. An Introduction*. 2. udg. Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 1998.

[4] United States Census Bureau. *Demographic Overview — Custom Region — Honduras*. URL: http://www.census.gov/ (bes. 05.03.2014).