Analytisk geometri

Mike Auerbach

Odense, 2012

Den klassiske geometri beskæftiger sig med alle mulige former for figurer: Linjer, trekanter, cirkler, parabler, ellipser osv. I den analytiske geometri lægger man disse figurer ind i et koordinatsystem, således at de kan beskrives vha. ligninger.

Et simpelt eksempel på dette er en ret linje. Som bekendt kan en ret linje skrives på formen
$$y = ax + b,$$
hvor a og b er to konstanter.

Geometri handler som bekendt om at måle forskellige størrelser på givne figurer. Hvis figurerne består af punkter i et koordinatsystem, er det derfor nødvendigt at have en måde at finde afstanden mellem to punkter på.

1 AFSTANDEN MELLEM TO PUNKTER I PLANEN

Antag at man har to punkter i et koordinatsystem $A(x_1; y_1)$ og $B(x_2; y_2)$. Der gælder da følgende sætning.

Sætning 1

Afstanden mellem to punkter i planen $A(x_1; y_1)$ og $B(x_2; y_2)$ er givet ved
$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Beviset for sætningen kan ses i de udleverede noter.

2 CIRKLENS LIGNING

Af noterne fremgår det ligeledes, at en cirkel består af alle de punkter, der har samme afstand (radius) til et bestemt punkt (centrum). Ud fra formlen for afstanden mellem to punkter ser man derfor, at cirklen består af de punkter $(x; y)$, der opfylder
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r,$$
hvor $C(x_0; y_0)$ er cirklens centrum og r dens radius.

Hvis man sætter begge sider af ligningen i anden potens, fås

Sætning 2

En cirkel med centrum $C(x_0; y_0)$ og radius r er givet ved de punkter, der opfylder ligningen
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

3 FORSKYDNING AF KURVER

Ofte vil det være sådan, at det er nemmest at finde ligningen for en bestemt kurve, når den har visse pæne egenskaber; for en cirkel kan det være, at den har centrum i $(0; 0)$, for en parabel, at dens symmetriakse er lodret, osv.

Når man har fundet ligningen for kurven i dette specialtilfælde, kan man så generalisere resultatet ved at forskyde kurven. I virkeligheden er det nemmere at skubbe selve koordinatsystemet den anden vej. Det vil sige, at de punkter, der før hed $(x; y)$ nu hedder $(x - x_0; y - y_0)$. Man erstatter altså blot x og y i ligningen med $x - x_0$ og $y - y_0$.

Dette illustreres lettest ved et eksempel.

Eksempel 3
Ligningen for en cirkel med radius 5 og centrum $(0; 0)$ er givet ved

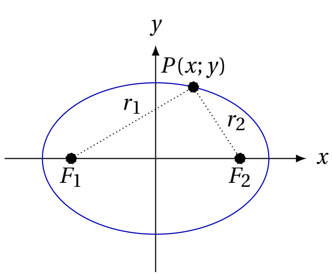
$$x^2 + y^2 = 25.$$

Hvis man vil finde ligningen for cirklen med radius 5 og centrum i $(1; 3)$ skal man altså blot erstattet x med $x - 1$ og y med $y - 3$. Ligningen bliver derfor

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25,$$

som jo også ifølge sætning 2 er ligningen for cirklen med radius 5 og centrum $(1; 3)$.

4 ELLIPSER



Figur 1: En ellipse med brændpunkter F_1 og F_2 på x-aksen og centrum i $(0; 0)$.

Ellipser hører sammen med parabler og hyperbler til de såkaldte keglesnit, dvs. figurer, der opstår, når man lader en kegle blive skåret af et plan.

En ellipse er defineret som de punkter, hvis sammenlagte afstand til to punkter (F_1 og F_2, jf. figur 1) er konstant.

Sagt med en formel svarer dette til

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{1}$$

Ser man på figur 1, kan man se, at dette svarer til, at ellipsens bredde er $2a$. a kaldes derfor for ellipsens *halve storakse*.[1] På tilsvarende måde defineres b som ellipsens *halve lilleakse*. F_1 og F_2 kaldes ellipsens brændpunkter.

[1] Der er en god grund til at indføre den halve storakse (og lilleakse) i stedet for den hele. Formlen for ellipsen (se nedenfor) bliver pænere, og man kan komme fra ellipsens ligning til cirklens ved at sætte a og b lig med cirklen radius r.

I begyndelsen ses på en ellipse, der har både x- og y-akserne som symmetriakser, dvs. at brændpunkterne ligger på x-aksen, og ellipsens centrum (der er punktet midt mellem F_1 og F_2) ligger i $(0;0)$. Dette gør problemet noget lettere at regne på, men der skal alligevel en del forarbejde til, før man kan udlede en ligning for ellipsen.

Formlen (1) kan ikke uden videre laves om til en ligning i x og y. For at komme uden om det problem, udleder man først en formel for r_1 i stedet for summen $r_1 + r_2$.

Allerførst skal man dog lige igennem noget fodarbejde og en enkelt definition.

Definition 4: Eccentricitet

Forholdet mellem afstanden fra F_1 til F_2 og ellipsens storakse $2a$ kaldes ellipsens *eccentricitet* e:

$$e = \frac{|F_1F_2|}{2a}. \tag{2}$$

Som det ses af definitionen, er e et tal, der ligger mellem 0 og 1. Jo tættere e er på 0, jo tættere ligger F_1 på F_2, og jo tættere er ellipsen på at være en cirkel.

Fra (2) får man, at $|F_1F_2| = 2ea$, og man kan derfor udlede, at koordinaterne til de to punkter F_1 og F_2 er

$$F_1(-ea;0) \qquad \text{og} \qquad F_2(ea;0).$$

Herudfra ses det, at

$$r_1 = \sqrt{(x+ea)^2 + y^2} \qquad \text{og} \qquad r_2 = \sqrt{(x-ea)^2 + y^2} \tag{3}$$

Udnytter man (1) fås

$$\begin{aligned} 2a(r_1 - r_2) &= (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = r_1^2 - r_2^2 \\ &= \left((x+ea)^2 + y^2\right) - \left((x-ea)^2 + y^2\right) = 4eax, \end{aligned}$$

dvs.

$$2a(r_1 - r_2) = 4eax \qquad \Leftrightarrow \qquad r_1 - r_2 = 2ex.$$

Man har altså nu, at

$$r_1 + r_2 = 2a \qquad \text{og} \qquad r_1 - r_2 = 2ex.$$

Lægges disse to ligninger sammen, fås

$$2r_1 = 2a + 2ex \qquad \Leftrightarrow \qquad r_1 = a + ex,$$

og r_1 er altså nu udtrykt ved x. Bruger man nu, hvad (3) siger om r_1, får man

$$\sqrt{(x+ea)^2 + y^2} = a + ex \qquad \Leftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
(x+ea)^2 + y^2 = (a+ex)^2 \quad &\Leftrightarrow \\
y^2 = (a+ex)^2 - (x+ea)^2 \quad &\Leftrightarrow \\
y^2 = a^2 + e^2x^2 + 2eax - x^2 + e^2a^2 - 2eax \quad &\Leftrightarrow \\
y^2 = a^2 - e^2a^2 - x^2 + e^2x^2 \quad &\Leftrightarrow \\
y^2 = (1-e^2)(a^2-x^2) \quad & \qquad (4)
\end{aligned}
$$

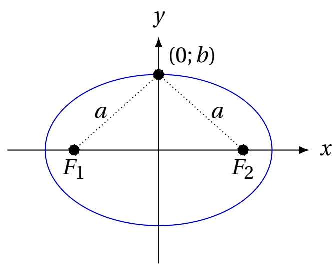
Ligningen (4) for ellipsen afhænger nu af x og y. Det eneste der mangler er at få elimineret tallet e. Der mangler derfor ikke meget i beviset for følgende sætning.

Sætning 5

Ellipsen med centrum i $(0;0)$ og brændpunkter på x-aksen har ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (5)$$

hvor a er den halve storakse, og b er den halve lilleakse.



Figur 2: I punktet $(0;b)$ er der lige langt til punkterne F_1 og F_2 og denne afstand må derfor være a.

Bevis

For at bevise ligningen (5) mangler man blot at få udtrykt e ved a og b i ligningen (4). Ser man på figur 2, kan man se, at afstanden fra F_1 til $(0;b)$ må være a. Pythagoras' sætning giver derfor

$$
\begin{aligned}
(-ea)^2 + b^2 = a^2 \quad &\Leftrightarrow \\
e^2a^2 = a^2 - b^2 \quad &\Leftrightarrow \\
e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} &
\end{aligned}
$$

Indsættes dette i ligning (4), fås

$$y^2 = \left(1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\right) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Deler man nu med b^2 på begge sider af lighedstegnet, får man

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}(a^2 - x^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

og ligningen (5) er dermed vist. ■

Efter denne noget lange vej til ellipsens ligning, udnyttes det, at man blot kan forskyde kurven for at få denne sætning.

Sætning 6

Ellipsen med centrum i (x_0, y_0) og brændpunkter med samme y-koordinat har ligningen

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

hvor a og b er henholdvis halve storakse og halve lilleakse.

5 HYPERBLER

En hyperbel er defineret som de punkter $P(x,y)$, hvor forskellen i afstand til to punkter F_1 og F_2 (som lige som for ellipsen hedder brændpunkter) er konstant. Ser man på figur 1.3, ser man at det svarer til

$$|r_1-r_2|=2a. \tag{6}$$

De to grene af hyperblen skærer så x-aksen i hhv. $(-a,0)$ og $(a,0)$.

Som for ellipser defineres eccentriciteten

$$e=\frac{|F_1F_2|}{2a}.$$

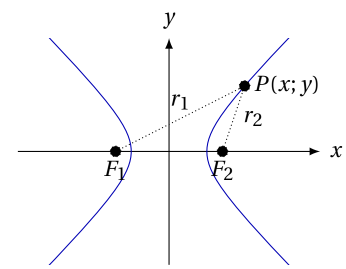
Læg mærke til, at hvor $e<1$ for ellipser, er $e>1$ for hyperbler.

På samme måde som for ellipser, kan man finde frem til en formel, der giver sammenhængen mellem eccentriciteten e og a og b:

$$e^2=1+\frac{b^2}{a^2}. \tag{7}$$

Læg mærke til, at der her er skiftet fortegn foran brøken, idet e jo netop er større end 1. Der findes i øvrigt lige som for ellipser en geometrisk betydning af tallet b, men da dette kræver en del udregninger at beskrive, springes dette over.

Med det samme angives derfor ligningen for en hyperbel.



Figur 3: En hyperbel med brændpunkter F_1 og F_2 på x-aksen og centrum i $(0;0)$.

Sætning 7

En hyperbel med centrum i $(0,0)$ og brændpunkter på x-aksen har ligningen

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Bevis (delvist)

Hvis man gennemfører udregninger, der svarer til dem, der blev udført for ellipsen ovenfor, når man frem til en formel, der svarer til (4)

$$y^2=(e^2-1)(x^2-a^2).$$

Indsætter man heri (7), får man

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2.$$

Herfra fås

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

hvorved sætningen er bevist. ∎

Igen kan man forskyde kurven og få et mere generelt udsagn.

Sætning 8

En hyperbel med centrum i (x_0, y_0) og brændpunkter med samme y-koordinat har ligningen

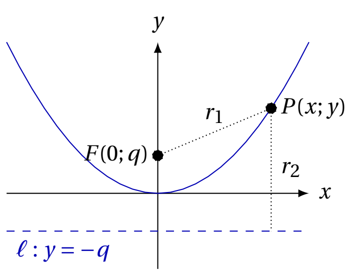
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

6 PARABLER

Den sidste type af keglesnit, der findes, er parablen. En parabel er defineret som de punkter, der har samme afstand til et punkt (kaldet brændpunktet) og til en linje (kaldet ledelinjen). Ser man på figur 4, kan man se, at det svarer til

$$r_1 = r_2 ,$$

hvor r_1 er afstanden fra P til F og r_2 er afstanden fra P til linjen ℓ.



Figur 4: En parabel med toppunkt i $(0;0)$ og vandret ledelinje ℓ.

Hvis man vælger at regne på en parabel med toppunkt i $(0;0)$ og vandret ledelinje som på figuren, fås (da brændpunktet og ledelinjen ligger lige langt fra toppunktet), at brændpunktets koordinater og linjens ligning er givet ved

$$F(0;q) \qquad \text{og} \qquad \ell : y = -q.$$

Man ved derfor, at

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y-q)^2} \qquad \text{og} \qquad r_2 = |y+q|.$$

Hvis disse to størrelser skal være lige store, giver det

$$\begin{aligned} x^2 + (y-q)^2 &= (y+q)^2 && \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 + q^2 - 2qy &= y^2 + q^2 + 2qy && \Leftrightarrow \\ x^2 - 2qy &= 2qy && \Leftrightarrow \\ 4qy &= x^2. \end{aligned}$$

Den sidste ligning kan nu omformes til $y = \frac{1}{4q}x^2$, hvilket er det samme som

$$y = ax^2,$$

hvor $a = \frac{1}{4q}$.

Dette er altså ligningen for en parabel med toppunkt i $(0;0)$. Hvis man vil have ligningen for en parabel med toppunkt i $(x_0; y_0)$ forskyder man kurven og får følgende sætning.

Sætning 9

En parabel med toppunkt i $(x_0; y_0)$ og ledelinje $y = -q + y_0$ har ligningen

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0,$$

hvor $a = \frac{1}{4q}$.

Regner man videre på parablens ligning, fås

$$y = a(x^2 + x_0^2 - 2x_0 x) + y_0 = ax^2 - 2ax_0 x + y_0.$$

Sammenlignes dette med den sædvanlige ligning for en parabel $y = ax^2 + bx + c$, får man, at

$$b = -2ax_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_0 = -\frac{b}{2a}, \tag{8}$$

og

$$c = ax_0^2 + y_0,$$

som omskrives til

$$y_0 = c - ax_0^2 = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac}{4a} - \frac{b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{d}{4a}. \tag{9}$$

Som man kan se, er (8) og (9) i virkeligheden blot de velkendte formler for, hvordan man finder en parabels toppunkt ud fra konstanterne a, b og c.