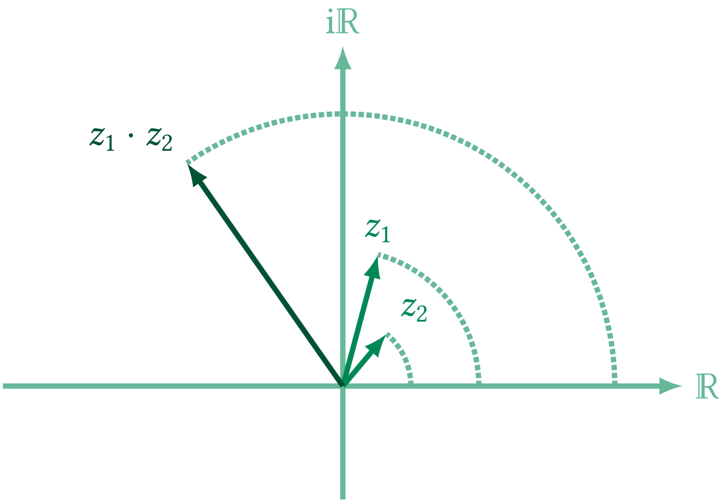
Komplekse tal

Version 1.5
29. oktober 2019



Mike Vandal Auerbach
www.mathematicus.dk

Komplekse tal
Version 1.5, 2019

I disse noter introduceres komplekse tal som linjestykker, der danner en vinkel med tallinjen (førsteaksen i et koordinatsystem). Denne vinkel angives i det meste af noterne i grader, dvs. de fleste af kapitlerne kan læses med et kendskab til basal trigonometri.

I kapitlet om trigonometriske funktioner introduceres den polære form vha. radianer, og der anvendes differentialregning til enkelte argumenter. Et kendskab hertil vil derfor være en fordel.

Disse noter er skrevet til matematikundervisning på stx og må frit anvendes til ikke-kommercielle formål.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Indhold

Hvad er komplekse tal? 1

De tal, man normalt beskæftiger sig med i gymnasiet kommer fra følgende mængder

$\mathbb{N}$ *de naturlige tal*, dvs. tallene $1, 2, 3, 4, \ldots$.

$\mathbb{Z}$ *de hele tal*

$\mathbb{Q}$ *de rationale tal*, dvs. tal, der kan skrives som en brøk.

$\mathbb{R}$ *de reelle tal*, dvs. alle tal på tallinjen.

For disse mængder gælder $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

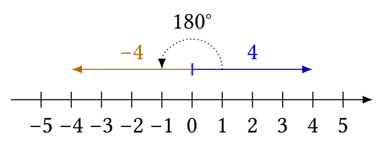
Ud over disse findes der dog en større mængde af tal, nemlig mængden af *komplekse tal* $\mathbb{C}$.

Det kan være svært at forestille sig, at der skulle være flere tal end disse. De reelle tal udfylder jo hele linjen, så hvordan skulle der kunne være plads til flere?

Svaret på dette spørgsmål får man ved at se på tal som linjestykker.

1.1 De reelle tal som linjestykker

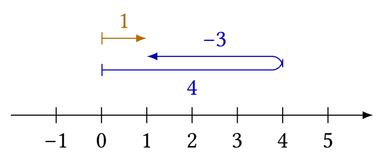
Hvis man ser på et reelt tal som et linjestykke, bliver f.eks. tallet 4 det linjestykke, man får, når man starter i 0 og går 4 skridt frem ad tallinjen. På samme måde bliver -4 det linjestykke man får, når man starter i 0 og går 4 skridt tilbage (jf. figur 1.1).



Figur 1.1: Tallene 4 og -4 som stykker på tallinjen.

Som man også kan se på figuren, danner de to tal -4 og 4 en vinkel på 180° med hinanden. Man kan derfor sige, at de positive tal danner en vinkel på 0 med tallinjen, mens de negative tal danner en vinkel på 180° med tallinjen.

På figur 1.2 kan man se, hvordan man kan forstå addition vha. linjestykker.



Figur 1.2: Regnestykket $4 + (-3) = 1$.

Når man skal lægge 4 og -3 sammen, går man først et stykke på 4 frem og dernæst 3 tilbage. Man ender derved med at have et linjestykke med længde 1, som peger fremad. At lægge tal sammen er altså ikke andet end at lægge linjer i forlængelse af hinanden.

Da de reelle tal således kan forstås som et linjestykke med retning, kunne man i stedet for 4 og -3 lige så godt skrive $4\angle 0°$ og $3\angle 180°$. Denne notation er noget besværlig, og da der kun er to retninger at vælge imellem, er den »normale« notation nok at foretrække.

Men hvis man holder fast i den nye notation et øjeblik, vil man se, at multiplikation kan forstås på følgende måde:

Når man ganger tal med hinanden, ganges deres størrelser med hinanden, og vinklerne lægges sammen.

Skal man f.eks. gange -3 med 6 får man

$$-3 \cdot 6 = (3\angle 180^\circ) \cdot (6\angle 0^\circ) = (3 \cdot 6)\angle(180^\circ + 0^\circ) = 18\angle 180^\circ = -18.$$

To negative tal gange sammen giver et positivt:

$$-5\cdot(-2) = (5\angle 180^\circ)\cdot(2\angle 180^\circ) = (5\cdot 2)\angle(180^\circ+180^\circ) = 10\angle 360^\circ = 10\angle 0^\circ = 10.$$

(At 360° sættes lig 0° følger af, at 360° er en hel omdrejning).

Der er intet nyt i dette, man har bare valgt en anden notation for positive og negative tal, samt fået et par nye forklaringer på, hvorfor fortegn opfører sig, som de gør.

Specielt kan man bemærke, at hvis man ganger et tal med -1, ændrer størrelsen af tallet sig ikke, men tallets vinkel ændrer sig med 180°. Man kan altså sige, at det at gange med -1 svarer til en rotation på 180°.

1.2 De komplekse tal

I foregående afsnit argumenteredes for, at reelle tal kan ses som linjestykker. Disse linjestykker kan danne vinkler på enten 0° eller 180° med tallinjen. Men linjestykker kan i virkeligheden ligge i hvilken som helst retning. Det er derfor naturligt at udvide de reelle tal ved simpelthen at tillade vinklen at være hvad som helst. Herved kommer man frem til de komplekse tal.

Dvs. et komplekst tal består af to reelle tal, en længde og en vinkel. Når man skriver et komplekst tal op vha. disse to størrelser, siger man, at det er skrevet på *polær form*. En måde at skrive komplekse tal på polær form fremgår af følgende definition:

Definition 1.1

Et komplekst tal z kan beskrives som et linjestykke:

$$z = r\angle\phi,$$

hvor r er linjens længde, og vinklen ϕ er den vinkel linjen danner med den positive del af den reelle talakse.

De to dele af et komplekst tal z, længden og vinklen (retningen) kaldes tallets *modulus* ($|z|$) og *argument* ($\arg(z)$).

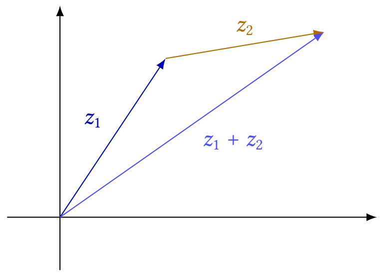
For det kompleks tal $z = r\angle\phi$ gælder altså

$$|z| = r \qquad \text{og} \qquad \arg(z) = \phi.$$

Da der findes flere vinkler, der svarer til samme retning, er $\arg(z)$ ikke entydigt bestemt (f.eks. svarer 270° og -90° til samme retning). Man har derfor defineret *hovedargumentet* ($\mathrm{Arg}(z)$) til et komplekst tal, som det argument, der ligger i intervallet $]-180^\circ; 180^\circ]$.

1.3 Addition og multiplikation

Addition af komplekse tal foregår ved at lægge linjestykkerne i forlængelse af hinanden som illustreret på figur 1.3.

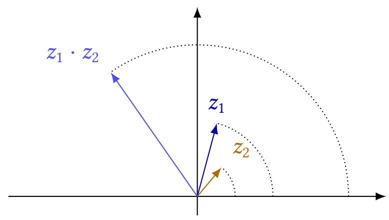


Figur 1.3: Addition af to komplekse tal, z_1 og z_2.

Man ganger to komplekse tal ved at gange deres størrelser og lægge deres vinkler sammen:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \angle \phi_1) \cdot (r_2 \angle \phi_2) = (r_1 \cdot r_2) \angle (\phi_1 + \phi_2).$$

Dette er illustreret på figur 1.4



Figur 1.4: Multiplikation af de to komplekse tal z_1 og z_2.

De komplekse tal kan altså ses som tal i en plan, hvor de reelle tal er tal på en linje – man taler i denne sammenhæng om *den komplekse plan*. Man har altså pludselig to dimensioner i stedet for blot én.

Ser man på de reelle tal, har man tallet 1, som beskriver linjestykket, der ligger 1 enhed fremad. Dette tal kan siges at være en enhed i retningen ad den sædvanlige tallinje. Men når man bevæger sig i planen, er der jo en tallinje mere, som står vinkelret på den gamle. Man har derfor vedtaget, at »1 opad« skal beskrives ved det komplekse tal i.

Med længde og vinkel sat på, har man altså, at

$$\mathrm{i} = 1 \angle 90^\circ.$$

Hvis man nu bruger multiplikationsreglerne, opdager man noget pudsigt, nemlig at:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (1 \angle 90^\circ) \cdot (1 \angle 90^\circ) = (1 \cdot 1) \angle (90^\circ + 90^\circ) = 1 \angle 180^\circ.$$

Men tallet $1 \angle \pi$ svarer jo til det reelle tal -1 (!), dvs.

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Ved at udvide de reelle tal til de komplekse, opdager man altså pludseligt, at et tal ganget med sig selv kan give noget negativt — hvilket jo tidligere ansås for en umulighed.

1.4 Øvelser

Øvelse 1.1
Tag udgangspunkt i notationen $r\angle\phi$ for et reelt tal (f.eks. $4\angle\pi$ i stedet for -4). Så kan multiplikation ifølge det ovenstående defineres på følgende måde:

$$(r\angle\phi)\cdot(s\angle\theta) = (rs)\angle(\phi+\theta).$$

Argumentér for, at denne måde at gange tal sammen på giver samme resultat som den sædvanlige multiplikation.

Øvelse 1.2
Vis, at for det komplekse tal $z = r\angle\phi$ er

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\angle-\phi.$$

Hint: Tag udgangspunkt i formlen $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

Øvelse 1.3
Bestem produkterne

a) $(3\angle 180^\circ)\cdot(4\angle 90^\circ)$

b) $(6\angle 60^\circ)\cdot(2\angle 90^\circ)$

c) $(1\angle 90^\circ)\cdot(7\angle 45^\circ)$

d) $(2{,}3\angle 19^\circ)\cdot(8{,}2\angle -132^\circ)$

Øvelse 1.4
Bestem summen af de to komplekse tal $1\angle 90^\circ$ og $3\angle 45^\circ$.

Hint: Tegn en skitse.

2 Algebraisk beskrivelse af komplekse tal

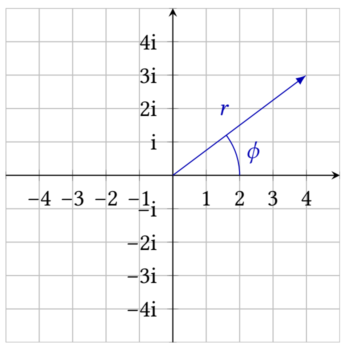
Ethvert punkt i den komplekse plan svarer til et komplekst tal. Man kan derfor på en naturlig måde beskrive komplekse tal ud fra deres koordinater som punkter i planen.

Den komplekse plan udspændes af to akser. Den vandrette akse kaldes den *reelle* akse, mens den lodrette kaldes den *imaginære*. De tal, som ligger på den lodrette akse, kaldes *imaginære tal*; dette svarer fuldstændigt til, at de tal, som ligger på den reelle akse, blot er de sædvanlige reelle tal.

Mængden af reelle tal hedder som bekendt $\mathbb{R}$; mængden af imaginære tal hedder $\mathrm{i}\mathbb{R}$, idet det jo blot drejer sig om de reelle tal ganget med den imaginære enhed i.

Den reelle akse måles i enheden 1, mens den imaginære måles i enheden i, der jo betegner det komplekse tal, som har længden 1 og går lodret op fra punktet $(0; 0)$. (Se figur 2.1.)

På figur 2.1 ser man det komplekse tal, som svarer til punktet $(4; 3)$. Dette tal skrives $4 + 3\mathrm{i}$. Notationen viser, at det drejer sig om det tal, man får, når man går 4 enheder ud ad den reelle akse og 3 enheder op ad den imaginære.



Figur 2.1: Tallet $4 + 3\mathrm{i}$ i den komplekse plan.

Man kan altså nu opskrive følgende definition på komplekse tal:

Definition 2.1

Et komplekst tal z er et tal på formen

$$z = x + y\,\mathrm{i}\,,$$

hvor x og y er reelle tal, og tallet i er den *imaginære enhed*, hvorom der gælder, at $\mathrm{i}^2 = -1$.

Hvis det komplekse tal $z = x + y\,\mathrm{i}$, kaldes x for *real-delen* af z, mens y kaldes *imaginær-delen*. Dette skrives

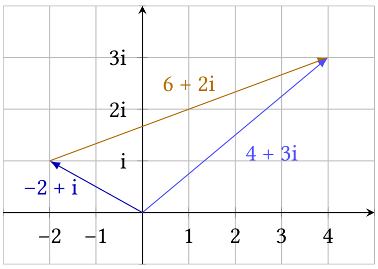
$$\mathrm{Re}(z) = x \qquad \text{og} \qquad \mathrm{Im}(z) = y.$$

2.1 Addition og multiplikation

Addition af komplekse tal er beskrevet ovenfor. Her står, at komplekse tal lægges sammen ved at lægge dem i forlængelse af hinanden.

På figur 2.2 kan man se, hvordan man udregner summen

$$(-2+\mathrm{i})+(6+2\mathrm{i}).$$



Figur 2.2: Summen af de to tal $-2+\mathrm{i}$ og $6+2\mathrm{i}$.

Som det fremgår af figuren er resultatet $4+3\mathrm{i}$, man lægger altså blot realdelene og imaginærdelene sammen hver for sig. Det er forholdsvist let at overbevise sig om, at det derfor er ligegyldigt, i hvilken rækkefølge man lægger tallene sammen.

Da summen af to komplekse tal altså findes på denne forholdsvist simple måde, er det slet ikke nødvendigt at argumentere med koordinater. Man kan simpelthen udføre additionen, som om i var en hvilken som helst konstant, og man får

$$(-2+\mathrm{i})+(6+2\mathrm{i})=-2+\mathrm{i}+6+2\mathrm{i}=4+3\mathrm{i}.$$

Multiplikation er en anelse mere besværligt, idet et komplekst tal jo er en sum af en reel og en imaginær del. Hvis man skal gange to komplekse tal med hinanden, skal man derfor vide, hvordan man ganger parenteser sammen. Produktet af de to tal $4+\mathrm{i}$ og $2-3\mathrm{i}$ bliver

$$(4+\mathrm{i})\cdot(2-3\mathrm{i})=4\cdot 2-4\cdot 3\mathrm{i}+\mathrm{i}\cdot 2-\mathrm{i}\cdot 3\mathrm{i}=8-12\mathrm{i}+2\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2=8-10\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2.$$

Her dukker der pludselig et i^2 op; men da $\mathrm{i}^2=-1$, kan man regne videre og få

$$8-10\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2=8-10\mathrm{i}-3\cdot(-1)=8-10\mathrm{i}+3=11-10\mathrm{i}.$$

Det kan vises (hvilket gøres nedenfor), at denne form for multiplikation svarer fuldstændigt til den, der er defineret tidligere.

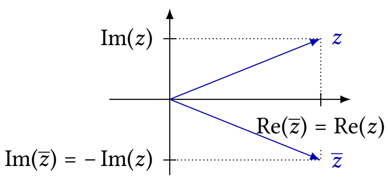
2.2 Konjugering, modulus og argument

I dette afsnit vises, hvordan man omregner mellem de to notationer $z=r\angle\phi$, og $z=x+y\,\mathrm{i}$. Først ses dog på en meget nyttig operation kaldet kompleks *konjugering*:

Definition 2.2

Til ethvert komplekst tal $z=x+y\,\mathrm{i}$ findes et andet tal, kaldet det *konjugerede* tal $\overline{z}$, som er defineret ved

$$\overline{z}=x-y\,\mathrm{i}.$$



Figur 2.3: Det komplekse tal z og dets konjugerede, $\overline{z}$.

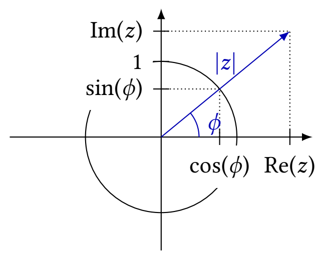
På figur 2.3 er vist, hvordan z og $\overline{z}$ ligger i forhold til hinanden. Man kan se af figuren, at

$$|\overline{z}|=|z| \qquad \text{og} \qquad \arg(\overline{z})=-\arg(z).$$

For at omregne fra $z = r\angle\phi$ til $z = x + \mathrm{i}y$ skal man finde en måde at udtrykke $\mathrm{Re}(z)$ og $\mathrm{Im}(z)$ ved $|z|$ og $\arg(z)$.

Ud fra figur 2.4 kan man udlede, at

$$\mathrm{Re}(z) = |z| \cdot \cos(\phi) \qquad \text{og} \qquad \mathrm{Im}(z) = |z| \cdot \sin(\phi). \tag{2.1}$$



Figur 2.4: Tallet z med argument ϕ vist sammen med enhedscirklen.

Hvis et komplekst tal er skrevet på formen $z = r\angle\phi$ kan det altså omskrives til $z = |z|\cos(\phi) + |z|\sin(\phi)\,\mathrm{i}$. Dette opsummeres i følgende sætning:

Sætning 2.3

Hvis et komplekst tal z er skrevet på polær form $z = r\angle\phi$, er

$$z = |z| \cdot (\cos(\phi) + \sin(\phi)\,\mathrm{i}).$$

Sætning 2.3 gør det muligt at vise, at multiplikation af komplekse tal fungerer på samme måde, hvad enten man kigger på det komplekse tal på polær form ($z = r\angle\phi$) eller på algebraisk form ($z = x + y\,\mathrm{i}$).

Sætning 2.4

For produktet $z \cdot w$ af de to komplekse tal z og w gælder

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|,$$

og

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w).$$

Bevis

Beviset bygger på de såkaldte *additionsformler* for cosinus og sinus:[1]

$$\begin{aligned}
\cos(u+v) &= \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)\\
\sin(u+v) &= \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)
\end{aligned}$$

De to komplekse tal z og w kan ifølge sætning 2.3 skrives på formen

$$z = |z|(\cos(\phi) + \sin(\phi)\,\mathrm{i}),$$

og

$$w = |w|\,(\cos(\theta) + \sin(\theta)\,\mathrm{i}),$$

hvor $\phi = \arg(z)$ og $\theta = \arg(w)$. Produktet af de to tal bliver så

$$\begin{aligned}
z \cdot w &= |z|\,\big(\cos(\phi) + \sin(\phi)\,\mathrm{i}\big) \cdot |w|\,\big(\cos(\theta) + \sin(\theta)\,\mathrm{i}\big)\\
&= |z| \cdot |w| \cdot \big(\cos(\phi) + \sin(\phi)\,\mathrm{i}\big) \cdot \big(\cos(\theta) + \sin(\theta)\,\mathrm{i}\big)\\
&= |z| \cdot |w| \cdot \big(\cos(\phi)\cos(\theta) + \cos(\phi)\sin(\theta)\,\mathrm{i}\\
&\qquad\qquad + \sin(\phi)\cos(\theta)\,\mathrm{i} - \sin(\phi)\sin(\theta)\big)\\
&= |z| \cdot |w| \cdot \Big(\big(\cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\phi)\sin(\theta)\big)\\
&\qquad\qquad + \big(\sin(\phi)\cos(\theta) + \cos(\phi)\sin(\theta)\big)\,\mathrm{i}\Big)
\end{aligned}$$

[1] Et bevis for formlerne kan ses på http://uvmat.dk/jr/mathpub/DiffSin.htm eller http://en.wikibooks.org/wiki/Trigonometry/Addition_Formula_for_Sines .

Men ifølge additionsformlerne kan dette omskrives til

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\phi + \theta) + \sin(\phi + \theta)\,\mathrm{i}),$$

hvilket viser sætningen. ■

Hvis man skal omskrive fra algebraisk til polær form, skal tallet $z = x + y\,\mathrm{i}$ omskrives til $z = r\angle\phi$. Dette kræver, at man kan udregne modulus ($r = |z|$) og argument ($\phi = \arg(z)$).

Sætning 2.5

Modulus for et komplekst tal $z = x + y\,\mathrm{i}$ kan beregnes som

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Bevis

Modulus af det komplekse tal $z = x + y\,\mathrm{i}$ er givet som længden af linjestykket fra $(0; 0)$ til $(x; y)$.

Derved følger det af Pythagoras' sætning, at

$$|z|^2 = x^2 + y^2,$$

og det ønskede er dermed vist. ■

Man kan i øvrigt udlede af sætning 2.5, at

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}.$$

Hvis $z = x + y\,\mathrm{i}$ har man jo, at $\overline{z} = x - y\,\mathrm{i}$, og man får

$$z \cdot \overline{z} = (x + y\,\mathrm{i})(x - y\,\mathrm{i}) = x^2 - (y\,\mathrm{i})^2 = x^2 - y^2\mathrm{i}^2 = x^2 - (-1)y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Sammenhængen (2.1) kan omskrives til

$$\cos(\phi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \qquad \text{og} \qquad \sin(\phi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}.$$

Argumentet ϕ er så de tal, der løser begge ligninger. Hvis man vil finde hovedargumentet skal man finde den løsning i intervallet $]-\pi; \pi]$, der løser begge ligninger.

Man kan udlede, at den søgte vinkel ϕ kan udregnes på følgende måde:

$$\phi = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right) & \text{hvis } \mathrm{Im}(z) \geq 0 \\ -\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right) & \text{hvis } \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}.$$

Man kan nu sammenfatte følgende sætning:

Sætning 2.6

Hvis et komplekst tal $z = x + y\,\mathrm{i}$ kan det omskrives til polær form $z = r\angle\phi$, hvor

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

og

$$\phi = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right) & \text{hvis } y \geq 0 \\ -\cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right) & \text{hvis } y < 0 \end{cases} .$$

Bevis
Ud fra figur 2.4 kan man se, at det følger af den pythagoræiske læresætning, at

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Af figuren kan man også se, at

$$x = r \cdot \cos(\phi) \quad \text{og} \quad y = r \cdot \sin(\phi) ,$$

hvor $\phi = \arg(z)$. Heraf følger direkte, at

$$\cos(\phi) = \frac{x}{r} .$$

Denne ligning kan løses ved brug af $\cos^{-1}$. Hvis tallet z ligger i første eller anden kvadrant (dvs. hvis $y \geq 0$), så får man direkte løsningen som

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right) \quad \text{hvis } y \geq 0 .$$

Ligger tallet z derimod i tredje eller fjerde kvadrant, så får man ikke den rigtige løsning på ligningen med denne formel, idet $\cos^{-1}$ altid giver vinkler mellem 0 og π, og et tal, der ligger i tredje eller fjerde kvadrant har en vinkel mellem $-\pi$ og 0.

Er vinklen negativ, så vil $\cos^{-1}$ give den tilsvarende positive vinkel, fordi $\cos(-\phi) = \cos(\phi)$. For et tal i tredje eller fjerde kvadrant (hvor $y < 0$), får man derfor

$$\phi = -\cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right) \quad \text{hvis } y < 0 . \qquad \blacksquare$$

Eksempel 2.7 (Omregning til polær form) Her ses på det komplekse tal $6 - 2\mathrm{i}$. Tallets modulus er

$$|6 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 6{,}32 .$$

Da $\mathrm{Im}(6 - 2\mathrm{i}) = -2 < 0$ er tallets argument

$$\mathrm{Arg}(6 - 2\mathrm{i}) = -\cos^{-1}\left(\frac{6}{6{,}32}\right) = -79{,}2^\circ .$$

Man har altså, at

$$6 - 2\mathrm{i} = 6{,}32\angle -79{,}2^\circ .$$

2.3 Subtraktion og division

Ovenfor er beskrevet, hvordan man lægger komplekse tal sammen og hvordan, man ganger dem med hinanden. I dette afsnit beskrives, hvordan man trækker fra og dividerer.

At trække komplekse tal fra hinanden er lige så simpelt som at lægge dem sammen. Skal man f.eks. udregne differensen $(7 - \mathrm{i}) - (9 + 3\mathrm{i})$, får man

$$(7 - \mathrm{i}) - (9 + 3\mathrm{i}) = 7 - \mathrm{i} - 9 - 3\mathrm{i} = -2 - 4\mathrm{i}.$$

Når man dividerer, dukker der dog en komplikation op, idet man så står med to led i nævneren på en brøk. Skal man dividere $6 + 2\mathrm{i}$ med $4 - 3\mathrm{i}$, får man

$$\frac{6 + 2\mathrm{i}}{4 - 3\mathrm{i}},$$

og det ser umiddelbart ikke ud som om, dette kan reduceres. Tricket består her i at huske, at $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, som jo er et reelt tal. Man forlænger derfor brøken med nævnerens konjugerede tal (her $4 + 3\mathrm{i}$), så regnestykket bliver

$$\begin{aligned}\frac{6 + 2\mathrm{i}}{4 - 3\mathrm{i}} = \frac{(6 + 2\mathrm{i})(4 + 3\mathrm{i})}{(4 - 3\mathrm{i})(4 + 3\mathrm{i})} &= \frac{6 \cdot 4 + 6 \cdot 3\mathrm{i} + 2\mathrm{i} \cdot 4 + 2\mathrm{i} \cdot 3\mathrm{i}}{4^2 + 3^2} \\ &= \frac{24 + 18\mathrm{i} + 8\mathrm{i} - 6}{25} = \frac{18 + 24\mathrm{i}}{25} = \tfrac{18}{25} + \tfrac{24}{25}\mathrm{i}\,.\end{aligned}$$

Man udregner altså resultatet af en division mellem komplekse tal ved at forlænge brøken med nævnerens konjugerede tal.

En anden måde at skrive division op på, er at

$$\frac{w}{z} = w \cdot z^{-1},$$

hvor det reciprokke tal z^{-1} kan udregnes vha. denne sætning:

Sætning 2.8

Den reciprokke værdi af et komplekst tal z er

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Bevis
Sætningen bevises vha. følgende udregning

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1 \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2},$$

hvor det sidste lighedstegn følger af, at $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. ∎

2.4 Argumentet for komplekse tal

Argumentet for et komplekst tal er den vinkel, som tallet danner med den positive reelle akse. Men denne vinkel er ikke entydigt bestemt. Da vinklen ikke ændrer sig, hvis man lægger en hel omgang til eller trækker en hel omgang fra, er argumentet til et komplekst tal altså i virkeligheden uendeligt mange forskellige tal. Det er derfor i virkeligheden forkert at tale om argument*et*; man burde i stedet tale om *et* argument.

Hvis ϕ er et argument til det komplekse tal z, gælder der altså at alle tal

$$\phi + n \cdot 360^\circ \qquad \text{hvor } n \text{ er et helt tal}$$

er et argument til z.

Hovedargumentet er derimod entydigt bestemt, idet hovedargumentet er den vinkel, der ligger i intervallet $]-180^\circ; 180^\circ]$. At argumentet ikke er entydigt bestemt, har en konsekvens, der vil blive demonstreret i næste afsnit.

2.5 Øvelser

Øvelse 2.1
Beregn

a) $(3 + \mathrm{i}) + (6 - \mathrm{i})$
b) $(2 + 3\mathrm{i}) + (-8 - 7\mathrm{i})$
c) $4 + (6 - \mathrm{i})$
d) $(3 + 2\mathrm{i}) \cdot (1 + \mathrm{i})$
e) $(5 - 3\mathrm{i}) \cdot (-7 + \mathrm{i})$
f) $(4 + 2\mathrm{i})^2$

Øvelse 2.2
Argumentér for, at

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \text{og} \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}\,.$$

Øvelse 2.3
Omregn til algebraisk form

a) $6\angle 180^\circ$
b) $7\angle 45^\circ$
c) $6{,}2\angle 54^\circ$
d) $8{,}34\angle 172^\circ$

Øvelse 2.4
Omregn til polær form

a) $3 + \mathrm{i}$

b) $6 - 2\mathrm{i}$

c) $-8 + 4\mathrm{i}$

d) $6{,}23 + 0{,}94\mathrm{i}$

e) $-13{,}6 + 26{,}8\mathrm{i}$

Øvelse 2.5
Beregn følgende

a) $\dfrac{3 + \mathrm{i}}{6 - \mathrm{i}}$
b) $\dfrac{2 + 6\mathrm{i}}{-1 + 3\mathrm{i}}$
c) $\dfrac{8 - 2\mathrm{i}}{-2 + 8\mathrm{i}}$

3 Potenser og rødder

Potensopløftning defineres for komplekse tal på samme måde som for reelle tal:

$$z^p = \overbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}^{p \text{ gange}}.$$

Man kan vha. sætning 2.4 vise følgende:

Sætning 3.1

For det komplekse tal z gælder

$$|z^n| = |z|^n,$$

og

$$\arg(z^n) = n \cdot \arg(z).$$

Det er altså på sin vis nemmere at potensopløfte et komplekst tal, hvis det er skrevet på polær form.

Eksempel 3.2 Det komplekse tal z er givet ved $z = 5\angle 120^\circ$. Hvad er z^3?

Man får

$$|z^3| = |z|^3 = 5^3 = 125,$$

og

$$\arg(z^3) = 3 \cdot \arg(z) = 3 \cdot 120^\circ = 360^\circ .$$

Dvs. $z^3 = 125\angle 360^\circ$.

Dette tal er ikke angivet med hovedargument, idet vinklen 360° ikke ligger i intervallet $]-180^\circ; 180^\circ]$. Men 360° svarer jo til en hel omgang rundt i cirklen, så den tilsvarende vinkel i det rigtige interval vil være 0°.

Man har derfor, at

$$(5\angle 120^\circ)^5 = 125\angle 0^\circ .$$

Foretrækker man at se de to tal på algebraisk form ($z = x + y\,\mathrm{i}$), bruges sætning 2.3, og man får

$$z = 5 \cdot (\cos(120^\circ) + \mathrm{i}\ \sin(120^\circ)) = -\tfrac{5}{2} + \tfrac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\ ,$$

z^3 har argument 0°, dvs. tallet er et punkt på den positive reelle akse. Da $|z^3| = 125$ er $z^3 = 125$.

Man har altså

$$\left(-\tfrac{5}{2}+\tfrac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3 = 125\ .$$

Når man skal finde rødder af komplekse tal, kommer man i en situation, hvor man får mere end ét resultat. Regner man på reelle tal, bliver f.eks. $\sqrt[3]{125} = 5$, men når man ser på tallet 125 som et komplekst tal, bliver svaret ikke så entydigt.

$\sqrt[3]{125}$ er det tal z, som opløftet i 3. potens giver 125 ($z^3 = 125$), men som det fremgår af eksemplet ovenfor giver $\left(-\tfrac{5}{2}+\tfrac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3$ også 125. Det ville altså være mere korrekt at sige, at $\sqrt[3]{125}$ er *de* tal, som opfylder $z^3 = 125$.

Dette brud med entydigheden af resultatet følger af, at et tals argument ikke er entydigt bestemt. Sætning 3.1 viser, hvordan man potensopløfter et komplekst tal på polær form. Omvendt må der derfor gælde følgende:

Sætning 3.3

For det komplekse tal z gælder

$$\left|\sqrt[n]{z}\right| = \sqrt[n]{|z|},$$

og

$$\arg(\sqrt[n]{z}) = \frac{1}{n}\cdot\arg(z).$$

Det faktum, at argumentet til et komplekst tal, ikke er entydigt bestemt, er det, som gør at 'den n'te rod' af et komplekst tal heller ikke er entydigt bestemt.

Hvis ϕ er et argument til et komplekst tal z ($\phi = \arg(z)$), vil alle tallene

$$\ldots, \phi-1080^\circ, \phi-720^\circ, \phi-360^\circ, \phi+360^\circ, \phi+720^\circ, \phi+1080^\circ, \ldots$$

også være argumenter til z.

Hvis man skal finde argumentet til $\sqrt[n]{z}$ skal man altså i princippet dele alle disse tal med n, og det viser sig, at der vil være n af disse resultater, der ligger i intervallet $]-180^\circ; 180^\circ]$.

Eksempel 3.4 Hvordan beregnes $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$. Da i er det komplekse tal med modulus 1 og argument 90° er $\mathrm{i} = 1\angle 90^\circ$.

Modulus af $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$ er derfor $\sqrt[3]{1} = 1$.

For at finde argumenterne, skrives nogle af argumenterne for i op (husk at hovedargumentet er 90°):

$$90^\circ - 360^\circ\ ,\quad 90^\circ\ ,\quad 90^\circ + 360^\circ\ .$$

Man regner sammen og får de tre argumenter

$$-270^\circ\ ,\quad 90^\circ\ ,\quad 450^\circ\ .$$

Da man skal finde den tredje rod, divideres disse tal med 3:

$$-90^\circ\,, \quad 30^\circ\,, \quad 150^\circ\,.$$

De tre 3. rødder af i er derfor

$$1\angle -90^\circ\,, \quad 1\angle 30^\circ \quad \text{og} \quad 1\angle 120^\circ\,.$$

Disse tal kan vha. sætning 2.3 omskrives til algebraisk form:

$$-\mathrm{i}\,, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\,, \quad \text{og} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\,.$$

Eksempel 3.5 I dette eksempel vises, hvordan man bestemmer de fem 5. rødder af tallet $-2 + 7\mathrm{i}$, dvs. $\sqrt[5]{-2 + 7\mathrm{i}}$. Først omskrives tallet til polær form:

$$|-2 + 7\mathrm{i}| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2} = \sqrt{53} = 7{,}28$$

$$\mathrm{Arg}(-2 + 7\mathrm{i}) = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{7{,}28}\right) = 105{,}9^\circ$$

Dvs. $-2 + 7\mathrm{i} = 7{,}28\angle 105{,}9^\circ$.

Nu er

$$|\sqrt[5]{-2 + 7\mathrm{i}}| = \sqrt[5]{7{,}28} = 1{,}49$$

Argumenterne til $\sqrt[5]{-2 + 7\mathrm{i}}$ findes ved at dividere $105{,}9^\circ + n \cdot 360^\circ$ med 5:

$$\arg(\sqrt[5]{-2 + 7\mathrm{i}}) = \frac{105{,}9^\circ + n \cdot 360^\circ}{5} = 21{,}2^\circ + n \cdot 72^\circ.$$

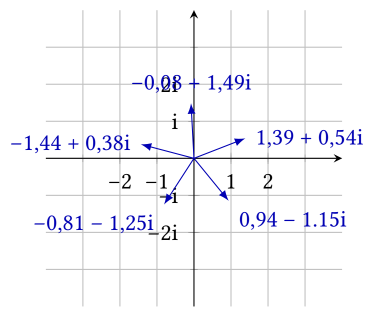
Blandt disse tal, vil 5 ligge i intervallet $]-180^\circ; 180^\circ]$, nemlig de tal, hvor n er -2, -1, 0, 1 eller 2:

$$\begin{aligned}
21{,}2^\circ + (-2) \cdot 72^\circ &= -122{,}8^\circ \\
21{,}2^\circ + (-1) \cdot 72^\circ &= -50{,}8^\circ \\
21{,}2^\circ + 0 \cdot 72^\circ &= 21{,}2^\circ \\
21{,}2^\circ + 1 \cdot 72^\circ &= 93{,}2^\circ \\
21{,}2^\circ + 2 \cdot 72^\circ &= 165{,}2^\circ\,.
\end{aligned}$$

De fem 5. rødder af $-2 + 7\mathrm{i}$ har altså modulus 1,49 og argument givet ved de fem tal ovenover. Skal tallene skrives på algebraisk form bruges sætning 2.3:

$$\begin{aligned}
1{,}49 \cdot (\cos(-122{,}8^\circ) + \mathrm{i}\,\sin(-122{,}8^\circ)) &= -0{,}81 - 1{,}25\mathrm{i} \\
1{,}49 \cdot (\cos(-50{,}8^\circ) + \mathrm{i}\,\sin(-50{,}8^\circ)) &= 0{,}94 - 1{,}15\mathrm{i} \\
1{,}49 \cdot (\cos(21{,}2^\circ) + \mathrm{i}\,\sin(21{,}2^\circ)) &= 1{,}39 + 0{,}54\mathrm{i} \\
1{,}49 \cdot (\cos(93{,}2^\circ) + \mathrm{i}\,\sin(93{,}2^\circ)) &= -0{,}08 + 1{,}49\mathrm{i} \\
1{,}49 \cdot (\cos(165{,}2^\circ) + \mathrm{i}\,\sin(165{,}2^\circ)) &= -1{,}44 + 0{,}38\mathrm{i}
\end{aligned}$$

De fem 5. rødder af $-2 + 7\mathrm{i}$ er afbildet på figur 3.1.



Figur 3.1: De fem 5. rødder af −2 + 7i.

3.1 Andengradsligninger

Som det fremgår af forrige afsnit, har ethvert komplekst tal n n'te-rødder. Ethvert komplekst tal har derfor 2 kvadratrødder. Vinklen mellem disse to rødder vil være 180°. Man kan derfra udlede, at hvis $a + ib$ er en kvadratrod af z, vil den anden kvadratrod være $-a - ib$.

Hvis imaginærdelen af z er 0 (dvs. $z = a + 0\mathrm{i}$ er et reelt tal) er kvadratrødderne nemme at finde. F.eks. giver $\sqrt{4 + 0\mathrm{i}}$ tallene 2 og −2. For generelle komplekse funktioner er det mere besværligt at finde kvadratrødderne.

Eksempel 3.6 Ligningen $z^2 = 3 + 3\mathrm{i}$ løses ved at finde $\sqrt{3 + 3\mathrm{i}}$. For at finde denne løsning omskrives først til polær form:

$$3 + 3\mathrm{i} = (\sqrt{3^2 + 3^2})\angle\left(\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2 + 3^2}}\right)\right) = \sqrt{18}\angle 45^\circ\ .$$

Den ene kvadratrod er derfor

$$\sqrt{\sqrt{18}\angle 22{,}5^\circ} = \sqrt[4]{18}\angle 22{,}5^\circ = \sqrt[4]{18}(\cos(22{,}5^\circ) + \mathrm{i}\ \sin(22{,}5^\circ) = 1{,}90 + 0{,}79\mathrm{i}\ .$$

Den anden kvadratrod er så $-1{,}90 - 0{,}79i$, hvilket vil sige, at

$$z^2 = 3 + 3\mathrm{i} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = 1{,}90 + 0{,}79\mathrm{i} \ \vee\ z = -1{,}90 - 0{,}79\mathrm{i}\ .$$

Eksempel 3.7 Hvad er $\sqrt{-1}$?

Da $\mathrm{i}^2 = -1$, må den ene kvadratrod af −1 være i, den anden er så −i, idet

$$(-\mathrm{i})^2 = (-\mathrm{i}) \cdot (-\mathrm{i}) = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1.$$

På denne måde bliver det let at finde kvadratrødderne af negative reelle tal, f.eks. er

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36 \cdot (-1)} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = \pm 6\mathrm{i}\ .$$

Kvadratrødder bruges til at løse andengradsligninger. Det viser sig, at den sædvanlige løsningsformel for andengradsligninger også virker, når man ser på komplekse tal. Man har altså følgende sætning:

Sætning 3.8

En andengradsligning $az^2 + bz + c = 0$, hvor a, b og c er komplekse tal, har løsningerne

$$z = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a},$$

hvor $d = b^2 - 4ac$.

Bemærk, at i formlen ovenfor, giver kvadratroden 2 tal. Andengradsligninger har derfor 2 løsninger.

Eksempel 3.9 Hvis koefficienterne a, b og c i en andengradsligning er reelle tal, bliver ligningen forholdsvist let at løse.

For at løse ligningen $z^2 + 2z + 5 = 0$, finder man først diskriminanten

$$d = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16.$$

De to løsninger er derfor

$$z = \frac{-2 + \sqrt{-16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4\mathrm{i}}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad z = -1 + 2\mathrm{i} \ \vee \ z = -1 - 2\mathrm{i} \ .$$

Eksempel 3.10 Ligningen $z^2 + (1 - 5\mathrm{i}) \cdot z - (8 + 4\mathrm{i}) = 0$, har diskriminanten

$$d = (1 - 5\mathrm{i})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-(8 + 4\mathrm{i})) = 8 + 6\mathrm{i} \ .$$

For at kunne bruge løsningsformlen for andengradsligninger skal man finde $\sqrt{d}$. Man har, at

$$|d| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \ .$$

og

$$\mathrm{Arg}(d) = \cos^{-1}\left(\frac{8}{10}\right) = 36{,}9^\circ \ .$$

Den ene kvadratrod er derfor givet ved

$$\sqrt{10} \cdot \left(\cos\left(\tfrac{36{,}9^\circ}{2}\right) + \mathrm{i}\ \sin\left(\tfrac{36{,}9^\circ}{2}\right)\right) = 3 + \mathrm{i} \ .$$

Den anden kvadratrod er derfor $-3 - \mathrm{i}$, og man finder de to løsninger

$$z = \frac{-(1 - 5\mathrm{i}) \pm (3 + \mathrm{i})}{2 \cdot 1} \qquad \Leftrightarrow \qquad z = 1 + 3\mathrm{i} \ \vee \ z = -2 + 2\mathrm{i} \ .$$

3.2 Øvelser

Øvelse 3.1
Beregn

a) i^5 b) $(6 + 2\mathrm{i})^3$ c) $(8 - 3\mathrm{i})^4$ d) $(2 + \mathrm{i})^5$

Øvelse 3.2
Beregn de tre 3. rødder af 1, dvs. $\sqrt[3]{1}$.

Øvelse 3.3
Beregn de fire 4. rødder af $1 + \mathrm{i}$, dvs. $\sqrt[4]{1 + \mathrm{i}}$.

Øvelse 3.4
Løs ligningen $z^2 = 5 - 12\mathrm{i}$.

Øvelse 3.5
Løs ligningerne

a) $z^2 + 6z + 10 = 0$

b) $z^2 + 4z + 13 = 0$

c) $z^2 + 14z + 50 = 0$

Øvelse 3.6
Løs ligningerne

a) $z^2 - (5 + 4\mathrm{i})z + (11 + 13\mathrm{i}) = 0$

b) $z^2 + (1 - 2\mathrm{i})z + (2 + 14\mathrm{i}) = 0$

Komplekse funktioner 4

Da komplekse tal kan ses som en udvidelse af de reelle tal, er det naturligt at udvide funktionsbegrebet til at omfatte komplekse funktioner. En kompleks funktion skal altså forstås som en funktion, hvor både den uafhængige og den afhængige variabel er komplekse tal.

For reelle funktioner kan man tegne grafen for at få et overblik over, hvordan funktionen opfører sig. For komplekse funktioner er dette desværre ikke umiddelbart muligt, idet den uafhængige variabel er et punkt i den komplekse plan, og det er den afhængige variabel også. Man har altså brug for 4 dimensioner for at tegne grafen for en kompleks funktion, og dette kan ikke lade sig gøre.

Komplekse funktioner er altså på sin vis sværere at forholde sig til end reelle, men man kan dog godt sige noget fornuftigt om en kompleks funktion ved at overveje, hvordan punkterne i den komplekse plan bliver »flyttet rundt« af funktionen.

I dette kapitel ses dog kun på enkelte komplekse funktioner, og det viser sig, at når man går fra de reelle tal til de komplekse, dukker der nogle sammenhænge op, som man ikke havde kunnet forudse ved blot at studere reelle tal.

I de efterfølgende afsnit behandles cos og sin som matematiske funktioner, dvs. i udtrykket $\cos(x)$ er x en vinkel i radianer (se evt. appendix A).

4.1 Den komplekse eksponentialfunktion

Den første funktion, der tages under behandling, er den komplekse eksponentialfunktion $f(z) = \mathrm{e}^z$. Først følger dog her et argument for, at funktionen $f(x) = \cos(x) + \mathrm{i}\ \sin(x)$ har nogle interessante egenskaber:

Hvis man betragter funktionen $f(x) = \cos(x) + \mathrm{i}\ \sin(x)$, hvor x er et reelt tal, får man, at differentialkvotienten er

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) + \mathrm{i}\ \cos(x) = \mathrm{i}^2 \sin(x) + \mathrm{i}\ \cos(x) \\ &= \mathrm{i}(\mathrm{i}\ \sin(x) + \cos(x)) = \mathrm{i}(\cos(x) + \mathrm{i}\ \sin(x)) = \mathrm{i}\ \cdot f(x). \end{aligned}$$

Sammenfattet har man altså at

$$f(x) = \cos(x) + \mathrm{i}\ \sin(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \mathrm{i}\ \cdot f(x)\ .$$

Dette minder på om eksspontialfunktionen e^{kx}. For denne funktion gælder, at $(\mathrm{e}^{kx})' = k\,\mathrm{e}^{kx}$. Funktionen f ovenfor opfører sig altså på sin vis som en eksponentialfunktion.

Det vil derfor være naturligt at definere, at for reelle tal x er

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = \cos(x) + \mathrm{i}\ \sin(x)\ .$$

Hvis de sædvanlige regneregler gælder, vil $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x} \cdot e^{\mathrm{i}y}$, og man når frem til, at det giver god mening at definere følgende:

Definition 4.1

Hvis det komplekse tal $z = x + \mathrm{i}y$, defineres den komplekse eksponentialfunktion e^{z} ved

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x} \cdot (\cos(y) + \mathrm{i}\ \sin(y))\ .$$

Da $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\ \sin(x)$ følger af sætning 2.3, at et komplekst tal kan skrives på polær form på denne måde:

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, \qquad \text{hvor } r = |z| \text{ og } \phi = \arg(z)\ .$$

En anden ting, man kan udlede, er, at der gælder

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \cos(\pi) + \mathrm{i}\ \sin(\pi) = -1 + \mathrm{i} \cdot 0 = -1\ .$$

Heraf ses sammenhængen

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0,$$

som knytter de matematiske konstanter 0, 1, e, π og i sammen.

4.2 Den naturlige logaritme

Når man har defineret den komplekse eksponentialfunktion, kan man definere den naturlige logaritme som den omvendte funktion. Der skal altså gælde, at

$$\ln(\mathrm{e}^{z}) = z \qquad \text{og} \qquad \mathrm{e}^{\ln(z)} = z\ .$$

Man kan heraf udlede, at den komplekse logaritme har samme egenskaber, som den naturlige logaritme for reelle tal. Bl.a. gælder de sædvanlige logaritmeregneregler.

Dette udnyttes til at bevise følgende sætning:

Sætning 4.2

Den komplekse naturlige logaritme $\ln(z)$ er givet ved

$$\ln(z) = \ln(|z|) + \mathrm{i} \cdot \mathrm{Arg}(z)\ .$$

Bevis
Et komplekst tal z kan altid skrives på polær form $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, hvor $r = |z|$ og $\phi = \mathrm{Arg}(z)$. Heraf følger, at

$$\ln(z) = \ln(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) = \ln(r) + \ln(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) = \ln(r) + \mathrm{i}\phi\ .$$

Hermed er sætningen vist. ■

Her følger et eksempel på, hvordan man beregner den naturlige logaritme til et komplekst tal:

Eksempel 4.3 Hvad er $\ln(12 - 5\mathrm{i})$?

For at beregne dette skrives tallet $12 - 5\mathrm{i}$ først om til polær form. Modulus er

$$|12 - 5\mathrm{i}| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13 .$$

Hovedargumentet er

$$\mathrm{Arg}(12 - 5\mathrm{i}) = -\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = -0{,}39 .$$

Dvs.

$$\ln(12 - 5\mathrm{i}) = \ln(13) + \mathrm{i} \cdot (-0{,}39) = 2{,}56 - 0{,}39\mathrm{i} .$$

Eksponentialfunktionen og den naturlige logaritme kan bruges til at beregne a^b, når a og b er vilkårlige komplekse tal. Der gælder nemlig, at

$$a^b = (\mathrm{e}^{\ln(a)})^b = \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot b} .$$

Eksempel 4.4 Som et interessant eksempel udregnes i^{i}.

Da i har modulus 1 og argument $\frac{\pi}{2}$ er

$$\ln(\mathrm{i}) = \ln(1) + \mathrm{i} \cdot \tfrac{\pi}{2} = 0 + \mathrm{i} \cdot \tfrac{\pi}{2} = \mathrm{i} \cdot \tfrac{\pi}{2} .$$

Derfor er

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\ln(\mathrm{i})\cdot \mathrm{i}} = e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}^2\cdot\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}20788 ,$$

som pudsigt nok er et reelt tal.

4.3 De trigonometriske funktioner

Fra definitionen på eksponentialfunktionen kan man udlede, at

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\ \sin(z) \tag{4.1}$$
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \cos(-z) + \mathrm{i}\ \sin(-z) = \cos(z) - \mathrm{i}\ \sin(z) . \tag{4.2}$$

Hvis man trækker de to ligninger (4.1) og (4.2) fra hinanden fås

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = (\cos(z) + \mathrm{i}\ \sin(z)) - (\cos(z) - \mathrm{i}\ \sin(z)) = 2\mathrm{i}\ \sin(z) .$$

Lægger man i stedet de to ligninger sammen fås

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = (\cos(z) + \mathrm{i}\ \sin(z)) + (\cos(z) - \mathrm{i}\ \sin(z)) = 2\cos(z) .$$

Dette giver følgende sætning, der viser, hvordan cosinus og sinus kan fortolkes som komplekse funktioner:

Sætning 4.5

De komplekse trigonometriske funktioner $\sin(z)$ og $\cos(z)$ er givet ved

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{og} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,.$$

Ud fra disse to funktioner kan man i øvrigt også beregne tangens, idet

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}\,.$$

4.4 Øvelser

Øvelse 4.1
Beregn

a) e^{3+i} b) e^{-2+6i} c) e^{7i}

Øvelse 4.2
Omskriv til formen $re^{i\phi}$.

a) $3 + 6i$ b) $7 - 2i$
c) $4i$ d) $0{,}37 - 13{,}2i$

Øvelse 4.3
Beregn

a) $\ln(6 + 2i)$ b) $\ln(4 - i)$ c) $\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i\right)$

Øvelse 4.4
Beregn

a) $(3 + i)^{2,3}$ b) 6^{4-2i} c) $(9 - i)^{2+i}$

5 Kvaternioner

De sædvanlige reelle tal ligger på tallinjen, dvs. i én dimension. De komplekse tal ligger i planen, altså i to dimensioner. Man kan derfor overveje, om ikke det kan lade sig gøre at lave et talsystem i tre dimensioner. Det viser sig, at man kan vise, at dette ikke kan lade sig gøre.

I 1843 fandt den irske matematiker W.R. Hamilton ud af, at man kan lave et talsystem i fire dimensioner. Disse tal kaldes kvaternioner, og mængden af kvaternioner kaldes $\mathbb{H}$ til ære for Hamilton.

Det viser sig dog, at man må give køb på noget for at beskrive disse tal. For reelle og for komplekse tal gælder den såkaldte kommutative lov:

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad \text{(den kommutative lov).}$$

Det viser sig, at når man skal definere kvaternionerne, kan man ikke lave et sammenhængende talsystem, med mindre man bryder med den kommutative lov. For kvaternioner gælder der altså, at rækkefølgen man ganger i, ikke er ligegyldig (!)

Talsystemet er defineret på følgende måde:

Definition 5.1

Mængden af kvaternioner $\mathbb{H}$ består af tal på formen

$$q = a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c + \mathrm{k}d,$$

hvor a, b, c og d er reelle tal, og de tre imaginære enheder i, j og k opfylder

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1.$$

Af definitionen kan man bl.a. udlede, at

$$\begin{aligned} \mathrm{ij} &= \mathrm{k} \qquad & \mathrm{ji} &= -\mathrm{k} \\ \mathrm{jk} &= \mathrm{i} & kj &= -\mathrm{i} \\ \mathrm{ki} &= \mathrm{j} & \mathrm{ik} &= -\mathrm{j} \end{aligned}$$

Addition og multiplikation er defineret på fuldstændig samme måde som for reelle og komplekse tal, blot skal man huske på, at den kommutative lov ikke gælder.

For eksempel har man, at

$$(2 - 6\mathrm{i} + 3\mathrm{j} + \mathrm{k}) + (5 + \mathrm{i} - 7\mathrm{k}) = 7 - 5\mathrm{i} + 3\mathrm{j} - 6\mathrm{k}\ .$$

Multiplikation er temmelig besværligt, idet man kan ende med at skulle gange ret store parenteser sammen:

$$
\begin{aligned}
(-2 + 6i + 3j) \cdot (1 - i + 5j + 2k) &= -2 \cdot 1 - 2 \cdot (-i) - 2 \cdot 5j - 2 \cdot 2k + 6i \cdot 1 \\
&\qquad - 6i \cdot i + 6i \cdot 5j + 6i \cdot 2k + 3j \cdot 1 \\
&\qquad\quad - 3j \cdot i + 3j \cdot 5j + 3j \cdot 2k \\
&= -2 + 2i - 10j - 4k + 6i - 6i^2 + 30ij \\
&\qquad + 12ik + 3j - 3ji + 15j^2 + 6jk \\
&= -2 + 2i - 10j - 4k + 6i + 6 + 30k \\
&\qquad - 12j + 3j + 3k - 15 + 6i \\
&= -11 + 14i - 19j + 29k\,.
\end{aligned}
$$

5.1 Øvelser

Øvelse 5.1
Vis ved at beregne

$$(3 - 2i + 4j - k) \cdot (3j + 5k)$$

og

$$(3j + 5k) \cdot (3 - 2i + 4j - k)\,,$$

at den kommutative lov ikke gælder for kvaternioner.

Vinkelmål og trigonometriske funktioner

A

I dette afsnit bliver der gennemgået en smule teori om trigonometriske funktioner.

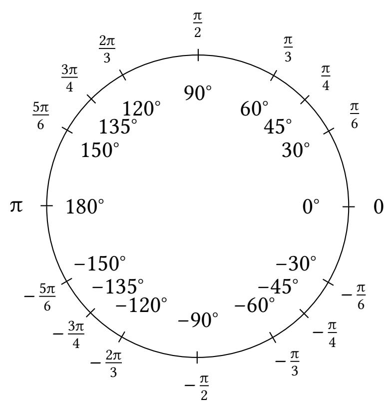
A.1 Radianer

I dagligdagen måles vinkler i grader. En cirkel svarer som bekendt til en vinkel på 360°. Men der er jo intet selvfølgeligt ved, at det lige skal være 360°, der definerer en hel omdrejning. Man kunne lige så godt have valgt ethvert andet tal[1].

[1]Faktisk er tallet 360 et levn fra det babyloniske 60-talssystem, hvorfra vi også har fået, at der er 60 sekunder på et minut og 60 minutter på en time.

Det vinkelmål, man faktisk bruger i matematikken, bygger på, at man måler vinkler som længden af en cirkelbue. Tanken er den følgende: Omkredsen af en cirkel er 2π gange radius. Den mest grundliggende cirkel, man kender, er enhedscirklen, som har radius 1. Omkredsen i enhedscirklen er derfor 2π. Man kan altså måle en vinkels størrelse som den buelængde, den udskærer af enhedscirklen, hvorved en hel omdrejning kommer til at svare til 2π. Dette vinkelmål kaldes *radianer*.

Figur A.1 viser sammenhængen mellem grader og radianer som vinkelmål.



Figur A.1: Sammenhængen mellem grader og radianer.

Da 2π i radianer svarer til en hel cirkel, og 360° også svarer til en hel cirkel, kan man omregne fra grader til radianer ved at gange med $\frac{\pi}{180^\circ}$.

Eksempel A.1 Hvad er vinklen 36° i radianer?

For at svare på dette spørgsmål beregnes

$$36^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5}.$$

36° svarer altså til $\frac{\pi}{5}$.

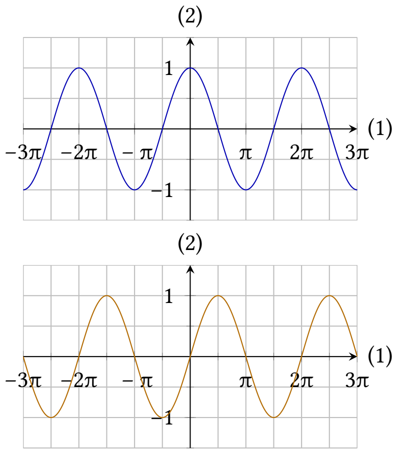
A.2 Cosinus og sinus som funktioner

Når cosinus og sinus behandles som matematiske funktioner, $\cos(x)$ og $\sin(x)$, måles den uafhængige variabel x i radianer. Ved at se på definitionerne på de to funktioner, kan man udlede, at de er *periodiske*.

At en funktion er periodisk betyder, at funktionen så at sige 'gentager sig selv'. For periodiske funktioner findes et tal p, sådan at

$$f(x) = f(x+p) = f(x+2p) = f(x+3p) = \cdots.$$

Tallet p kaldes funktionens *periode*.



Figur A.2: Graferne for funktionerne $\cos(x)$ (øverst) og $\sin(x)$ (nederst).

Da cosinus og sinus er defineret ud fra enhedscirklen, og 2π svarer til en hel omgang rundt i cirklen, vil cosinus og sinus være periodiske med perioden 2π:

$$\begin{aligned} \cos(x + n\cdot 2\pi) &= \cos(x) \\ \sin(x + n\cdot 2\pi) &= \sin(x) \qquad \text{hvor } n \text{ er et helt tal} \end{aligned}$$

Dette ses også på graferne for de to funktioner (figur A.2).

Cosinus og sinus opfører sig i denne sammenhæng som alle andre funktioner. De kan f.eks. også differentieres. Man kan vise følgende sætning, beviset udelades dog i denne omgang.[2]

[2] Beviset kan ses på http://uvmat.dk/jr/mathpub/DiffSin.htm.

Sætning A.2

Der gælder følgende:

$$(\cos(x))' = -\sin(x) \qquad \text{og} \qquad (\sin(x))' = \cos(x).$$

Sætning A.2 gælder *kun*, hvis den uafhængige variabel x måles i radianer. Hvis man i stedet måler i grader dukker konstanten $\frac{\pi}{180}$ op i udregningen – denne konstant er, som nævnt ovenfor en omregningsfaktor fra grader til radianer.

A.3 Øvelser

Øvelse A.1

Omregn følgende vinkler fra grader til radianer:

a) $72°$ b) $10°$ c) $-100°$

d) $20°$ e) $46°$ f) $-73°$

Øvelse A.2

Omregn følgende vinkler fra radianer til grader:

a) $\frac{\pi}{8}$ b) $\frac{-3\pi}{7}$ c) $\frac{4\pi}{9}$

d) 0,629 e) −1,34

Øvelse A.3

Løs følgende ligninger vha. et CAS-værktøj. Husk at regne i radianer.

a) $\sin(x) = 1$ b) $\cos(2x) = \frac{1}{2}$

c) $4\cos(3x+6) = 2\sqrt{2}$

Øvelse A.4

Bestem differentialkvotienten af følgende funktioner:

a) $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$

b) $g(x) = 6\cos(x)$

c) $h(x) = \cos(x)\cdot\sin(x)$